Воронежский государственный университет
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук

СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ И СМЕЖНЫЕ ПРОБЛЕМЫ

Материалы
Международной конференции
Воронежская зимняя математическая школа

(28 января – 2 февраля 2019 г.)

Воронеж
Издательский дом ВГУ
2019

УДК 517.53(97; 98)
ББК 22.16
С56

С56 **Современные методы теории функций и смежные проблемы** : материалы Международной конференции : Воронежская зимняя математическая школа (28 января – 2 февраля 2019 г.) / Воронежский государственный университет ; Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова ; Математический институт им. В. А. Стеклова РАН. — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2019. — 316 с.

ISBN 978-5-9273-2724–9

В сборнике представлены материалы докладов и лекций, включенных в программу Воронежской зимней математической школы, проводимой Воронежским госуниверситетом совместно с Московским государственным университетом им. М. В. Ломоносова и Математическим институтом им. В. А. Стеклова РАН. Тематика охватывает широкий спектр проблем теории функций и функционального анализа, качественной и спектральной теории дифференциальных уравнений, оптимального граничного управления, математического моделирования и других смежных направлений, а также проблем преподавания математики в средней школе и вузах.

УДК 517.53(97; 98)
ББК 22.16

ISBN 978-5-9273-2724–9

Содержание

Абдурагимов Г.Э. Численное решение краевой задачи для одного нелинейного интегро-дифференциального уравнения второго порядка 16
Акишев Г. Об оценках порядка приближения функций в обобщенном пространстве Лоренца 17
Алмохамед Муатаз Критерий единственности решения в одной обратной задаче для абстрактного дифференциального уравнения второго порядка 19
Анучина Ю.А., Завгородний М.Г. О функции Грина краевой задачи, заданной на цепочке интервалов 21
Арутюнян Л.М. Интегральные неравенства типа Ремеза . 22
Асхабов С.Н., Джабраилов А.Л. Нелинейные интегральные уравнения с ядрами типа потенциала в непериодическом случае 23
Атанов А.В., Лобода А.В. Голоморфные реализации разложимых пятимерных алгебр Ли 24
Афанасенкова Ю.В., Гладышев Ю.А. Некоторые методы задач теплопроводности многослойной среды при наличии источников тепла 26
Баев А.Д., Работинская Н.И., Чечина С.А., Давыдова М.Б. Теорема о следах для одного класса вырождающихся псевдодифференциальных операторов и оператора дифференцирования 29
Баев А.Д., Чечина С.А., Давыдова М.Б., Бабайцев А.А., Харченко В.Д. Теорема о композиции для одного класса псевдодифференциальных операторов с вырождением 33
Баскаков А.Г., Криштал И.А., Ускова Н.Б. О преобразовании подобия одного класса операторов 37
Беднаж В.А.,Родикова Е.Г. Об интерполяции на множествах карлесона в классе И.И. Привалова 38
Безмельницына Ю.Е., Корнев С.В. Об асимптотическом поведении решений случайных функционально-дифференциальных уравнений 40
Бильченко Г.Г. (мл.), Бильченко Н.Г. О влиянии линейного вдува при постоянном температурном факторе на область значений функционалов гиперзвуковой аэродинамики 41

Бильченко Г.Г. (мл.), Бильченко Н.Г. О влиянии линейного температурного фактора при постоянном вдуве на область значений функционалов гиперзвуковой аэродинамики 45

Бильченко Г.Г. (ст.) О движениях носителя с подвижным грузом по горизонтальной плоскости с анизотропным трением 47

Furthermore

Бободжанов А.А., Сафонов В.Ф. Асимптотические решения резонансных нелинейных сингулярно возмущенных задач в случае пересечения собственных значений предельного оператора 53

Бондаренко Н.П. О задаче Хохштадта–Либермана для интегро-дифференциальной системы Дирака 54

Бородин П.А. Жадные приближения произвольным множеством 55

Булатов М.В., Соловарова Л.С. О линейных дифференциально-алгебраических уравнениях высокого порядка 56

Булатова Р.Р., Самохин В.Н., Чечкин Г.А. Система уравнений симметричного пограничного слоя модифицированной жидкости О.А. Ладыженской в переменных Крокко 57

Булинская Е.В. Оптимальные и асимптотически оптимальные управления в прикладной теории вероятностей 58

Бурлуцкая М.Ш. О смешанной задаче для уравнения с инволюцией с непрерывным потенциалом 60

Бурушева Л.Ш. Суботношение Штейнера в банаховых пространствах 63

Бутерин С.А. Об устойчивости обратной задачи для интегро-дифференциального оператора свертки . . . 64

Бутерин С.А., Малюгина М.А. О восстановлении дифференциальных пучков с запаздыванием 65

Бутов В.В., Думачев В.Н. Базисы Уолша в нейросетевой классификации 66

Бырдин А.П., Прач В.С., Сидоренко А.А. Отклик на импульсное возбуждение среды с реологией Вольтерра-Фреше с сепарабельными ядрами 67

Валовик Д.В., Курсеева В.Ю. Многопараметрические задачи на собственные значения и их приложения в электродинамике 68
Васильева А.А. Колмогоровские поперечники пересечения весовых классов Соболева 69
Вахитова Е.В., Вахитова С.Р. О весах и функциях в методах весового решета 70
Вельмисов П.А., Молгачев А.А., Покладова Ю.В. Математическое моделирование аэроупругих систем 73
Верещагин В.Н. Составной метод увеличения эффективности сжатия информации 75
Верещагин В.Н. Об одном способе сжатых измерений в радиофизике 77
Вирченко Ю.П., Субботин А.В. Разрешимость начально-краевой задачи для двумерного уравнения Навье-Стокса 78
Вирченко Ю.П., Субботин А.В. Описание класса эволюционных уравнений ферродинамики 80
Владимирова О.В., Ковалева М.И., Колесникова И.В., Сапронов Ю.И. Об одной модели управления инвестиционным потоком 82
Войтицкий В.И., Копачевский Н.Д. О малых колебаниях сочленённых маятников с полостями, заполненными несмешивающимися жидкостями 87
Волосивец С.С., Голубов Б.И. Модифицированные дробные операторы Харди и Харди-Литтлвуда в некоторых пространствах 89
Ву Нгуен Шон Тунг О некоторых примерах нелокальных задач для эволюционных уравнений с суперустойчивой полугруппой 92
Высоцкая И.А. Почти периодические на бесконечности решения разностных уравнений 95
Габдуллин М.Р. Оценки винеровской нормы в $\mathbb{Z}_p^d$ 96
Галатенко В.В., Лукашенко Т.П., Садовничий В.А. Об орторекурсивных разложениях 98
Галеев Э.М. Достаточные условия экстремума в гладких задачах с равенствами и неравенствами в конечномерных пространствах 101
Гаркавенко Г.В. О спектральных свойствах одного класса возмущенных операторов 102

Гетманова Е.Н. О случайных точках равновесия 103
Гималтдинова А.А. Спектральные задачи с знакопеременной весовой функцией для обыкновенного дифференциального оператора второго порядка 104
Гладышев Ю.А., Калманович В.В. Об использовании матричного метода решения задач теплопроводности в многослойной среде при наличии фазовых переходов 105
Глызин С.Д., Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Асимптотика самосимметричного цикла билокальной модели Хатчинсона 107
Горюнов В.Е. Численное определение квазиустойчивости аттракторов динамических систем с запаздыванием . 108
Давыдова М.Б., Елфимова А.В., Симонова М.А. О непрерывной спектральной ветви одной нелинейной математической модели шестого порядка 109
Данилин А.Р., Шабуров А.А. Асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенной задачи оптимального управления с интегральным выпуклым критерием качества, терминальная часть которого зависит только от медленных переменных и гладкими ограничениями на управление 111
Данченко В.И., Данченко Д.Я. Двусторонние оценки типа Фейера 113
Данченко В.И., Данченко Д.Я. Уточнение неравенства Фейера на одном подклассе неотрицательных тригонометрических многочленов 114
Дикарев Е. Е. О регулярных на бесконечности полиномах и дифференциальных операторах с частными производными 115
Додонов А.Е. Неравенства типа С.М. Никольского для наипростейших дробей 116
Додонов А.Е. Необходимое условие сходимости рядов наипростейших дробей в $L_p(\mathbb{R})$ 117
Долгих А.Н. Исследование разрешимости модели движения сжимаемой жидкости Фойгта 118
Долгих А.Н., Устюжанинова А.С., Турбин М.В. Задача оптимального управления для модели Осколкова-Павловского 119
Долгих Т.Ф. Методы решения задачи зонального электрофореза с периодическими начальными данными . . . 120

Дюжина Н.А. Плотность сумм сдвигов одной функции в пространствах Харди 121

Елецких И.А., Ельчанинова Г.Г., Рыманова Т.Е. Проблемы преподавания математики в школе в контексте образованности современной молодежи 122

Ершова Е.М. Ограниченность норм операторов класса S_2 на основе обобщенного ядра Джексона 123

Ефремова Л.С. Восстановление разрывов потенциала в обратной задаче для интегро-дифференциальных операторов 124

Жук Л.В. Психодидактические закономерности обучения математике в вузе 125

Зайцева Н.В. Первая начально-граничная задача для гиперболического уравнения с сингулярным коэффициентом 126

Закора Д.А. Представление решения в задаче о движении вязкоупругого тела 128

Зверева М.Б., Каменский М.И. О волновых уравнениях с краевыми условиями типа sweeping процесса 129

Звягин А.В. Альфа-модель Кельвина-Фойгта 130

Зубова С.П., Раецкая Е.В. Решение задачи Коши для дескрипторного уравнения в банаховом пространстве . 131

Игнатьев М.Ю. О решении одной обратной задачи для интегро-дифференциальных операторов 132

Илолов М. О дробных линейных уравнениях типа свертки в банаховом пространстве 133

Кабанцова Л.Ю. Об обратимости разностных операторов . 136

Калитвин А.С. Спектральные свойства линейных операторов с частными интегралами и переменными пределами интегрирования 137

Калитвин А.С., Трусова Н.И. О фредгольмовости матричных операторов типа Романовского с частными интегралами 138

Калитвин В.А. Об устойчивости интегро-дифференциальных уравнений Барбашина (ИДУБ) с частной производной второго порядка 139

Калманович В.В., Серегина Е.В., Степович М.А. Сравнительный анализ применения матричного метода и метода конечных разностей для моделирования распределения неосновных носителей заряда в многослойной планарной структуре 140

Капицына Т.В. О граничных и начальных значениях решений параболических уравнений, вырождающихся на границе области 142

Качалов В.И. К вопросу о голоморфной регуляризации сингулярных возмущений 144

Кильдибаева С.Р. Исследование распространения многофазных затопленных струйных течений 146

Киричек В.А. Задача с интегральными условиями второго рода для гиперболического уравнения 147

Козко А.И. Двойственность и неравенство Минковского в пространствах с несимметричной нормой. 148

Колесников В.С. О равномерной сходимости двойных тригонометрических рядов с редко меняющимися коэффициентами 150

Коновалова М.А. Нахождение математического ожидания мультипликативно возмущенного случайным шумом дифференциального уравнения 151

Конягин С.В. О восстановлении целочисленного вектора по линейным измерениям и покрытии подпространствами 152

Копачевский Н.Д. О малых движениях гидросистемы «вязкоупругая жидкость–баротропный газ», заполняющих неподвижный сосуд 154

Копачевский Н.Д., Сёмкина Е.В. О малых движениях гидросистемы из трёх несмешивающихся жидкостей, заполняющих неподвижный сосуд 155

Коржавина М.С., Сумин В.И. Первая начально-краевая задача для полулинейного параболического уравнения с управляемыми старшими коэффициентами . . 156

Корнев В.В., Хромов А.П. Смешанная задача для однородного волнового уравнения с закрепленными концами 160

Коровина М.В., Смирнов В.Ю. Асимптотики решений линейных дифференциальных уравнений с голоморфными коэффициентами в окрестности бесконечности 164

Королев Г.М. Об одной задаче с нелокальным усреднением для многомерного уравнения теплопроводности . . . 168

Короткий В.А., Степович М.А. Математическое моделирование Ливонской войны: исторический и гипотетический сценарии 171

Костин Д.В., Костина Т.И., Бабошин С.Д. Численное моделирование процесса погружения сваи методом Эйлера 173

Крейн М.Н. Отображения из многообразия в некоммутативную алгебру 174

Кривошеева О.А. Разбиение комплексной последовательности на относительно малые группы 175

Кувшинников А.Е. Сравнение норм ошибок солверов пакета OpenFOAM на примере обтекания конуса под нулевым углом атаки 177

Кудрявцева О.С. Области однолистности голоморфных отображений круга в себя с инвариантным диаметром 178

Кулешов А.А. О некоторых свойствах гладких сумм ридж-функций на выпуклом теле 179

Курбатов В.Г., Курбатова И.В. Оценка приближения аналитической функции от матрицы интерполяционным многочленом 180

Кутерин Ф.А., Евтушенко А.А. Устойчивый секвенциальный принцип максимума Понтрягина в задаче оптимального управления с фазовыми ограничениями . 181

Лийко В.В. Об одном свойстве разностного оператора с переменными коэффициентами 182

Лобанова Н.И. Решение геометрических задач, сводящихся к однородным дифференциальным уравнениям, в системе дополнительного образования 183

Ломовцев Ф.Е. Критерий корректности смешанной задачи для одного параболического уравнения на отрезке со смешанными граничными условиями на концах . . . 184

Лукашенко В.Т. Моделирование полета осколков метеороида после его распада 186

Лыков К.В. Экстраполяционное описание предельных интерполяционных пространств на основе J-метода . . 187

Ляхов Л.Н., Лапшина М.Г., Рощупкин С.А. Связь преобразований Радона-Киприянова с нечетным $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$ преобразованием Бесселя 188

Малафеев О.А., Парфенов А.П. Компромиссное решение в модели экономики с заменой оборудования 189

Малафеев О.А., Рединских Н.Д. Многоэтапный аукцион инвестиционных проектов второй цены: компромиссное решение 190

Миронов А.Н., Миронова Л.Б. Об инвариантах Лапласа для одного класса гиперболических уравнений 191

Москалев П.В. О моделировании задачи перколяции узлов для треугольной решётки на квадратной решётке с $(1,1)$-окрестностью 192

Мохамад А.Х. Решение полуграничной задачи для дескрипторного уравнения в частных производных . . 193

Насыров А.А., Чиглинцев И.А., Лепихин С.А. Исследование образования газовых гидратов при работе купола-сепаратора установленного на дне океана над местом аварийного выброса гидратообразующего газа и нефти 194

Никитина А.А. Об одном неравенстве для операции B-лиувиллевского типа $I_{\gamma,-r}$ $(r > 0)$ над весовыми функциями экспоненциального типа 195

Новиков С.Я. Равноугольные жесткие фреймы в сжатых измерениях 196

Орешина М.Н. О функциональном исчислении в тензорном произведении гильбертовых пространств 197

Орлова А.С. Индивидуальные и классовые оценки скорости сходимости слабых жадных приближений по ортогональным словарям 198

Панков В.В. Априорная оценка решений одной краевой задачи в полосе для вырождающегося эллиптического уравнения 199

Переходцева Э.В. Развитие стохастических моделей распознавания и прогноза сильных и опасных летних осадков по территории России 203

Петросян Г.Г., Афанасова М.С. О периодической задаче для дифференциального включения дробного порядка в банаховом пространстве 206

Пискарев С.И. Аппроксимация дробных уравнений 208

Плотников М.Г. Восстановление сходящихся дискретных мартингалов 209

Половинкин И.П., Половинкина М.В., Рабееах С.А. Уточнение достаточного условия устойчивости равновесия в модели миграций с производством 210

Половинкина М.В. Об одном семействе однородных римановых метрик 211

Полякова Д.А. Однородные уравнения свертки в пространствах ультрадифференцируемых функций на прямой 212

Преображенская М.М. Явление буферности в модели двух синаптически связанных осцилляторов нейронного типа 213

Прокопьева Д.Б., Жук Т.А., Головко Н.И. Производящая функция числа заявок СМО с диффузионной интенсивностью входного потока и нулевым коэффициентом сноса 215

Раецкая Е.В. Построение управления в форме обратной связи для линейной динамической системы 217

Раецкий К.А Об одном классе гладких функций 218

Райцин А.М. Методы идентификации пространственных распределений интенсивности лазерных пучков для оптимального управления параметрами лазера 219

Расулов А.Б., Федоров Ю.С., Сергеева А.М. Граничные задачи для эллиптических уравнений с сильными особенностями в младших коэффициентах 221

Рогач Д.А. Об одном условии восстановления сигнала без фаз 222

Родин В.А., Синегубов С.В. Некоторые дополнения к теории надежности Шеннона–Мура 223

Романова Е.Ю. Спектральные свойства дифференциального оператора с инволюцией в условиях суммируемого потенциала 225

Рыхлов В.С. Кратная полнота корневых функций одного класса нерегулярных пучков дифференциальных операторов 226

Саввина О.А., Мельников Р.А. Российское математическое образование в контексте духовно-нравственной культуры 227

Самсонов А.А., Соловьёв П.С., Соловьёв С.И., Коростелева Д.М. Математическое моделирование собственных колебаний упругого стержня с присоединёнными грузами 229

Сапронова Т.Ю. Квазиинвариантные подмногообразия и редукция Ляпунова–Шмидта 230

Сафронова Т.М., Черноусова Н.В., Сафронова М.И. Формирование финансовой грамотности школьников в процессе обучения математике 233

Свинина С.В. Об одной квазилинейной системе дифференциально-алгебраических уравнений в частных производных 234

Семенова Т.Ю. О главном члене асимптотического разложения интеграла Фейнмана 237

Сергзы Г.Н. Фильтрационные свойства одномерных рядов Фурье-Хаара 239

Симоновская Г.А. Проблемы математической подготовки бакалавров экономических направлений 240

Солиев Ю.С. О синк-аппроксимации сингулярных интегралов Гильберта 241

Соловьёв П.С., Самсонов А.А., Соловьёв С.И., Коростелева Д.М. Исследование операторной задачи на собственные значения с рациональной зависимостью от спектрального параметра 243

Солодов А.П. Двусторонняя оценка суммы ряда по синусам с выпуклыми, медленно меняющимися коэффициентами 244

Степанищева В.С., Тихонов И.В. Модельная обратная задача теплопроводности для полуограниченной среды 245

Стородубцева Т.Н. Разработка математической модели структуры и механических свойств древесного композита 248

Стородубцева Т.Н., Огарков В.Б. Вынужденные колебания материальной точки в среде с сопротивлением . 252

Страхов С.И. Об одном классе пространств Орлича . . . 253

Струков В.Е. О распределениях, почти периодических на бесконечности 255

Струкова И.И. О некоторых свойствах почти периодических на бесконечности функций из однородных пространств 256

Терехин П.А. Фреймы в банаховых пространствах 257

Тихонов И.В., Шерстюков В.Б., Цветкович Д.Г. Уточненный вид разложений Поповичу для полиномов Бернштейна от рационального модуля 258

Тихонов И.В., Шерстюков В.Б., Петросова М.А. Комбинаторные структуры, связанные с явной записью полиномов Бернштейна на симметричном отрезке . . . 261

Туртин Д.В., Степович М.А., Серегина Е.В. О качественных характеристиках двумерной математической модели катодолюминесценции, генерированной низкоэнергетическим электронным зондом в однородном полупроводниковом материале 266

Усков В.И. Регуляризация дескрипторного уравнения первого порядка с возмущенным оператором при производной 268

Ускова О.Ф., Каплиева Н.А., Горбенко О.Д. Из истории Российской информатики 269

Фарков Ю.А. Фреймы Парсеваля и дискретное преобразование Виленкина-Крестенсона 270

Фомин В.И. Об общем решении линейного однородного дифференциального уравнения в банаховом пространстве в случае комплексных характеристических операторов 271

Фролова Е.С., Жук Т.А., Головко Н.И. Матожидание незавершенной работы в СМО с бесконечным накопителем, диффузионной интенсивностью входного потока и нулевым коэффициентом сноса 273

Хасанов М.К., Мусакаев Н.Г., Бородин С.Л. Приближенные аналитические решения задачи о гидратообразовании в пористой среде 275

Хасанов Ю.Х., Касымова Ё.Ф. О суммировании рядов Фурье методом Вороного 276

Хацкевич В.Л. Об оптимальных квазилинейных оценках случайных величин 277

Царьков И.Г. Почти выпуклость и ограниченность диаметров ближайших элементов 278

Чечин Д.А. Об одной математической модели в теории магнитосопротивления 280

Шабров С.А., Шаброва М.В., Голованева Ф.В. О скорости роста собственных значений одной спектральной задачи четвертого порядка с производными Радона–Никодима 284

Шайна Е.А. Единственность решения математической модели малых вынужденных колебаний стержневой системы 286

Шалданбаев А.Ш., Шоманбаева М.Т., Оразов И.О., Бектаева Ж.Б. О канторовой компоненте спектра оператора теплопроводности с отклоняющимся аргументом 288

Шалданбаев А.Ш., Шоманбаева М.Т., Шалданбай Б.А., Бейсебаева А. Формула следа задачи Коши дифференциального уравнения первого порядка с переменным отклонением аргумента 290

Шалданбаев А.Ш., Акылбаев М.И., Шоманбаева М.Т., Шалданбаева А.А. Критерии вольтерровости задачи Коши для уравнения пантографа 291

Шамолин М.В. Интегрируемые диссипативные системы со многим числом степеней свободы 293

Шананин Н.А. Об однозначном продолжении ростков решений квазилинейных уравнений первого порядка . . 294

Шелковой А.Н. Оценки собственных значений и собственных функций дифференциального оператора с нелокальными краевыми условиями 295

Шерстюков В.Б. Об оценках остатков степенных рядов при специальных ограничениях на коэффициенты . 296

Шкляев К.С. Локально чебышевские множества в конечномерных пространствах 298

Штейников Ю.Н. Об алгебраических системах и некоторых вычислительных задачах 299

Щербаков В.И. О признаке Жордана для обобщённых систем Хаара 299

Янченко А.Я., Подкопаева В.А. О некоторых свойствах целых решений алгебраических дифференциальных уравнений первого порядка 301

Baranovskii E.S., Artemov M.A. On the Boussinesq approximation for polymer fluid flows with temperature-dependent heat conductivity 302

Bezmelnitsyna Yu., Kornev S. On random nonsmooth multivalent guiding functions 304
Eidelman Yu. Differential equations with separation of variables in the right hand part 305
Mamedov Kh.R. A direct and inverse problem for a class Sturm-Liouville operator 306
Parasidis I.N., Providas E. On the eigenvalue problems for perturbed differential operators 307

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Г.Э. Абдурагимов (Махачкала, ДГУ)
gusen_ e@mail.ru

Рассмотрим краевую задачу

$$x'' + \frac{1}{(t+1)^2}\left(\int_0^1 x(s)ds\right)^2 = 0, 0 < t < 1, \tag{1}$$

$$x(0) = x(1) = 0. \tag{2}$$

Редуцируем краевую задачу (1)–(2) к задаче Коши в интегральной форме

$$x(t) = (\ln(1+t) - t)\left(\int_0^1 x(s)ds\right)^2 + \alpha t, \quad 0 < t < 1, \tag{3}$$

где α — произвольное число, соответствующее начальному условию $x(0) = \alpha$.

Существование и единственность положительного решения задачи (1)–(2) ранее автором было установлено в работе [1]. На основании соответствующих априорных оценок [1] положительного решения задачи (1)–(2) и необходимой малости $|\ln(1+t) - t|$ можно утверждать, что рассматриваемый итерационный процесс сходится при любом начальном приближении.

При численной реализации метода простой итерации решения уравнения (3) для подсчета интеграла мы воспользовались квадратурной формулой трапеции с равномерной сеткой. Соответствующие итерационные расчеты осуществляем до тех пор, пока с необходимой точностью не найдем число α^*, обеспечивающее выполнение второго граничного условия $x(1, \alpha^*) = 0$ краевой задачи (1)–(2).

В докладе будут представлены численные расчеты в соответствии с вышеприведенной схемой.

Литература

1. Абдурагимов Г.Э. О существовании и единственности положительного решения краевой задачи типа Штурма-Лиувилля для

одного нелинейного функционально-дифференциального уравнения второго порядка / Г.Э. Абдурагимов // Вестник ВГУ. Сер. : Физика. Математика. — 2012. — № 1. — С. 77–80.

ОБ ОЦЕНКАХ ПОРЯДКА ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ В ОБОБЩЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ ЛОРЕНЦА[1]

Г. Акишев (Астана, ЕНУ; Екатеринбург, УрФУ)
akishev_g@mail.ru

Рассмотрим $SV[1,\infty)$ — множество слабо меняющихся на $[1,+\infty)$ функций (см. [1], с. 108). Для функции $b \in SV[1,\infty)$, через γ_b обозначается положительная функция определенная по формуле $\gamma_b(t) = b(max\{t, \frac{1}{t}\})$ для всех $t > 0$.

Пространством Лоренца–Караматы называется множество измеримых на $\mathbb{T}^m = [0, 2\pi]^m$, имеющих 2π период по каждой переменной $x_j, j = 1, \dots, m$ функций $f(\overline{x}) = f(x_1, \dots, x_m)$, для которых

$$\|f\|_{p,\tau,b} = \left(\int_0^1 f^{*^{\tau}}(t)(t^{\frac{1}{p}}\gamma_b(t))^{\tau}\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{\tau}} < \infty, 1 < p, \tau < \infty,$$

где $f^*(t)$ — невозрастающая перестановка функции $|f(2\pi\bar{x})|$, $\bar{x} \in \mathbb{I}^m = [0,1]^m$ (см. [1], с. 112). Это пространство обозначается $L_{p,\tau,b}(\mathbb{T}^m)$.

Для заданного натурального числа n рассмотрим множество $\Box_n = \{\bar{k} = (k_1, ..., k_m) \in \mathbb{Z}^m \ : |k_j| < n, \ j = 1, ..., m\}$, кратное ядро Дирихле $D_{\Box_n}(\bar{x}) = \sum\limits_{\bar{k}\in\Box_n} e^{i\langle\bar{k}, 2\pi\bar{x}\rangle}$, $\bar{x} \in \mathbb{I}^m$ и свертку функции $f \in L_{p,\tau,b}(\mathbb{T}^m)$

$$\sigma_s(f, \bar{x}) = \int_{I^m} f(\bar{y})(D_{\Box_{2^s}}(\bar{x} - \bar{y}) - D_{\Box_{2^{s-1}}}(\bar{x} - \bar{y}))d\bar{y}, s \in \mathbb{N}.$$

$E_{\Box_n}(f)_{p,\tau,b} = \inf\limits_{T\in\mathfrak{F}_{\Box_n}} ||f - T||_{p,\tau,b}$ — наилучшее приближение функции $f \in L_{p,\tau,b}(\mathbb{T}^m)$ множеством $\mathfrak{F}_{\Box_n}$ — тригонометрических полиномов порядка не выше $n - 1$ по каждой переменной.

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Программы повышения конкурентоспособности Уральского федерального университета, постановления № 211 Правительства Российской Федерации, контракт № 02.A03.21.0006.

Пусть $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$ и число $\alpha > -1/\theta$. Рассмотрим пространство всех функций $f \in L_{p,\tau,b}(\mathbb{T}^m)$, для которых

$$\sum_{s=0}^{\infty}(s+1)^{\alpha\theta}||\sigma_s(f)||_{p,\tau,b}^{\theta} < \infty.$$

Это пространство обозначается символом $B_{p,\tau,b,\theta}^{0,\alpha}$ и называется пространством Никольского–Бесова логарифмической гладкости. В этом пространстве рассмотрим единичный шар

$$\mathbb{B}_{p,\tau,b,\theta}^{0,\alpha} = \{f \in B_{p,\tau,b,\theta}^{0,\alpha} \ : ||f||_{\mathbb{B}_{p,\tau,b,\theta}^{0,\alpha}} \leqslant 1\},$$

где норма

$$||f||_{\mathbb{B}_{p,\tau,b,\theta}^{0,\alpha}} = \|f\|_{p,\tau,b} + \left\{\sum_{s=0}^{\infty}(s+1)^{\alpha\theta}||\sigma_s(f)||_{p,\tau,b}^{\theta}\right\}^{\frac{1}{\theta}}.$$

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть* $1 < p < \infty$, $1 < \tau \leqslant 2$ *или* $2 \leqslant p < \infty$, $2 \leqslant \tau < \infty$. *Тогда для любой функции* $f \in L_{p,\tau,b}(\mathbb{T}^m)$ *имеет место неравенство*

$$\|f\|_{p,\tau,b} \leqslant C\Big(\sum_{s=0}^{\infty} \|\sigma_s(f)\|_{p,\tau,b}^{\tau_0}\Big)^{\frac{1}{\tau_0}},$$

где $\tau_0 = \min\{\tau, 2\}$.

Теорема 2. *Пусть функция* $b \in SV[1,\infty)$, $1 < p < \infty$, $1 < \tau \leqslant 2$ *или* $2 \leqslant p < \infty$, $2 \leqslant \tau < \infty$, $1 \leqslant \theta < \infty$, $\tau_0 = \min\{\tau, 2\}$. *Если* $\alpha > (\frac{1}{\tau_0} - \frac{1}{\theta})_+$, *то*

$$E_{\square_n}(\mathbb{B}_{p,\tau,b,\theta}^{0,\alpha})_{p,\tau,b} = \sup_{f\in\mathbb{B}_{p,\tau,b,\theta}^{0,\alpha}} E_{\square_n}(f)_{p,\tau,b} \asymp (\log(n+1))^{-\alpha+(\frac{1}{\tau_0}-\frac{1}{\theta})_+}.$$

где $a_+ = \max\{a, 0\}$.

Также получены оценки величины $E_{\square_n}(\mathbb{B}_{p,\tau_1,b,\theta}^{0,\alpha})_{p,\tau_2,b}$ при $1 < \tau_2 < \tau_1 < \infty$.

Замечание. В случае $b(t) = 1$, $\tau = p$, $\theta \leqslant \tau_0$ из теоремы 2 следует результат С.А. Стасюка [2]. При $b(t) = 1$ теоремы 1 и 2 доказаны в [3].

Литература

1. Edmunds D.E. Hardy operators, function spaces and embedding / D.E. Edmunds, W.D. Evans. — Berlin Heidelberg : Springer-Verlag, 2004. — 328 p.

2. Стасюк С.А. Аппроксимативные характеристики аналогов классов Бесова с логарифмической гладкостью / С.А. Стасюк // Укр. мат. журн. — 2014. — Т. 66, № 4. — С. 493–499.

3. Акишев Г. Оценки наилучших приближений функций класса логарифмической гладкости в пространстве Лоренца / Г. Акишев // Труды ИММ УрО РАН. — 2017. — Т. 23, № 3. — С. 3–21.

КРИТЕРИЙ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ В ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ АБСТРАКТНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Алмохамед Муатаз (Москва, МПГУ)
mssrmtz@gmail.com

В банаховом пространстве E рассмотрим линейный замкнутый оператор A с областью определения $D(A)$ (не обязательно плотной в E). Зафиксируем число $T > 0$ и на отрезке $[0, T]$ рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка

$$u''(t) = Au(t) + g, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{1}$$

с неизвестным элементом $g \in E$. Для одновременного нахождения функции $u\colon [0, T] \to E$ и элемента g добавим условия

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1, \quad u'(T) = u_2, \tag{2}$$

где $u_0, u_1, u_2 \in E$. Задача $(1), (2)$ относится к *обратным задачам* (см. [1]). Пару $(u(t), g)$ назовем *решением* обратной задачи $(1), (2)$, если $u \in C^2([0, T], E)$, $u(t) \in D(A)$ при $0 \leqslant t \leqslant T$, $g \in E$, и выполнены все соотношения $(1), (2)$. Для согласования требований будем считать, что $u_0 \in D(A)$.

Предположим что обратная задача $(1), (2)$ с некоторыми такими элементами u_0, u_1, u_2 разрешима. Поставим вопрос о единственности решения. Он сводится к вопросу о наличии нетривиальных решений для однородной обратной задачи с условиями

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = 0, \quad u'(T) = 0. \tag{3}$$

Пару $u(t) \equiv 0$, $g = 0$ считаем *тривиальным решением* обратной задачи $(1), (3)$.

Теорема 1. *Для того чтобы обратная задача* (1), (3) *имела только тривиальное решение* $u(t) \equiv 0$, $g = 0$, *необходимо и достаточно, чтобы ни одно из чисел*

$$\lambda_k = -\frac{k^2\pi^2}{T^2}, \qquad k \in \mathbb{N}, \tag{4}$$

не являлось собственным значением оператора A.

Числа (4) называются *характеристическими числами* обратной задачи (1), (2). Они получаются как нули следующей целой функции

$$L_T(\lambda) \equiv \frac{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda}\,T}{\sqrt{\lambda}}, \qquad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{5}$$

Функция (5) естественно возникает при исследовании однородной обратной задачи (1), (3) методом разделения переменных.

Доказательство теоремы 1 происходит по схеме, разработанной в работах [2], [3]. В частности, в [3] рассматривалась похожая задача для уравнения второго порядка с финальным условием $u(T) = u_2$, а не $u'(T) = u_2$ как в нашем наборе (2).

Выражаю благодарность своему научному руководителю Тихонову И. В. за ценные советы при планировании исследования и рекомендации по оформлению работы.

Литература

1. Prilepko A. I. Methods for solving inverse problems in mathematical physics / A. I. Prilepko, D. G.Orlovsky, I. A. Vasin. — N.Y., Basel : Marcel Dekker, 2000. — 744 p.

2. Тихонов И. В. Единственность решения двухточечной обратной задачи для абстрактного дифференциального уравнения с неизвестным параметром / И. В. Тихонов, Ю. С. Эйдельман // Дифференц. уравнения. — 2000. — Т. 36, № 8. — С. 1132–1133.

3. Тихонов И. В. Обратная задача для дифференциального уравнения в банаховом пространстве и распределение нулей целой функции типа Миттага–Леффлера / И. В. Тихонов, Ю. С. Эйдельман // Дифференц. уравнения. — 2002. — Т. 38, № 5. — С. 637–644.

О ФУНКЦИИ ГРИНА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ, ЗАДАННОЙ НА ЦЕПОЧКЕ ИНТЕРВАЛОВ

Ю.А. Анучина, М.Г. Завгородний (Воронеж, ВГУ)
Anuchina95@mail.ru

Рассмотрим краевую задачу для дифференциального уравнения

$$(p_0(x)\,u''(x))'' - (p_1(x)\,u'(x))' + p_2(x)\,u(x) = f(x)\,, \qquad (1)$$

$$p_i \in C^{2-i}[a,b]\,, \quad f \in C(\Im)\,,$$

заданного на объединении интервалов $\Im = (a,b)\setminus V$, где $-\infty < a < b < +\infty$ и $V \subset (a,b)$ — конечное множество точек, при краевых условиях $u(a) = u'(a) = u(b) = u'(b) = 0$ и условиях согласования, заданных во всех точках множества V.

Условия согласования в каждой точке $\xi \in V$ имеют один из двух ниже приведенных видов: либо

$$\Delta_\xi u = \Delta_\xi u' = \Delta_\xi u'' = \Delta_\xi u''' + k_\xi u(\xi) = 0 \quad (k_\xi \geqslant 0) \qquad (2a)$$

либо

$$u(\xi+0) = u(\xi-0) = 0, \quad \Delta_\xi u' = \Delta_\xi u'' = 0, \qquad (2b)$$

где $\Delta_\xi u = u(\xi+0) - u(\xi-0)$. Полагаем $\inf\limits_{x\in\Im} p_0(x) > 0$.

Изучаются свойства функции Грина краевой задачи (1), (2). В частности было доказано следующее утверждение. Обозначим через $G_1(x,s)$ и $G_2(x,s)$ функции Грина невырожденных краевых задач (1), (2) при $V = V_1$ и $V = V_2$, соответственно.

Теорема. *Пусть $V_2 = V_1 \cup \{t\}$ и $t \notin V_1$. Тогда*

$$G_2(x,s) = G_1(x,s) - k_t \frac{G_1(x,t)\,G_1(t,s)}{{p_0}^{-1}(t) + k_t G_1(t,t)},$$

если в точке t заданы условия (2a) и

$$G_2(x,s) = G_1(x,s) - \frac{G_1(x,t)\,G_1(t,s)}{G_1(t,t)},$$

если в точке t заданы условия (2b).

Используя функцию Грина двухточечной краевой задачи на отрезке (при $V = \varnothing$), приведенная теорема позволяет построить

функцию Грина краевой задачи (1), (2) с любым конечным количеством промежуточных точек V. В пакете прикладных математических программ Maple были построены графики функций Грина для ряда краевых задач (1), (2) и проанализированы области знакопостоянства этих функций.

Отметим, что краевая задача (1), (2) моделирует малые упругие деформации стержня с дополнительными промежуточными закреплениями. Условия (2a) означают, что в узле ξ стержень соединен с пружиной жесткости k_ξ, закрепленной на неподвижной опоре, а условия (2b) соответствуют шарнирному закреплению стержня в узле ξ .

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ТИПА РЕМЕЗА

Л.М. Арутюнян (Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова)
Lavrentin@ya.ru

Пусть на некотором пространстве Ω с вероятностной мерой μ задана система функций X. Будем называть неравенствами типа Ремеза неравенства вида

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant C(\Omega, \mu(A), X)\|f\|_{L^\infty(A)},$$

которые выполняются для всякого измеримого множества A и всякой функции f из пространства X. Таким образом, неравенства типа Ремеза оценивают супремум функции на всем пространстве через ее супремум на некотором произвольном множестве положительной меры. Если в качестве Ω взять $\mathbb{R}^n$, в качестве пространства функций взять P^d — пространство многочленов степени d , а в качестве μ — равномерное распределение на некотором выпуклом теле, то константа в данном неравенстве будет стремиться к бесконечности с ростом размерности n (см. [2]). Интегральные неравенства Ремеза — это аналогичные неравенства, но для интегральных норм:

$$\|f\|_{L^1(\mu)} \leqslant C(\Omega, \mu(A), X)\|f\|_{L^1(\mu_A)},$$

где μ_A — это нормированное сужение меры μ на множество A, т. е. мера $\mu_A(\cdot) = \frac{\mu(\cdot \cap A)}{\mu(A)}$. Оказывается, что константа в интегральном неравенстве Ремеза для многочленов на выпуклых телах может быть взята независимой от размерности, в частности, такое

неравенство можно перенести и в бесконечномерный случай, если заменить равномерное распределение на выпуклом компакте на логарифмически вогнутую меру. Мы рассмотрим этот феномен на примере алгебраических многочленов (см. предыдущий результат на эту тему [1]), а также на примере тригонометрических и, если хватит сил, квазитригонометрических многочленов.

Литература

1. Арутюнян Л.М. Оценки интегральных норм многочленов на пространствах с выпуклыми мерами / Л.М. Арутюнян, Е.Д. Косов // Матем. сб. — 2015. — 206:8. — С. 3–22.

2. Брудный Ю.А. Об одной экстремальной задаче для многочленов n переменных / Ю.А. Брудный, М.И. Ганзбург // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1973. — 37:2. — С. 344–355.

НЕЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЯДРАМИ ТИПА ПОТЕНЦИАЛА В НЕПЕРИОДИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ[1]

С.Н. Асхабов, А.Л. Джабраилов (Грозный, ЧГУ)
askhabov@yandex.ru

В монографии [1] без ограничений на абсолютную величину параметра λ доказаны теоремы о существовании и единственности решения в вещественных пространствах $L_p(0,1)$, $1 < p < \infty$, для нелинейных интегральных уравнений вида

$$\lambda \cdot F\,[x, u(x)] + \int\limits_0^1 \varphi(|x-t|)\,u(t)\,dt = f(x)\,, \tag{1}$$

$$u(x) + \lambda \int\limits_0^1 \varphi(|x-t|)\,F[t, u(t)]\,dt = f(x)\,, \tag{2}$$

$$u(x) + \lambda \cdot F\left[x, \int\limits_0^1 \varphi(|x-t|)\,u(t)\,dt\right] = f(x)\,. \tag{3}$$

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-41-200001).

В статье [2] показано, что при $p = 2$ решения уравнений (1)–(3) могут быть найдены методом последовательных приближений пикаровского типа. В случае $F\,[x, u(x)] \equiv u(x)$, т.е в линейном случае, уравнения (1)–(3) в пространстве $C[0,1]$ были ранее изучены в [3].

В данной работе получено обобщение указанных результатов на случай пространств $L_p(\varrho)$ с произвольным положительным весом $\varrho(x)$, суммируемым в некоторой степени на отрезке $[0,1]$, а также приводятся примеры, иллюстрирующие доказанные теоремы.

Литература

1. Асхабов С.Н. Нелинейные уравнения типа свертки / С.Н. Асхабов. — М. : Физматлит, 2009. — 304 с.

2. Асхабов С.Н. Приближенное решение нелинейных уравнений типа свертки на отрезке / С.Н. Асхабов, А.Л. Джабраилов // Уфимский мат. журнал. — 2013. — Т. 5, вып. 2. — С. 3–11.

3. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение / А.М. Нахушев. — М. : Физматлит, 2003. — 272 с.

ГОЛОМОРФНЫЕ РЕАЛИЗАЦИИ РАЗЛОЖИМЫХ ПЯТИМЕРНЫХ АЛГЕБР ЛИ[1]

А.В. Атанов, А.В. Лобода (Воронеж, ВГУ, ВГТУ)
atanov.cs@gmail.com, lobvgasu@yandex.ru

В связи с задачей описания голоморфно-однородных вещественных гиперповерхностей пространства $\mathbb{C}^3$ изучаются 5-мерные вещественные алгебры Ли, реализуемые как алгебры голоморфных векторных полей на таких многообразиях. Класс 5-мерных разложимых алгебр содержит 27 типов абстрактных алгебр Ли (из полной классификации [1], включающей 67 различных семейств).

При этом значительная часть алгебр из списка [1] (и, в частности, разложимых алгебр) содержит 4-мерные или 3-мерные абелевы подалгебры. Однородные поверхности с таким алгебрами либо вырождены по Леви, либо голоморфно эквивалентны трубчатым поверхностям с аффинно-однородными основаниями (полные описания двух этих типов поверхностей см. в [2] и [3]).

Имеются лишь две разложимые 5-мерные алгебры:

$$m_{16} = su(1,1) + g_2 \quad \text{и} \quad m_{17} = su(2) + g_2$$

---

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 17-01-00592-а).

(g_2 — нетривиальная двумерная алгебра), не содержащие «больших» абелевых подалгебр.

Теорема 1. *Если алгебра голоморфных векторных полей на невырожденной по Леви однородной гиперповерхности M в $\mathbb{C}^3$ имеет структуру m_{16}, то M голоморфно эквивалентна либо трубке с аффинно-однородным основанием, либо одной из поверхностей*

$$(vy_1 + Ax_2 + By_2)^2 = |z_2|^2,\ A, B \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Для алгебры m_{17} построено несколько частных реализаций и соответствующих невырожденных однородных поверхностей.

Пример 1. При произвольных комплексных A, B алгебра векторных полей с базисом

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial z_2}, \quad e_2 = z_1 \sin z_2 \left(A\frac{\partial}{\partial z_1} + B\frac{\partial}{\partial z_3} \right) + i \cos z_2 \,\frac{\partial}{\partial z_2},$$

$$e_3 = z_1 \cos z_2 \left(A\frac{\partial}{\partial z_1} + B\frac{\partial}{\partial z_3} \right) - i \sin z_2 \,\frac{\partial}{\partial z_2}, \quad e_4 = \frac{\partial}{\partial z_3}, \tag{2}$$

$$e_5 = z_1\frac{\partial}{\partial z_1} + z_3\frac{\partial}{\partial z_3}.$$

имеет коммутационные соотношения

$$e_1 \circ e_2 = e_3, \quad e_1 \circ e_3 = -e_2, \quad e_2 \circ e_3 = e_1, \quad e_4 \circ e_5 = e_4,$$

характеризующие алгебру $m_{17} = su(2) + g_2$.

Предложение 1. Интегральными многообразиями алгебр (2) при $B = 0$ являются строго псевдо-выпуклые однородные вещественные гиперповерхности ($\alpha = Re\, A,\ \beta = Im\, A > 0$)

$$v = |z_1| e^{T \arg(z_1)} (\operatorname{ch} y_2)^R,\ T = \frac{\alpha}{\beta},\ R = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\beta}. \tag{3}$$

Пример 2. На голоморфно-однородных поверхностях

$$v \operatorname{ch} y_1 - (Ax_2 + By_2) \operatorname{sh} y_1 = |z_2|,\ A, B \in \mathbb{R} \tag{4}$$

с индефинитной формой Леви также имеются 5-мерные алгебры голоморфных векторных полей со структурой m_{17}.

Вопросы новизны и голоморфных различий однородных поверхностей из семейств (1), (3) и (4), требующие привлечения, например, коэффициентной техники (см. [4]), пока до конца не изучены.

Литература

1. Мубаракзянов Г.М. Классификация вещественных структур алгебр Ли пятого порядка / Г.М. Мубаракзянов // Изв. вузов. Матем. — 1963. — №3. — С. 99–106.

2. Doubrov B.M. Homogeneous surfaces in the three-dimensional affine geometry / B. M. Doubrov, B. P. Komrakov, M. Rabinovich // Geometric Topology of Submanifolds VIII. — 1996. — P. 168–178.

3. Fels G. Classification of Levi degenerate homogeneous CR-manifolds in dimension 5 / G. Fels, W. Kaup // Acta Math. — 2008. — V. 201, № 1. — P. 1–82.

4. Атанов А.В. О голоморфной однородности вещественных гиперповерхностей общего положения в $\mathbb{C}^3$ / А.В. Атанов, А.В. Лобода, В.И. Суковых // Тр. МИАН. — 2017. — Т. 298. — С. 20–41.

НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ МНОГОСЛОЙНОЙ СРЕДЫ ПРИ НАЛИЧИИ ИСТОЧНИКОВ ТЕПЛА

Ю.В. Афанасенкова, Ю.А. Гладышев (Калуга, КГУ)
dvoryanchikova_y@mail.ru

Решение задачи о фазовых переходах в многослойных средах при их нагревании представляет практический интерес в виду всё большего использования таких материалов в технике и строительстве при различных температурных условиях. В сообщении [1] изучался вопрос о возможности фазовых переходах в слое при отсутствии распределенных тепловых источниках. В данном сообщении предполагается, что такие источники вызванные физическими и химическими процессами есть.

В работе использованы современные математические методы, позволяющие достигнуть большей общности результатов.

Как и в [1] первоначально рассматривается один слой, так как переход к многослойной системе может быть осуществлен стандартными матричными методами.

При наличии распределенных источников тепла температурное поле не является более монотонной функцией на рассматриваемом промежутке, а имеет на нем максимальное значение внутри слоя, где действует тепловые источники. Предположим, что температура

фазового перехода T_φ вещества слоя задана, причем при этом коэффициент теплопроводности резко меняется. Очевидно, что фазовый переход будет располагаться в области максимальной температуры в некотором отрезке $x_2 = x_{\varphi_1}, x_3 = x_{\varphi_2}$. Коэффициенты x_1, x_4 определяют внешние границы слоя. Положим, что на внешних границах слоя x_1, x_φ заданы температуры T_1, T_2 меньшие T_φ.

Очевидно, что для моделирования процесса следует вместо одного слоя рассмотреть систему трех слоев с границами $x_1,\ x_{\varphi_1}, x_{\varphi_2}$, x_4, причем границы слоев $x_{\varphi_1}, x_{\varphi_2}$ являются искомыми и определяются в процессе решения. Основная система уравнений имеет простую форму [3]

$$\frac{d}{dx}\left(\lambda^{(i)}\frac{dT^{(i)}}{dx}\right) = -q, \quad i = 1, 2, 3.$$

Формальная трудность состоит в нахождении решения, удовлетворяющего условиям согласования на границах слоев

$$T^{(1)}|_{x=x_{\varphi_1}} = T^{(2)}|_{x=x_{\varphi_1}}, T^{(2)}|_{x_{\varphi_2}} = T^{(3)}|_{x_{\varphi_2}}, \tag{1}$$

$$\lambda^{(1)}\frac{dT(1)}{dx}|_{x_{\varphi_1}} = \lambda^{(2)}\frac{dT(2)}{dx}|_{x_{\varphi_1}}, \lambda^{(2)}\frac{dT(2)}{dx}|_{x_{\varphi_2}} = \lambda^{(1)}\frac{dT(2)}{dx}|_{x_{\varphi_2}},$$

и внешним граничным условиям

$$T^{(1)}|_{x_1} = T_1, T^{(3)}|_{x_4} = T_2.$$

При традиционном методе решения имеем шесть искомых коэффициентов. Хотя есть полная уверенность в наличии единственного решения, однако их физическая интерпретация сильно затруднена большим числом параметров $x_{\varphi_1}, x_{\varphi_2}$ таким образом, чтобы удовлетворить условиям фазового перехода.

Более удобно для решения поставленной задачи использовать матричный метод, введенный ранее в работе [1]. Чтобы охватить единым подходом случаи осесимметричной и центральносимметричной системы слоев использован при представлении функций аппарат обобщенных степеней Берса. Возвращаясь к поставленной задаче при симметричных условиях легко видеть, что в центре слоя $x_1,\ x_4$ идет плоскость нулевого потока тепла. Решение легко найти

$$T^{(1)}(x) = T_1 - X_1(x, x_1)J^{(1)}_{(1)} - \frac{q}{2}X^{(2)}_{(1)}(x, x_1).$$

Условия для определения x_φ найдем, решая квадратное уравнение

$$\xi = \frac{l}{2} \pm \left(\left(\frac{l}{2} \right)^2 + \frac{2\lambda_1}{q} (T_1 - T_\varphi) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Приведем более совершенный матричный метод, пригодный при любом числе слоев. Определяем вектор-столбцы и матрицу K данного слоя

$$V^{(k)}(x) = \begin{pmatrix} T^{(k)}(x) \\ J^{(k)}(x) \end{pmatrix}, V^{(1)}_{(1)} = \begin{pmatrix} T^{(1)}(1) \\ J^{(1)}(1) \end{pmatrix},$$

$$W^{(k)}_{(x)} = \begin{pmatrix} w^{(k)}(x) - w^{(k)}(x_k) \\ -D_{(k)} w^{(k)} \end{pmatrix},$$

$$K^{(k)}_{(x,x_k)} = \begin{pmatrix} 1 & -X^{(1)}_k(x, x_k)) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

При условии, что k-номер левой координаты сегмента $[x_k, x_{k+1}]$ определяющего слоя. Здесь $J^((k))$ плотность потока в $k-$ом слое

$$J^{(k)}_{(x)} = -\lambda_k D^{(k)} T^{(k)}.$$

Функции $w^{(k)}(x)$ произвольные решения неоднородных уравнений (1), а $X^{(2)}(x, x_k),\ X^{(2)}(x, x_k)$ обобщенные степени.

Решение задачи Коши при заданных $T^{(k)}_{(k)},\ J^{(k)}_{(k)}$ имеет вид

$$V^{(k)} = \begin{pmatrix} T^{(k)} \\ J^{(k)} \end{pmatrix} = K^{(k)}(x, x_k) V^{(k)}(k) + W^{(k)}(x, x_k),$$

Поэтому решение для всех трех слоев определяющий фазы в слое запишем

$$V^{(1)}(x) = K^{(1)}(x, x_1) V^{(1)}(1) + W^{(1)}(x, x_1),$$

$$V^{(2)}(x) = K^{(2)}(x, x_2) K^{(1)}(x_2, x_1) V^{(1)}(1) + K^{(2)}(x, x_2) W^{(2)}(x_2, x_1) +$$

$$W^{(2)}(x, x_2), x_2 < x < x_3,$$

$$V^{(3)}(x) = K^{(3)}(x, x_3) K^{(2)}(x_3, x_2) K^{(1)}(x_2, x_1) V^{(1)}(1) +$$

$$K^{(3)}(x, x_3) K^{(2)}(x_3, x_2) W^{(2)}(2, 1) + K^{(3)}(x, x_3) W^{(3)}(x_3, x_2), x_2 < x < x_3$$

Значение потока $J^{(1)}(1)$ определяется при выполнении граничного условия.

Полученный результат справедлив для систем слоев с любым видом симметрии. Предложенный метод допускает различные обобщения по усложнению граничных условий и условий согласования.

Литература

1. Гладышев Ю.А. Об использовании матричного метода при решении задач теплопроводности в многослойной среде при наличии фазового переходов / Ю.А. Гладышев, В.В. Калманович // Современные методы теории функций и смежные проблемы. Материалы Международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа». — 2019. — С. 105–107.

2. Гладышев Ю.А. Процесс теплопроводности в неоднородной пластине / Ю.А. Гладышев, Ю.В. Дворянчикова // Труды пятой Российской национальной конференции по теплообмену. — М. : Изд. дом МЭИ, 2010. — Т. 7. — С. 76–79.

3. Кудинов В.А. Аналитические решения задач тепломассопереноса в многослойных конструкций / В.А. Кудинов, М. Карташов. — М. : Высшая школа, 2005. — 430 с.

ТЕОРЕМА О СЛЕДАХ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ И ОПЕРАТОРА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ[1]

А.Д. Баев, Н.И. Работинская, С.А. Чечина,
М.Б. Давыдова (Воронеж, ВГУ)

Исследование теории вырождающихся псевдодифференциальных уравнений в настоящее время является актуальной задачей в связи с использованием этих операторов при доказательстве теорем о существовании решений и получении коэрцитивных априорных оценок решений краевых задач для вырождающихся уравнений. Такие краевые задачи возникают, например, при моделировании процессов гидродинамики с сингулярными особенностями. В настоящей работе исследуется вопрос об ограниченности одного класса весовых псевдодифференциальных операторов, построенных по специальному интегральному преобразованию F_α, введенному в [1].

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (проект 14.Z50.31.0037).

Теорема об ограниченности доказывается в специальных весовых пространствах типа пространств С.Л. Соболева.

Рассмотрим функцию $\alpha(t)$, $t \in R^1_+$, для которой $\alpha(+0) = \alpha'(+0) = 0$, $\alpha(t) > 0$ при $t > 0$, $\alpha(t) = \mathrm{const}$ для $t \geqslant d$ при некотором $d > 0$.

Следуя [1] введём интегральное преобразование

$$F_\alpha[u(t)](\eta) = \int\limits_0^{+\infty} u(t) \exp(i\eta \int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}) \frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}}, \qquad (1)$$

определенное первоначально, например, на функциях $u(t) \in C_0^\infty(R^1_+)$. Преобразование (1) связано с преобразованием Фурье

$$F_{\tau\to\eta}[u] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) \exp(i\eta\tau) d\tau, \quad \eta \in R^1$$

следующим равенством

$$F_\alpha[u(t)](\eta) = F_{\tau\to\eta}[u_\alpha(\tau)],$$

где $u_\alpha(\tau) = \sqrt{\alpha(t)}u(t)\Big|_{t=\varphi^{-1}(\tau)}$, $t = \varphi^{-1}(\tau)$ — функция, обратная к функции $\tau = \varphi(t) = \int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}$.

Для преобразования F_α справедлив аналог равенства Парсеваля

$$\|F_\alpha[u](\eta)\|_{L_2(R^1)} = \sqrt{2\pi} \|u\|_{L_2(R^1_+)} .$$

Это равенство позволяет расширить преобразование (1) до непрерывного преобразования, осуществляющего гомеоморфизм пространств $L_2(R^1)$ и $L_2(R^1_+)$, а также рассмотреть это преобразование на некоторых классах обобщенных функций. Для расширенного таким образом преобразования F_α сохраним старое обозначение. Обозначим через F_α^{-1} обратное к F_α преобразование, отображающее $L_2(R^1)$ на $L_2(R^1_+)$. Это преобразование можно записать в виде

$$F_\alpha^{-1}[w(\eta)](t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}} F^{-1}_{\eta\to\tau}[w(\eta)]\Bigg|_{\tau=\varphi(t)} .$$

Можно показать, что на функциях $u(t) \in C_0^\infty(\bar{R}^1_+)$ выполняются соотношения

$$F_\alpha[D^j_{\alpha,t}u](\eta) = \eta^j F_\alpha[u](\eta),\ j = 1, 2, ...,$$

где

$$D_{\alpha,t} = \frac{1}{i}\sqrt{\alpha(t)}\partial_t\sqrt{\alpha(t)},\quad \partial_t = \frac{\partial}{\partial t}.$$

Определение 1. Пространство $H_{s,\alpha}(R^n_+)$ (s — действительное число) состоит из всех функций $v(x,t) \in L_2(R^n_+)$, для которых конечна норма

$$\|v\|^2_{s,\alpha} = \int\limits_{R^n} (1 + |\xi|^2 + \eta^2)^s \left|F_\alpha F_{x\to\xi}[v(x,t)]\right|^2 d\xi d\eta.$$

Определение 2. Пространство $H_{s,\alpha,q}(R^n_+)$ ($s \geqslant 0$, $q > 1$) состоит из всех функций $v(x,t) \in H_{s,\alpha}(R^n_+)$, для которых конечна норма

$$\|v\|_{s,\alpha,q} = \{\sum_{l=0}^{[\frac{s}{q}]} \left\|F^{-1}_{\xi\to x}F^{-1}_\alpha[(1 + |\xi|^2 + \eta^2)^{\frac{s-ql}{2}} F_\alpha F_{x\to\xi}[\partial^l_t v]]\right\|^2_{L_2(R^+_n)}\}^{\frac{1}{2}}.$$

Здесь $[\frac{s}{q}]$ — целая часть числа $\frac{s}{q}$.

Пусть выполнено следующее условие.

Условие 1. Существует число $\nu \in$ (0,1] такое, что $|\alpha'(t)\alpha^{-\nu}(t)| \leqslant c < \infty$ при всех $t \in [0, +\infty)$. Кроме того, $\alpha(t) \in C^{s_1}[0, +\infty)$ для некоторого $s_1 \geqslant 2N - |\sigma|$, где $N \geqslant \max\limits_{0\leqslant p_1\leqslant l}\{2p_1 + \frac{l-p_1+\frac{3}{2}}{\nu} + 1,\ \sigma + 1,\ \sigma + \frac{l}{2}\}$, $l = 1,\ 2...,$ σ — некоторое действительное число.

Заметим, что указанное выше число ν существует, если $\alpha(+0) = \alpha'(+0) = 0$.

С помощью преобразования (1) и преобразования Фурье $F_{x\to\xi} = F_{x_1\to\xi_1}F_{x_2\to\xi_2}...F_{x_{n-1}\to\xi_{n-1}}$ определим весовой псевдодифференциальный оператор по формуле

$$P^{(\sigma)}(t, D_x, D_{\alpha,t})v(x,t) = F^{-1}_\alpha F^{-1}_{\xi\to x}[p(t,\xi,\eta)F_{x\to\xi}F_\alpha[v(x,t)]].$$

Определение 3. Будем говорить, что символ $p(t,\xi,\eta)$ весового псевдодифференциального оператора $P^{(\sigma)}(t, D_x, D_{\alpha,t})$ принадлежит классу символов $S^\sigma_{\alpha,\rho,\delta}(\Omega)$, где $\Omega \subset \bar{R}^1_+$, $\sigma \in R^1, 0 \leqslant \delta < \rho \leqslant 1$, если функция $p(t, \xi, \eta)$ является бесконечно дифференцируемой функцией по переменной $t \in \Omega$ и по переменной $\eta \in R^1$. Причем, при всех $j = 0,\ 1,\ 2, ...,\ \ l = 0,\ 1,\ 2, ...$ справедливы оценки

$$|(\alpha(t)\partial_t)^j \partial_\eta^l \lambda(t, \xi, \eta)| \leqslant c_{jl}(1 + |\xi| + |\eta|)^{\sigma - \rho l + \delta j} \qquad (2)$$

с константами $c_{jl} > 0$, не зависящими от $\xi \in R^{n-1},\ \eta \in R^1$, $t \in K$, где $K \subset \Omega$ — произвольный отрезок.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть $q > 1$, σ — действительные числа, $v(x,\ t) \in H_{q+\sigma,\,\alpha,\,q}(R^n_+)$. Тогда при выполнение условия 1 и оценок (2) справедливо равенство*

$$\lim_{t \to +0} K^{(\sigma)}(D_x, D_{\alpha,t})v = \lim_{t \to +0} K^{(\sigma)}(D_x, 0)v(x,t) =$$
$$= \lim_{t \to +0} F^{-1}_{\xi \to x}[\lambda(\xi, 0)F_{x \to \xi}[v(x,t)]].$$

Аналогичные свойства для других классов псевдодифференциальных операторов доказаны в [1]–[8].

Литература

1. Баев А.Д. Вырождающиеся эллиптические уравнения высокого порядка и связанные с ними псевдодифференциальные операторы / А.Д. Баев // Доклады Академии наук. — 1982. — Т. 265, № 5. — С. 1044–1046.

2. Баев А.Д. Об общих краевых задачах в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / А.Д. Баев // Доклады Академии наук. — 2008. — Т. 422, № 6. — С. 727–728.

3. Баев А.Д. Априорные оценки и существование решений краевых задач в полупространстве для одного класса вырождающихся псевдодифференциальных уравнений / А.Д. Баев, П.В. Садчиков // Вестник ВГУ. Сер. : Физика. Математика. — 2010. — № 1. — С. 162–168.

4. Баев А.Д. О некоторых свойствах одного класса псевдодифференциальных операторов с вырождением / А.Д. Баев, П.А. Кобылинский // Вестник ВГУ. Сер. : Физика. Математика. — 2014. — № 2. — С. 66–73.

5. Баев А.Д. О свойствах коммутации одного класса вырождающихся псевдодифференциальных операторов / А.Д. Баев, П.А. Кобылинский // Вестник ВГУ. Сер. : Физика. Математика. — 2014. — № 4. — С. 102–108.

6. Баев А.Д. О некоторых свойствах одного класса вырождающихся псевдодифференциальных операторов / А.Д. Баев, П.А. Кобылинский // Доклады Академии наук. — 2015. — Т. 460, № 2. — С. 133–135.

7. Баев А.Д. Теоремы об ограниченности и композиции для одного класса весовых псевдодифференциальных операторов / А.Д. Баев, Р.А. Ковалевский // Вестник ВГУ. Сер. : Физика. Математика. — 2014. — № 1. — С. 39–49.

8. Баев А.Д. О некоторых краевых задачах для псевдодифференциальных уравнений с вырождением / А.Д. Баев, П.А. Кобылинский // Доклады Академии наук. — 2016. — Т. 466, № 4. — С. 385–388.

ТЕОРЕМА О КОМПОЗИЦИИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ВЫРОЖДЕНИЕМ[1]

А.Д. Баев, С.А. Чечина, М.Б. Давыдова, А.А. Бабайцев, В.Д. Харченко (Воронеж, ВГУ)

Рассмотрим достаточно гладкую функцию $\alpha(t)$, $t \in R^1_+$, для которой $\alpha(+0) = \alpha'(+0) = 0$, $\alpha(t) > 0$ при $t > 0$, $\alpha(t) = \text{const}$ для $t \geqslant d$ для некоторого $d > 0$.

Рассмотрим функциях $u(t) \in C_0^\infty(R^1_+)$ интегральное преобразование, определенное формулой

$$F_\alpha[u(t)](\eta) = \int\limits_0^{+\infty} u(t) \exp(i\eta \int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}) \frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}}, \qquad (1)$$

Это преобразование было введено в [1]. В [1] показано, что преобразование F_α связано с преобразованием Фурье

$$F_{\tau\to\eta}[u] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)\exp(i\eta\tau)d\tau, \quad \eta \in R^1$$

следующим равенством $F_\alpha[u(t)](\eta) = F_{\tau\to\eta}[u_\alpha(\tau)]$, здесь $u_\alpha(\tau) = \sqrt{\alpha(t)}u(t)\Big|_{t=\varphi^{-1}(\tau)}$, $t = \varphi^{-1}(\tau)$ — функция, обратная к функции

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (проект 14.Z50.31.0037).

$\tau = \varphi(t) = \int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}$. В [1] и [2] показано, что преобразование F_α может быть продолжено до преобразования, осуществляющего взаимно однозначное и взаимно непрерывное преобразование пространств $L_2(R^1_+)$ и $L_2(R^1)$, а также может быть рассмотрено на некоторых классах обобщенных функций.

Обозначим через F_α^{-1} обратное к F_α преобразование, которое можно записать в виде $F_\alpha^{-1}[w(\eta)](t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}} F^{-1}_{\eta\to\tau}[w(\eta)]\Big|_{\tau=\varphi(t)}$, где $F^{-1}_{\eta\to\tau}$ — обратное преобразование Фурье. Можно показать, что на функциях $u(t) \in C_0^\infty(\bar{R}^1_+)$ выполняются соотношения $F_\alpha[D^j_{\alpha,t}u](\eta) = \eta^j F_\alpha[u](\eta)$, $j = 1, 2, ...$, где $D_{\alpha,t} = \frac{1}{i}\sqrt{\alpha(t)}\partial_t\sqrt{\alpha(t)}$, $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$.

С помощью преобразования (1) и преобразования Фурье $F_{x\to\xi} = F_{x_1\to\xi_1}F_{x_2\to\xi_2}...F_{x_{n-1}\to\xi_{n-1}}$ определим весовой псевдодифференциальный $K(p,t,D_x,D_{\alpha,t})$ оператор по формуле $K(p,t,D_x,D_{\alpha,t})v(x,t) = F^{-1}_{\xi\to x}F^{-1}_\alpha[\lambda(p,t,\xi,\eta)F_\alpha F_{x\to\xi}[v(x,t)]]$, где символ $\lambda(p,t,\xi,\eta)$ есть бесконечно дифференцируемая функция по совокупности переменных, растущая по переменным ξ, η не быстрее некоторого многочлена.

Определение 1. Будем говорить, что символ $\lambda(p,y,\xi,\eta)$ весового псевдодифференциального оператора $K^{(\sigma)}(p,y,D_x,D_{\alpha,y})$ принадлежит классу символов $S^{\sigma,\rho}_{\alpha,p}(\Omega)$, где $\Omega \subset \bar{R}^1_+$, $\sigma \in R^1, p \in Q = \{p \in C,\ |\arg p| < \frac{\pi}{2},\ |p| > 0\}$, если функция $\lambda(p,y,\xi,\eta)$ является бесконечно дифференцируемой функцией по переменной $y \in \Omega$ и по переменной $\eta \in R^1$. Причем, при всех $j = 0,\ 1,\ 2, ...,\quad l = 0,\ 1,\ 2, ...$ справедливы оценки

$$|(\alpha(y)\partial_y)^j\partial^l_\eta\lambda(p,y,\xi,\eta)| \leqslant c_{jl}(|p|^2 + |\xi| + |\eta|)^{\sigma-\rho l}$$

с константами $c_{jl} > 0$, не зависящими от $p \in Q$, $\xi \in R^{n-1}$, $\eta \in R^1$, $y \in K$, где $K \subset \Omega$ — произвольный отрезок. Здесь σ, $\rho \in [0;1)$ — действительное число.

Определение 2. Пространство $H_{s,\alpha}(R^n_+)$ (s — действительное число) состоит из всех функций $v(x,t) \in L_2(R^n_+)$, для которых конечна норма

$$\|v\|^2_{s,\alpha} = \int\limits_{R^n} (|p|^2 + |\xi|^2 + \eta^2)^s \left|F_\alpha F_{x\to\xi}[v(x,t)]\right|^2 d\xi d\eta \quad .$$

Определение 3. Пространство $H_{s,\alpha,q}(R^n_+)$ $(s \geqslant 0,\ q > 1)$ состоит из всех функций $v(x,t) \in H_{s,\alpha}(R^n_+)$, для которых конечна норма

$$\|v\|_{s,\alpha,q} =$$

$$= \{\sum_{l=0}^{[\frac{s}{q}]} \left\| F^{-1}_{\xi\to x} F^{-1}_{\alpha}[(|p|^2 + |\xi|^2 + \eta^2)^{\frac{s-ql}{2}} F_\alpha F_{x\to\xi}[\partial^l_t v]] \right\|^2_{L_2(R^n_+)}\}^{\frac{1}{2}}.$$

Здесь $[\frac{s}{q}]$ — целая часть числа $\frac{s}{q}$.

Пусть выполнено следующее условие.

Условие 1. Существует число $\nu \in$ (0,1] такое, что $|\alpha'(t)\alpha^{-\nu}(t)| \leqslant c < \infty$ при всех $t \in [0,+\infty)$. Кроме того, $\alpha(t) \in C^{s_1}[0,+\infty)$ для некоторого $s_1 \geqslant 2N - |\sigma|$, где $N \geqslant \max\limits_{0\leqslant p_1\leqslant l}\{2p_1 + \frac{l-p_1+\frac{3}{2}}{\nu} + 1,\ \sigma+1,\ \sigma+\frac{l}{2}\}$, $l = 1,\ 2...$, σ — некоторое действительное число.

Заметим, что указанное выше число ν существует, если $\alpha(+0) = \alpha'(+0) = 0$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $G(p,y,D_x,D_{\alpha,t})$ *и* $Q(p,y,D_x,D_{\alpha,y})$ *— весовые псевдодифференциальные операторы с символами* $g(p,y,\xi,\eta)$, $q(p,y,\xi,\eta)$, *принадлежащими классам* $S^{m_1}_{\alpha,p}(\Omega)$, $S^{m_2}_{\alpha,p}(\Omega)$ *(*m_1,m_2*-действительные числа),* $p \in Q = \{p \in C,\ |\arg p| < \frac{\pi}{2},\ |p| > 0\}$. *Тогда для любого* $N \geqslant 0$ *существует* $N_1 > 0$ *и такой символ* $T_{N_1}(p,y,\xi,\eta) \in S^{-N}_{\alpha,p}(\Omega)$, *что справедливо равенство*

$$G(p,y,D_x,D_{\alpha,t})Q(p,y,D_x,D_{\alpha,t}) - \sum_{j=1}^{N_1-1} R_j(p,y,D_x,D_{\alpha,t}) =$$
$$= T_{N_1}(p,y,D_x,D_{\alpha,t}), \quad (2)$$

где $T_{N_1}(p,y,D_x,D_{\alpha,t})$ *— весовой псевдодифференциальный оператор с символом* $T_{N_1}(p,y,\xi,\eta)$, *а* $R_j(p,y,D_x,D_{\alpha,y})$ *— весовой псевдодифференциальный оператор с символом*

$$r_j(p,y,\xi,\eta) = \frac{1}{j!}\partial^j_\eta g(p,y,\xi,\eta)\cdot(\alpha(y)\partial_y)^j q(p,y,\xi,\eta). \quad (3)$$

При $\rho = 1$ теорема, аналогичная теореме 1, доказана в [3]. Некоторые другие свойства весовых псевдодифференциальных операторов с символом из класса $S^m_{\alpha,\rho}(\Omega)$ доказаны в [4]–[8].

Литература

1. Баев А.Д. Вырождающиеся эллиптические уравнения высокого порядка и связанные с ними псевдодифференциальные операторы / А.Д. Баев // Доклады Академии наук. — 1982. — Т. 265, № 5. — С. 1044–1046.

2. Баев А.Д. Об общих краевых задачах в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / А.Д. Баев // Доклады Академии наук. — 2008. — Т. 422, № 6. — С. 727–728.

3. Баев А.Д. Априорные оценки и существование решений краевых задач в полупространстве для одного класса вырождающихся псевдодифференциальных уравнений / А.Д. Баев, П.В. Садчиков // Вестник ВГУ. Сер. : Физика. Математика. — 2010. — № 1. — С. 162–168.

4. Баев А.Д. О некоторых свойствах одного класса псевдодифференциальных операторов с вырождением / А.Д. Баев, П.А. Кобылинский // Вестник ВГУ. Сер. : Физика. Математика. — 2014. — № 2. — С. 66–73.

5. Баев А.Д. О свойствах коммутации одного класса вырождающихся псевдодифференциальных операторов / А.Д. Баев, П.А. Кобылинский // Вестник ВГУ. Сер. : Физика. Математика. — 2014. — № 4. — С. 102–108.

6. Баев А.Д. О некоторых свойствах одного класса вырождающихся псевдодифференциальных операторов / А.Д. Баев, П.А. Кобылинский // Доклады Академии наук. — 2015. — Т. 460, № 2. — С. 133–135.

7. Баев А.Д. Теоремы об ограниченности и композиции для одного класса весовых псевдодифференциальных операторов / А.Д. Баев, Р.А. Ковалевский // Вестник ВГУ. Сер. : Физика. Математика. — 2014. — № 1. — С. 39–49.

8. Баев А.Д. О некоторых краевых задачах для псевдодифференциальных уравнений с вырождением / А.Д. Баев, П.А. Кобылинский // Доклады Академии наук. — 2016. — Т. 466, № 4. — С. 385–388.

О ПРЕОБРАЗОВАНИИ ПОДОБИЯ ОДНОГО КЛАССА ОПЕРАТОРОВ

А.Г. Баскаков, И.А. Криштал, Н.Б. Ускова
(Воронеж, ВГУ, ДеКалб, Университет Северного Иллинойса,
Воронеж, ВГТУ)
anatbaskakov@yandex.ru, krishtal@math.niu.edu, nat-uskova@mail.ru

Пусть $\mathcal{H} = L_2^n([0,\omega],\mathbb{C})$, $1 \leqslant n \leqslant l$, $n, l \in \mathbb{N}$, — гильбертово пространство интегрируемых с квадратом на отрезке $[0,\omega]$ комплексных функций со скалярным произведением $(x,y) = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega \sum_{i=1}^l x_i(t)\cdot \overline{y_i(t)}\,dt$ и нормой, порождаемой этим скалярным произведением. Рассматривается применение метода подобных операторов к исследованию спектральных свойств возмущенного оператора $A - B$, где оператор $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ задается формулой $(Ax)(t) = x'(t)$, и $D(A)$ определяется периодическими краевыми условиями $x(0) = x(\omega)$. Оператор B принадлежит двустороннему идеалу операторов Гильберта-Шмидта $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Дифференциальные операторы первого порядка с инволюцией и оператор Дирака сводятся к рассматриваемому типу операторов (см. [1], [2]). Строятся две различные допустимые тройки метода подобных операторов для невозмущенного оператора A. Первая использует в качестве пространства допустимых возмущений идеал $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Вторая — подпространство из $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ с фиксированной скоростью убывания элементов матрицы возмущения B по строкам и столбцам. Доказаны теоремы, при различных условиях на возмущение B, о подобии оператора $A - B$ оператору диагонального (или блочно-диагонального) вида. Полученные теоремы позволяют оценивать различные спектральные характеристики оператора $A - B$ через спектральные характеристики невозмущенного оператора A.

Литература

1. Baskakov A.G. Linear differential operator with an involution as a generator of an operator group / A.G. Baskakov, I.A. Krishtal, N.B. Uskova // Operators and Matrices. — 2018. — V. 12, №. 3. — P. 723–756.

2. Baskakov A.G. Spectral analysis of a differential operator with an involution / A.G. Baskakov, I.A. Krishtal, E.Yu. Romanova // J. Evolut. Equat. — 2017. — V. 17. — P. 669–684.

ОБ ИНТЕРПОЛЯЦИИ НА МНОЖЕСТВАХ КАРЛЕСОНА В КЛАССЕ И.И. ПРИВАЛОВА[1]

В.А. Беднаж, Е.Г. Родикова (Брянск, БГУ)
vera.bednazh@mail.ru, evheny@yandex.ru

Пусть $\mathbb{C}$ — комплексная плоскость, D — единичный круг на $\mathbb{C}$, $H(D)$ — множество всех функций, аналитических в D. При всех $0 < q < 1$ определим класс И.И. Привалова Π_q (см. [1]):

$$\Pi_q = \left\{ f \in H(D) : \sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\ln^+ |f(re^{i\theta})|\right)^q d\theta < +\infty \right\}.$$

В работе исследуется следующий вопрос интерполяции в классах Привалова. Дана последовательность точек $\{z_k\}$ в единичном круге и некоторая последовательность $\{w_k\}$. При каких условиях, налагаемых на рост $\{z_k\}$ и распределение точек w_k можно построить функцию из класса Π_q, такую что $f(z_k) = w_k$ при всех $k = 1, 2, ...$ Отметим, что аналогичная задача в классах $\Pi_q (1 < q < +\infty)$ была решена в работе [2].

Последовательность комплексных чисел $\{z_n\}$, удовлетворяющая условию Бляшке:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (1 - |z_n|) < +\infty,$$

называется равномерно разделенной, если существует $0 < \delta < 1$, такое что

$$\prod_{k \neq n} \left| \frac{z_k - z_n}{1 - \overline{z}_k z_n} \right| \geqslant \delta, \, \forall k \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Условие (1) также называют условием Карлесона. Для заданной последовательности $\{z_n\} \subset D$ и фиксированного $0 < q < 1$ обозначим через $l^q(z_n)$ пространство последовательностей $\{w_n\} \subset D$, для которых

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (1 - |z_n|)(\ln^+ |w_n|)^q < +\infty.$$

Справедлива

---

[1] Второй автор поддержан Российским фондом фундаментальных исследований (проект 18-31-00180).

Теорема. *Если последовательность $\{z_n\} \subset D$ является равномерно разделенной, т.е. удовлетворяет условию (1), то для любой последовательности $\{w_n\} \subset l^q(z_n)$ найдется функция $f \in \Pi_q$, решающая интерполяционную задачу $f(z_n) = w_n$, $n = 1, 2, ...$*

При доказательстве этого результата используется теорема Карлесона об интерполяции в классах ограниченных аналитических функций (см. [3]) и аналог хорошо известной теоремы Шапиро-Шилдса об интерполяции в классах Харди $H^p(0 < p < 1)$ (см. [4]).

Используя оценку функции из класса И.И. Привалова:

$$\ln^+ M(r,f) = o\left((1-r)^{-1/q}\right), r \to 1-0,$$

где $M(r,f) = \max\limits_{|z|=r} |f(z)|$, установленную в теореме 1 (см. [5]), можно также доказать, что *найдутся равномерно разделенная последовательность узлов интерполяции $\{z_n\} \subset D$ и последовательность $\{w_n\}$, удовлетворяющая условию:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (1-|z_n|)(\ln^+ |w_n|)^{q-\varepsilon} < +\infty, \ 0 < \varepsilon < q < 1,$$

для которых в классе Π_q не существует функции, которая решает задачу интерполяции: $f(z_k) = w_k$, $k = 1, 2, ...$

Литература

1. Привалов И.И. Граничные свойства однозначных аналитических функций / И.И. Привалов. — М. : изд. МГУ, 1941. — 206 с.

2. Mestrovic R. Interpolation in the spaces $N^p(1 < p < +\infty)$ / R. Mestrovic, J. Susic // Filomat. — 2013. — 27:2.— P. 291–299.

3. Carleson L. An interpolation problem for bounded analytic functions / L. Carleson // Amer. J. Math. — 1958. — V. 80. — P. 921–930.

4. Кабайла В. Об интерполяции функций в классе H^δ / В. Кабайла // УМН. — 1958. — 13:1(79). — С. 181-–188.

5. Родикова Е.Г. О некоторых оценках в классе И.И. Привалова в круге / Е.Г. Родикова // Современные проблемы теории функций и их приложения. Материалы 19-й Международной Саратовской зимней школы. — Саратов : СГУ, 2018. — С. 270–272.

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ[1]

Ю.Е. Безмельницына, С.В. Корнев (Воронеж, ВГПУ)
kornev_vrn@rambler.ru; bezmelnicyna@inbox.ru

Для $\tau > 0$ обозначим символом $\mathcal{C}$ пространство $C([-\tau, 0]; \mathbb{R}^n)$ непрерывных функций $x : [-\tau, 0] \to \mathbb{R}^n$.

Для функции $\psi \in \mathcal{C}$ символом D_ψ обозначим множество всех непрерывных функций $x : [-\tau, +\infty) \to \mathbb{R}^n$ таких, что $x(t) = \psi(t), \ t \in [-\tau, 0]$, и сужение x на $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ является абсолютно непрерывным. Для функции $x \in D_\psi$ и $t \geqslant 0$ символом $x_t \in \mathcal{C}$ обозначается функция, заданная как $x_t(\theta) = x(t + \theta)$, $\theta \in [-\tau, 0]$.

Пусть (Ω, Σ, μ) – полное вероятностное пространство.

При исследовании асимптотического поведения решений задачи Коши для функционально-дифференциального уравнения вида:

$$x'(\omega, t) = f(\omega, t, x_t) \quad \text{п.в. } t \in \mathbb{R}_+, \tag{1}$$

$$x(\omega, t) = \psi(\omega, t), \quad t \in [-\tau, 0], \tag{2}$$

используется интегральная направляющая функция в предположении, что $f : \Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathcal{C} \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условиям типа Каратеодори и условию подлинейного роста (см., например, [1, 2]).

Теорема. *Пусть* $V : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *– удовлетворяющая условию коэрцитивности случайная интегральная направляющая функция уравнения (1). Тогда каждое решение задачи Коши (1), (2) удовлетворяет оценке* $\|x(t)\| \leqslant k \cdot \frac{1}{g(t)}, t \in \mathbb{R}_+$, *где* $k > 0$, $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *непрерывно-дифференцируемая функция,* $inf\{g(t), t \in \mathbb{R}\} \geqslant 1$.

Литература

1. Kornev S. On some developments of the method of integral guiding functions / S. Kornev, V. Obukhovskii // Functional Differential Equations. — 2005. — V. 12, № 3–4. — P. 303–310.

2. Корнев С.В. О локализации метода направляющих функций в задаче о периодических решениях дифференциальных включений / С.В. Корнев, В.В. Обуховский // Известия ВУЗов. Математика. — 2009, № 5. — С. 23–32.

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект № 1.3464.2017/4.6) и РФФИ (проект № 17-51-52022)

О ВЛИЯНИИ ЛИНЕЙНОГО ВДУВА ПРИ ПОСТОЯННОМ ТЕМПЕРАТУРНОМ ФАКТОРЕ НА ОБЛАСТЬ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИОНАЛОВ ГИПЕРЗВУКОВОЙ АЭРОДИНАМИКИ

Г.Г. Бильченко (мл.) , Н.Г. Бильченко
(Казань, КНИТУ-КАИ)
ggbil2@gmail.com , bilchnat@gmail.com

В данной работе, продолжающей исследования свойств математической модели ламинарного пограничного слоя (ЛПС) электропроводящего газа на проницаемых цилиндрических и сферических поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов (ГЛА) [1–6], рассматривается влияние следующего сочетания управляющих воздействий: **линейного** вдува и **постоянных** температурного фактора и магнитного поля на интегральные характеристики тепломассообмена и трения и суммарную мощность системы, обеспечивающей вдув.

1. Постановка задачи. Рассмотрим прямую задачу (1) [6]:

$$(m, \tau_w, s) \to (q, f, \eta; Q, F, N)\,. \tag{1}$$

По заданным управлениям: $m(x)$ – *вдуву* в ЛПС, где $x \in X = [0;1]$, а ось x направлена вдоль контура тела; $\tau_w(x) = T_w(x)/T_{e_0}$ – *температурному фактору*, где $T_w(x)$ – температура стенки, а T_{e_0} – температура в точке торможения (ТТ) $x_0 = 0$ потока; $s(x) = \sigma B_0^2(x)$ – *магнитному полю* требуется рассчитать параметры $\theta_0\,(x; m, \tau_w, s)$, $\theta_1\,(\ldots)$, $\omega_0\,(\ldots)$, $\omega_1\,(\ldots)$ математической модели ЛПС [1] для случаев обтекания боковой поверхности кругового цилиндра и поверхности сферического носка. Для определения параметров θ_0, …, ω_1 применяется объединённая аппроксимирующая система обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) (5)–(8) [6], полученная с помощью метода обобщённых интегральных соотношений А. А. Дородницына [7], с начальными условиями, полученными из объединённой нелинейной алгебраической системы (10)–(13) [6]. После этого необходимо определить: локальный тепловой поток $q\,(x; m, \tau_w, s)$; локальное напряжение трения $f\,(x; m, \tau_w, s)$; локальную мощность системы, обеспечивающей вдув $\eta\,(x; m, \tau_w, s)$; **интегральный тепловой поток** (2) [6]

$$Q\,(m, \tau_w, s) = \int_0^{x_k} (2\pi r)^{k_4} \left(\frac{\lambda}{C_p} \frac{\partial H}{\partial y} \right)_{y=0} \cdot dx\,; \tag{2}$$

суммарную силу трения Ньютона (3) [6]

$$F\,(m,\tau_w,s)=\int_0^{x_k}(2\pi r)^{k_4}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0}\cdot dx\,; \tag{3}$$

вычисляемую с использованием фильтрационного закона Дарси **суммарную мощность** (4) [6] системы, обеспечивающей вдув,

$$N\,(m,\tau_w,s)=\int_0^{x_k}(2\pi r)^{k_4}av_w^2(x)\cdot dx\,. \tag{4}$$

В (2)–(4) коэффициент $k_4=0$ для боковой поверхности цилиндра, $k_4=1$ для поверхности сферического носка с радиусом $r(x)$.

2. Вычислительные эксперименты. Пусть фиксированы значения *неизменяемых параметров*:

$$\text{число Маха}\quad M_\infty\in[10;40]\,, \tag{5}$$

$$\text{высота полёта}\quad H\in[10;30]\;[\text{км}]\,, \tag{6}$$

$$\text{радиус тела}\quad R\in[0{,}1;1]\;[\text{м}]\,. \tag{7}$$

Вычислительные эксперименты для удобства сравнения с [2–6] выполнены для воздуха в атмосфере Земли при $H=10$ [км], $M_\infty=10$, $R=0{,}1$ [м]. Пусть диапазоны изменения *управляющих параметров* ограничены:

$$m\in M^c=[0;1]\,, \tag{8}$$

$$\tau_w\in T^c=[0{,}15;0{,}9]\,, \tag{9}$$

$$s\in S^c=[0;5\cdot 10^4]\;[\text{Тл}/(\text{Ом}\cdot\text{м})]\,. \tag{10}$$

Для **линейного** закона вдува

$$m(x)=m(x;m_0,m_1)=m_0\cdot(1-x)+m_1\cdot x\quad\text{при}\quad x\in X\,, \tag{11}$$

где m_0, $m_1\in M^c$, очевидно, что

$$m'(x)=\frac{dm}{dx}=m_1-m_0\in[-1;+1]\,. \tag{12}$$

Порядок проведения вычислительных экспериментов и анализа их результатов повторяет схему, использованную (для случая сочетания постоянных управляющих воздействий) в [6]. Графики локальных зависимостей $q(x)$, $f(x)$, $\eta(x)$ представлены в [8].

Исследование влияния другого сочетания управляющих воздействий: **линейного** температурного фактора и **постоянных** вдува и магнитного поля на интегральные характеристики тепломассообмена и трения и суммарную мощность системы, обеспечивающей вдув, проводится в работе [9].

Полученные результаты вычислительных экспериментов могут быть использованы в качестве моделей ограничений (33)–(35) [10] и (45_1)–(45_r) [11] в задачах синтеза эффективного управления, как на всём участке, так и на его фрагментах.

Литература

1. Бильченко Н. Г. Метод А. А. Дородницына в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях в ламинарном пограничном слое электропроводящего газа / Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. — 2016. — № 1. — С. 5–14.

2. Бильченко Н. Г. Вычислительные эксперименты в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях при гиперзвуковых режимах полёта / Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика. Математика. — 2015. — № 1. — С. 83–94.

3. Бильченко Н. Г. Вычислительные эксперименты в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях тел вращения при гиперзвуковых режимах полёта / Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Системный анализ и информационные технологии. — 2015. — № 1. — С. 5–8.

4. Бильченко Н. Г. Вычислительные эксперименты в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях при гиперзвуковых режимах полёта: сравнительный анализ применения “простых” законов вдува / Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж гос. ун-та. Сер. : Физика. Математика. — 2015. — № 1. — С. 95–102.

5. Бильченко Н. Г. Вычислительные эксперименты в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях в ламинарном пограничном слое электропроводящего газа / Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Системный анализ и информационные технологии. — 2016. — № 3. — С. 5–11.

6. Бильченко Г. Г. Анализ влияния постоянных управляющих воздействий на область значений функционалов гиперзвуковой аэродинамики / Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко // Вестник Воро-

неж. гос. ун-та. Сер. : Системный анализ и информационные технологии. — 2018. — № 2. — С. 5–13.

7. Дородницын А. А. Об одном методе решения уравнений ламинарного пограничного слоя / А. А. Дородницын // Прикладная математика и техническая физика. — 1960. — № 3. — С. 111–118.

8. Бильченко Г. Г. О влиянии линейного вдува при постоянном температурном факторе на локальные характеристики тепломассообмена и трения на проницаемых поверхностях ГЛА / Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко // «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики»: сборник трудов Международной научно-технической конференции, Воронеж, 17–19 декабря 2018 г. — Воронеж: Изд-во «Научно-исследовательские публикации», 2018.

9. Бильченко Г. Г. О влиянии линейного температурного фактора при постоянном вдуве на область значений функционалов гиперзвуковой аэродинамики / Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко // Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы Междунар. конф. Воронеж. зимн. мат. школа (28 января –2 февраля 2019 г.). — Воронеж : Изд. дом ВГУ, 2019.

10. Бильченко Г. Г. Обратные задачи тепломассообмена на проницаемых поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов. IV. Классификация задач на всём участке управления / Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Системный анализ и информационные технологии. — 2018. — № 3. — С. 5–12.

11. Бильченко Г. Г. Обратные задачи тепломассообмена на проницаемых поверхностях гиперзвуковых летательных аппаратов. V. Смешанные задачи на фрагментах участка управления / Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Системный анализ и информационные технологии. — 2018. — № 3. — С. 13–22.

О ВЛИЯНИИ ЛИНЕЙНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ФАКТОРА ПРИ ПОСТОЯННОМ ВДУВЕ НА ОБЛАСТЬ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИОНАЛОВ ГИПЕРЗВУКОВОЙ АЭРОДИНАМИКИ

Г.Г. Бильченко (мл.), Н.Г. Бильченко
(Казань, КНИТУ-КАИ)
ggbil2@gmail.com , bilchnat@gmail.com

В данной работе, сохраняющей все обозначения и сокращения работы [1] и продолжающей исследования свойств математической модели ЛПС электропроводящего газа на проницаемых цилиндрических и сферических поверхностях ГЛА [2–7], рассматривается влияние следующего сочетания управляющих воздействий: **линейного** температурного фактора и **постоянных** вдува и магнитного поля на интегральные характеристики тепломассообмена и трения и суммарную мощность системы, обеспечивающей вдув.

1. Постановка задачи. Аналогично [1] в прямой задаче (1) [1, 7] в случае **линейного** закона изменения температурного фактора

$$\tau_w(x) = \tau(x; \tau_0, \tau_1) = \tau_0 \cdot (1 - x) + \tau_1 \cdot x \quad \text{при} \quad x \in [0; 1]\,, \qquad (1)$$

где $\tau_0,\ \tau_1 \in T^c$ [1], требуется определить $Q\,(m, \tau_w, s)$, $F\,(m, \tau_w, s)$, $N\,(m, \tau_w, s)$ по (2)–(4) [1, 7]. Отметим, что уравнение (7) [7] в объединённой системе ОДУ (5)–(8) [7] в условиях (1) примет вид

$$\omega_0' = (1 - \tau_0 + (\tau_0 - \tau_1) \cdot x) \cdot \theta_0' + (\tau_0 - \tau_1) \cdot \theta_0\,. \qquad (2)$$

2. Вычислительные эксперименты. В условиях (5)–(10) из [1] вычислительные эксперименты проведены по схеме [7] для воздуха в атмосфере Земли при $H = 10$ [км], $M_\infty = 10$, $R = 0{,}1$ [м]. Графики локальных зависимостей $q(x)$, $f(x)$, $\eta(x)$ представлены в [8].

Литература

1. Бильченко Г. Г. О влиянии линейного вдува при постоянном температурном факторе на область значений функционалов гиперзвуковой аэродинамики / Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко // Современные методы теории функций и смежные проблемы : материалы Междунар. конф. Воронеж. зимн. мат. школа (28 янв–2 февр 2019 г.). — Воронеж : Изд. дом ВГУ, 2019.

2. Бильченко Н. Г. Метод А. А. Дородницына в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях в ламинарном пограничном слое электропроводящего газа /

Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Системный анализ и информационные технологии. — 2016. — № 1. — С. 5–14.

3. Бильченко Н. Г. Вычислительные эксперименты в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях при гиперзвуковых режимах полёта / Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика. Математика. — 2015. — № 1. — С. 83–94.

4. Бильченко Н. Г. Вычислительные эксперименты в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях тел вращения при гиперзвуковых режимах полёта / Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Системный анализ и информационные технологии. — 2015. — № 1. — С. 5–8.

5. Бильченко Н. Г. Вычислительные эксперименты в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях при гиперзвуковых режимах полёта: сравнительный анализ применения “простых” законов вдува / Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж гос. ун-та. Сер. : Физика. Математика. — 2015. — № 1. — С. 95–102.

6. Бильченко Н. Г. Вычислительные эксперименты в задачах оптимального управления тепломассообменом на проницаемых поверхностях в ламинарном пограничном слое электропроводящего газа / Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Системный анализ и информационные технологии. — 2016. — № 3. — С. 5–11.

7. Бильченко Г. Г. Анализ влияния постоянных управляющих воздействий на область значений функционалов гиперзвуковой аэродинамики / Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко // Вестник Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Системный анализ и информационные технологии. — 2018. — № 2. — С. 5–13.

8. Бильченко Г. Г. О влиянии линейного температурного фактора при постоянном вдуве на локальные характеристики тепломассообмена и трения на проницаемых поверхностях ГЛА / Г. Г. Бильченко, Н. Г. Бильченко // «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики»: Сборник трудов Международной научно-технической конференции, Воронеж, 17–19 декабря 2018 г. — Воронеж : Изд-во «Научно-исследовательские публикации», 2018.

О ДВИЖЕНИЯХ НОСИТЕЛЯ С ПОДВИЖНЫМ ГРУЗОМ ПО ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ С АНИЗОТРОПНЫМ ТРЕНИЕМ

Г.Г. Бильченко (ст.) (Казань, КНИТУ-КАИ)
ggbil40@gmail.com

1. Дифференциальные уравнения движения носителя. Данная работа является продолжением и развитием работ [1–13]. Рассматривается движение механической системы, состоящей из носителя и груза [1, 3]. Носитель, располагаясь всё время в горизонтальной плоскости, двигается поступательно по прямолинейной траектории. Носитель имеет прямолинейный канал, по которому может перемещаться груз. Ось канала располагается в вертикальной плоскости, проходящей через траекторию носителя, а сам канал располагается горизонтально. Силы сопротивления подстилающей плоскости моделируются силами сухого анизотропного кулонова трения. Асимметрия сил трения может быть вызвана, например, односторонним наклоном неровностей поверхностных слоёв подстилающей плоскости и носителя. Она наблюдается при скольжении твёрдых тел по направленно-армированным композитам. В [1–13] рассматривалась более простая модель изотропного трения.

Пусть закон движения груза в канале задан в виде

$$x_2(t) = \ell \cdot \sin(\omega t), \qquad \text{где} \qquad \ell = const\,, \quad \omega = const\,.$$

Тогда *дифференциальные уравнения движения носителя* (ДУДН) согласно [1, 3] будут следующими

$$\ddot{x} = \beta \cdot \sin(\omega t) - \gamma_+ \qquad \text{при} \qquad \dot{x} > 0\,; \tag{1}$$

$$\ddot{x} = \beta \cdot \sin(\omega t) + \gamma_- \qquad \text{при} \qquad \dot{x} < 0\,; \tag{2}$$

$$\ddot{x} = 0 \qquad \text{при} \qquad \dot{x} = 0\,, \tag{3}$$

где x — координата носителя; $\beta = \ell \cdot \omega^2 \cdot \dfrac{m}{m+M}$; M — масса носителя; m — масса груза; $\gamma_+ = g \cdot f_+$; $\gamma_- = g \cdot f_-$; f_+ и f_- — коэффициенты трения скольжения в движении, равные коэффициентам трения в покое для пары материалов «носитель — подстилающая горизонтальная плоскость», в положительном и отрицательном направлениях оси x, соответственно. Пусть для определённости

$$\gamma_- > \gamma_+\,. \tag{4}$$

Ставится задача об определении движения носителя из *состояния покоя*

$$\dot{x}(t_0) = 0\,,$$

где $t_0 = 0$, вызванного движением груза заданного вида.

2. Условия движения носителя из состояния покоя. *Движение носителя* (ДН) будет определено, если будет установлена последовательность временных интервалов интегрирования, на каждом из которых будет определено конкретное ДУДН из (1)–(3).

Необходимым и достаточным условием того, чтобы ДУДН (1) имело место в действительной динамике носителя, является неравенство

$$\beta > \gamma_+\,, \tag{5}$$

что позволяет ввести $\tau_+ = \dfrac{1}{\omega}\arcsin\dfrac{\gamma_+}{\beta}$.

Необходимым и достаточным условием для реализации ДУДН (2) в действительной динамике будет неравенство

$$\beta > \gamma_-\,, \tag{6}$$

при этом вводится $\tau_- = \dfrac{1}{\omega}\arcsin\dfrac{\gamma_-}{\beta}$.

Если

$$\beta \leqslant \gamma_+\,,$$

то носитель не может начать движение из состояния покоя.

Если же параметр β таков, что

$$\gamma_+ < \beta \leqslant \gamma_-\,, \tag{7}$$

то носитель может двигаться из состояния покоя в положительном направлении, т.е. совершает лишь *одностороннее движение* по типу $R1$ [3] при следующей регулярной последовательности чередования ДУДН (1)–(3):

$$R1:\quad (3);\underbrace{(1),(3)};\underbrace{(1),(3)};\underbrace{(1),(3)};\ldots\quad .$$

Если имеет место (6), **то** носитель из состояния покоя может совершать движения как в положительном, так и в отрицательном направлении оси x, т.е. может совершать *двусторонние движения*.

3. Установление типа движения носителя при возможных двусторонних движениях носителя. Пусть имеет место

(6). Вычислим

$$\int\limits_{\tau_+}^{\frac{T}{2}+\tau_-} \Big[\beta \cdot \sin(\omega t) - \gamma_+\Big] \cdot dt = \frac{1}{\omega} \cdot I_1\,;$$

$$-\int\limits_{\frac{T}{2}+\tau_-}^{T+\tau_+} \Big[\beta \cdot \sin(\omega t) + \gamma_-\Big] \cdot dt = \frac{1}{\omega} \cdot I_2\,,$$

где $T = 2\pi/\omega$, а в качестве *первого* и *второго определяющих выражений* выделены

$$I_1 = \sqrt{\beta^2 - \gamma_+^2} + \sqrt{\beta^2 - \gamma_-^2} - \gamma_+ \cdot \left[\pi + \arcsin\frac{\gamma_-}{\beta} - \arcsin\frac{\gamma_+}{\beta}\right]\,; \quad (8)$$

$$I_2 = \sqrt{\beta^2 - \gamma_+^2} + \sqrt{\beta^2 - \gamma_-^2} - \gamma_- \cdot \left[\pi + \arcsin\frac{\gamma_+}{\beta} - \arcsin\frac{\gamma_-}{\beta}\right]\,. \quad (9)$$

Из системы уравнений

$$\begin{cases} \displaystyle\int\limits_{\tau_+}^{\frac{T}{2}+\theta} \Big[\beta \cdot \sin(\omega t) - \gamma_+\Big] \cdot dt = 0\,; \\ \displaystyle\int\limits_{\frac{T}{2}+\theta}^{T+\tau_+} \Big[\beta \cdot \sin(\omega t) + \gamma_-\Big] \cdot dt = 0\,, \end{cases}$$

которая приводится к виду

$$\begin{cases} \beta \cdot \cos(\omega\theta) + \sqrt{\beta^2 - \gamma_+^2} - \gamma_+ \cdot \Big(\pi + \omega\theta - \omega\tau_+\Big) = 0\,; \\ \beta \cdot \cos(\omega\theta) + \sqrt{\beta^2 - \gamma_+^2} - \gamma_- \cdot \Big(\pi + \omega\tau_+ - \omega\theta\Big) = 0\,, \end{cases}$$

где $\theta > \tau_-$, выделяется *третье определяющее выражение*

$$I_3 = \beta \cdot \cos\left[\pi \cdot \frac{f_- - f_+}{f_- + f_+} + \arcsin\frac{\gamma_+}{\beta}\right] + \sqrt{\beta^2 - \gamma_+^2} - \pi \cdot g \cdot \frac{2 \cdot f_- \cdot f_+}{f_- + f_+}\,. \quad (10)$$

Определяющие выражения (8), (9) и (10) позволяют представить следующий алгоритм установления типа ДН из состояния покоя для случая двусторонних движений:

Шаг 1. Вычислить значение I_1.
Шаг 1.1. Если $I_1 < 0$, **то** ДН происходит по типу $R2$, КТЗ.
Шаг 1.2. Если $I_1 = 0$, **то** ДН имеет тип $R3$, КТЗ.
Шаг 1.3. Если $I_1 > 0$, **то** перейти к Шагу 2.
Шаг 2. Вычислить значение I_2.
Шаг 2.1. Если $I_2 < 0$, **то** ДН имеет тип $R3$, КТЗ.
Шаг 2.2. Если $I_2 = 0$, **то** ДН имеет тип $R3$, КТЗ.
Шаг 2.3. Если $I_2 > 0$, **то** перейти к Шагу 3.
Шаг 3. Вычислить значение I_3.
Шаг 3.1. Если $I_3 < 0$, **то** ДН имеет тип $R3$, КТЗ.
Шаг 3.2. Если $I_3 = 0$, **то** ДН имеет тип $R5$, КТЗ.
Шаг 3.3. Если $I_3 > 0$, **то** ДН имеет тип NR, КТЗ.

Сокращение КТЗ означает, что «классификация типа движения носителя завершена».

ДН типов $R2$, $R3$, $R5$ [1, 3] реализуются в динамике носителя в виде следующих регулярных последовательностей чередования ДУДН (1)–(3):

для $R2$: $(3);\underbrace{(1),(3),(2),(3)};\underbrace{(1),(3),(2),(3)};\underbrace{(1),(3),(2),(3)};\dots\quad;$

для $R3$: $(3);\underbrace{(1),(2),(3)};\underbrace{(1),(2),(3)};\underbrace{(1),(2),(3)};\dots\quad;$

для $R5$: $(3);\underbrace{(1),(2)};\underbrace{(1),(2)};\underbrace{(1),(2)};\dots\quad.$

По сравнению со случаем изотропного трения при горизонтальном расположении канала [12, 13] отметим появление односторонних движений носителя по типу $R1$, а среди двусторонних движений – движения типа $R3$.

4. Результаты вычислительных экспериментов. Приводятся зависимости $x(t)$, $\dot{x}(t)$ и фазовые портреты ДН, соответствующих типам $R1$, $R2$, $R3$, $R5$, NR при горизонтальном расположении канала.

Литература

1. Бильченко Г. Г. Влияние подвижного груза на динамику носителя / Г. Г. Бильченко // Тезисы докладов международной конференции «Конструктивный негладкий анализ и смежные вопросы», посвящённой памяти профессора В. Ф. Демьянова (CNSA – 2017, г. Санкт-Петербург, 22–27 мая 2017 г.). — Ч. I. — СПб.: Изд-во ВВМ, 2017. — С. 218–224.

2. Bilchenko G. The influence of mobile load on the carrier dynamics // 2017 Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics

(dedicated to the memory of V. F. Demyanov) (CNSA), Saint Petersburg, Russia, 2017. — pp. 1–4. [doi: 10.1109/CNSA.2017.7973939]

3. Бильченко Г. Г. Влияние подвижного груза на движение носителя / Г. Г. Бильченко // Аналитическая механика, устойчивость и управление: Труды XI Международной Четаевской конференции. — Т. 1. Секция 1. Аналитическая Механика. Казань, 13–17 июня 2017 г. — Казань : Изд-во КНИТУ-КАИ, 2017. — С. 37–44.

4. Бильченко Г. Г. Анализ влияния подвижного груза на динамику носителя / Г. Г. Бильченко // Материалы XX Юбилейной Международной конференции по Вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2017), 24–31 мая 2017 г., Алушта. — М. : Изд-во МАИ, 2017. — С. 196–198.

5. Бильченко Г. Г. Движение носителя с подвижным грузом по горизонтальной плоскости / Г. Г. Бильченко // Сборник материалов Международной конференции «XXVIII Крымская Осенняя Математическая школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам» (КРОМШ-2017). Секции 1–4. — Симферополь : ДИАЙПИ, 2017. — С. 58–61.

6. Бильченко Г. Г. Об условиях движения носителя с подвижным грузом из состояния покоя / Г. Г. Бильченко // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий : сборник трудов X Международной конференции «ПМТУКТ–2017», Воронеж, 18–24 сентября 2017 г. / под ред. И. Л. Батаронова, А. П. Жабко, В. В. Провоторова; Воронеж. гос. техн. ун-т, Моск. гос. ун-т, С.-Петербург. гос. ун-т, Воронеж. гос. ун-т, Пермск. гос. нац. исслед. ун-т, Пермск. нац. исслед. политех. ун-т. — Воронеж : Изд-во «Научная книга», 2017. — С. 81–85.

7. Бильченко Г. Г. О движениях носителя с подвижным грузом по негладкой горизонтальной плоскости / Г. Г. Бильченко // Современные сложные системы управления: HTCS'2017 : материалы XII Международной научно-практической конференции, Липецк, 25–27 октября 2017 г. В 2 ч. Ч. 1. — Липецк : Изд-во Липецкого гос. технич. ун-та, 2017. — С. 28–32.

8. Бильченко Г. Г. Исследование движения носителя с подвижным грузом по негладкой наклонной плоскости / Г. Г. Бильченко // «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики»: сборник трудов Международной научно-технической конференции, Воронеж, 18–20 декабря 2017 г. — Воронеж : Изд-во «Научно-исследовательские публикации», 2017. — С. 567–572.

9. Bilchenko G. G. Motion of a carrier with a mobile load along a rough inclined plane // International Conference “Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics: Current Problems”, 18–20 December 2017, Voronezh, Russia. IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering, 2018, Vol. 973, Issue 1, id. 012026, pp. 1–10 (Russia, Voronezh: IOP Publishing) [doi: 10.1088/1742-6596/973/1/012026]

10. Bilchenko G. G.(sr.), Bilchenko G. G.(jr.), Bilchenko N. G. On motions of a carrier with a mobile load along a rough inclined plane // “The Eighth Polyakhov’s Reading” 30 January–2 February 2018, Saint–Petersburg, Russia. J. AIP Conf. Proc., 2018, Vol. 1959, Issue 1, pp. 030003-1–030003-8. [doi: 10.1063/1.5034583]

11. Бильченко Г. Г. Алгоритм классификации движений носителя с подвижным грузом по негладкой горизонтальной плоскости / Г. Г. Бильченко // Материалы XII Международной конференции по Прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли (NPNJ’2018), 24–31 мая 2018 г., Алушта. — М.: Изд-во МАИ, 2018. — С. 344–346.

12. Бильченко Г. Г. Алгоритм классификации двусторонних движений носителя с подвижным грузом по негладкой горизонтальной плоскости / Г. Г. Бильченко // Сборник материалов международной конференции «XXIX Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам» (КРОМШ-2018). Секции 4–9. — Симферополь: Полипринт, 2018. — С. 99–101.

13. Бильченко Г. Г. Алгоритмы установления типа двусторонних движений носителя с подвижным грузом по горизонтальной плоскости / Г. Г. Бильченко // «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики»: Сборник трудов Международной научно-технической конференции, Воронеж, 17–19 декабря 2018 г. — Воронеж: Изд-во «Научно-исследовательские публикации», 2018.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ РЕЗОНАНСНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ЗАДАЧ В СЛУЧАЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ПРЕДЕЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

А.А. Бободжанов, В.Ф. Сафонов (Москва,
Московский энергетический институт)
pochta@bobojanova@yandex.ru

Метод регуляризации Ломова обобщается на резонансные слабо нелинейные сингулярно возмущенные системы

$$\varepsilon\frac{dy}{dt}=A(t)y+\varepsilon f(t,y)+h(t), y(0,\varepsilon)=y^0,\ t\in[0,T], \qquad (1)$$

в случае пересечения корней характеристического уравнения предельного оператора $A(t)$. Для построения асимптотических решений реализуется идея регуляризации исходной задачи с помощью нормальных форм, разработанная Сафоновым В.Ф. и Бободжановым А.А. В случае, когда все точки спектра различны при всех значениях независимой переменной (т. е. в случае стабильности спектра предельного оператора) регуляризация задачи проводится с помощью интегралов от точек спектра (Ломов С.А. [1]). В случае пересечения корней характеристического уравнения появляются сингулярности нового типа, которые нельзя описать в терминах спектра. Для учета этих сингулярностей требуется разработать новый подход. Оказалось, что в этом случае надо применить *регуляризацию с помощью нормальных форм.* В докладе обсуждается резонансный случай задачи (1) при наличии пересечения двух точек спектра и возможность построения ее асимптотического решения любого порядка (по параметру) с помощью алгоритма нормальных форм.

Литература

1. Ломов С.А. Основы математической теории пограничного слоя / С.А. Ломов, И.С. Ломов. — М. : Издательство Московского университета, 2011. — 456 с.

О ЗАДАЧЕ ХОХШТАДТА–ЛИБЕРМАНА ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ДИРАКА[1]

Н.П. Бондаренко (Самара, Самарский университет;
Саратов, СГУ)
bondarenkonp@info.sgu.ru

Обозначим через D_j, $j = 1, 2$, краевые задачи для интегро-дифференциальной системы Дирака

$$By' + \int_0^x M(x-t)y(t)\,dt = \lambda y, \quad x \in (0, \pi),$$
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M(x) = \begin{pmatrix} M_1(x) & M_2(x) \\ M_3(x) & M_4(x) \end{pmatrix}, \quad y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix},$$
$$(\pi - x)M_k(x) \in L_2(0, \pi),\ k = \overline{1,4}.$$

с краевыми условиями $y_1(0) = y_j(\pi) = 0$.

Решается следующая *неполная обратная задача*, являющаяся аналогом задачи Хохштадта–Либермана для дифференциального оператора Штурма–Лиувилля [1]. Пусть матричная функция $M(x)$ известна a priori для $x \in (0, a)$, $\frac{\pi}{2} \leqslant a < \pi$. По заданным частям спектров $\{\lambda_{nj}\}_{n \in \mathcal{I}_j}$ задач D_j, $j = 1, 2$, построить $M(x)$ на (a, π).

Доказана единственность решения данной задачи при условии полноты систем вектор-функций

$$\mathcal{S}_j := \left\{ \begin{pmatrix} \sin \lambda_{nj} x \\ \cos \lambda_{nj} x \end{pmatrix} \right\}_{n \in \mathcal{I}_j}, \quad j = 1, 2,$$

в гильбертовом пространстве $L_2(0, \pi - a) \oplus L_2(0, \pi - a)$ и получен конструктивный алгоритм ее решения при условии базисности Рисса этих систем.

Литература

1. Hochstadt H. An inverse Sturm–Liouville problem with mixed given data / H. Hochstadt, B. Lieberman // B. SIAM J. Appl. Math. — 1978. — Vol. 34, no. 4. — P. 676–680.

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 17-11-01193).

ЖАДНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ПРОИЗВОЛЬНЫМ МНОЖЕСТВОМ [1]

П.А. Бородин (Москва, МГУ)
pborodin@inbox.ru

В банаховом пространстве X для множества M и элемента x определены расстояние $\rho(x, M) = \inf\{\|x-y\| : y \in M\}$ от x до M и *метрическая проекция* $P_M(x) = \{y \in M : \|x-y\| = \rho(x, M)\}$.

Предположим, что M является *множеством существования*, то есть $P_M(x) \neq \varnothing$ для всякого $x \in X$ (в частности, M замкнуто).

Для такого множества существования M определим алгоритм жадных приближений, сопоставляющий каждому элементу $x = x_0 \in H$ последовательность

$$x_{n+1} = x_n - y_{n+1}, \quad \text{где} \quad y_{n+1} \in P_M(x_n), \quad n = 0, 1, \dots, \qquad (1)$$

(если метрическая проекция $P_M(x_n)$ не одноточечна, из нее выбирается произвольный элемент y_{n+1}).

В случае, когда M является объединением одномерных подпространств в гильбертовом пространстве, алгоритм (1) совпадает с классическим *чисто жадным алгоритмом* [1].

Теорема. *Пусть симметричное множество M в гильбертовом пространстве H явдляется разносторонним (его точки есть в каждом открытом полупространстве $\{x : f(x) > 0\}$, где f — произвольный ненулевой функционал из сопряженного пространства X^*) и обладает свойством $M/2 \subset M$ (то есть для всякого $y \in M$ элемент $y/2$ также лежит в M). Тогда для всякого $x \in H$ жадный алгоритм (1) сходится, то есть $x_n \to 0$ и $x = \sum_{n=1}^{\infty} y_n$.*

В докладе предполагается обсудить необходимость условий на множество в этом утверждении, а также различные его вариации.

Литература

1. Temlyakov V. Greedy approximation / V. Temlyakov. — Cambridge, 2018.

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-0333).

О ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА[1]

М.В. Булатов, Л.С. Соловарова
(Иркутск, ИДСТУ СО РАН)
mvbul@icc.ru

В докладе рассмотрена задача

$$A(t)x^{''}(t)+B(t)x^{'}(t)+F(x(t),t)=0, t\in[0,1], \tag{1}$$

$$x(0)=a, x^{'}(t)|_{t=0}=b, \tag{2}$$

где $A(t), B(t)$ — $(n\times n)$-матрицы, $F(.)$ и $x(t)$ — n-мерные вектор-функции. Предполагается, что $detA(t)\equiv 0$. Такие задачи принято называть дифференциально-алгебраическими уравнениями (ДАУ) второго порядка. Как правило, (1),(2) путем введения новой переменной вектор-функции $y(t)=(x^{'}(t)^{\top}, x(t)^{\top})^{\top}$, $y(0)=(b^{\top}, a^{\top})^{\top}$ записывают в виде ДАУ первого порядка. Для исследования и численного решения полученной таким образом задачи применяют подходы, разработанные для ДАУ первого порядка. Такой подход имеет ряд недостатков. На основе матричных полиномов сформулированы достаточные условия существования и единственности решения задачи (1),(2). Обозначим $C(x(t),t)=\frac{\partial}{\partial x}F(x(t),t)$.

Теорема. *Пусть для задачи (1),(2) выполнены условия:*

1. *Элементы входных данных (1) достаточно гладкие;*
2. $rankA(0)=rank(A(0)|B(0)b+F(a,0)$;
3. $rankA(t)=r=const$;
4. $rank(A(t)|B(t))=r+l=const$;
5. $det(\lambda A(t)+\mu B(t)+C(x,t))=a_0(t)\lambda^r\mu^l+...+a(t)\neq 0$ *в окрестности точки* $(a,0)$.

Тогда на отрезке $[-\epsilon,\epsilon]$ *задача (1),(2) имеет единственное решение из класса* C^2.

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-29-10019).

СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ СИММЕТРИЧНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ МОДИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ О.А. ЛАДЫЖЕНСКОЙ В ПЕРЕМЕННЫХ КРОККО

Р.Р. Булатова, В.Н. Самохин, Г.А. Чечкин
(Москва, МГУ им. М.В.Ломоносова,
Московский Политехнический университет)
regina.bulatova@mech.math.msu.su, vnsamokhin@mtu-net.ru,
chechkin@mech.math.msu.su

В случае двумерного стационарного течения модифицированная система уравнений МГД-пограничного слоя имеет вид:

$$\nu((1+k(u_y)^2)u_y)_y - uu_x - vu_y + B^2(x)(U(x)-u) = -U(x)U'(x),$$

$$u_x + v_y = 0, \tag{1}$$

Здесь ν — кинематическая вязкость среды и d — малая положительная постоянная, зависящие от свойств жидкости, плотность жидкости ρ и проводимость среды σ предполагаются равными единице, $B(x)$, $U(x)$ — заданные функции.

Система (1) рассматривается в области $D = \{0 < x < X, 0 < y < \infty\}$ с граничными условиями

$$u(0,y) = 0,\ u(x,0) = 0,\ v(x,0) = v_0(x), u(x,y) \to U(x) \text{ при } y \to \infty. \tag{2}$$

где условия $U(0) = 0, \quad U(x) > 0$ при $x > 0$ подразумевают симметричность пограничного слоя.

В переменных Крокко система (1) с граничными условиями (2) перепишется в виде

$$\nu\big(1+3dU^2w^2\big)w^2w_{\eta\eta} - \eta Uw_\xi + (\eta^2-1)U_\xi w_\eta - \eta U_\xi w + 6\nu dU^2w_\eta^2w^3 +$$

$$+(\eta-1)B^2w - B^2Uw = 0$$

в области $\Omega = \{0 < \xi < X, 0 < \eta < 1\}$ с граничными условиями $w(\xi,1) = 0, \quad \Big(\nu ww_\eta\big(1+3dU^2w^2\big) - v_0(\xi)w + U_\xi + B^2\Big)\Big|_{\eta=0} = 0.$

Была доказана теорема существования и единственности решения задачи (1),(2) при указанных ранее условиях.

Литература

1. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости / О.А. Ладыженская. — М. : Наука. Физмалит, 1970.

ОПТИМАЛЬНЫЕ И АСИМПТОТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНЫЕ УПРАВЛЕНИЯ В ПРИКЛАДНОЙ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ[1]

Е.В. Булинская (Москва, МГУ)
ebulinsk@yandex.ru

Хорошо известно, что для исследования реального процесса (или системы) необходимо построить соответствующую математическую модель. Еще в прошлом веке было замечено сходство моделей, возникающих в теории массового обслуживания, страховании и теории запасов (см. [1]). Позже выяснилось (см. [2]), что и другие области прикладной теории вероятностей, например, теории надежности, теории водохранилищ, финансов, биологии и медицины, могут быть описаны с помощью набора следующих процессов и функционалов $(T, Z, Y, U, \Psi, \mathcal{L})$. Здесь T — это горизонт планирования, Z — входящий процесс (или поток), а Y — выходящий, т.е. $Z = \{Z(t), t \in [0, T]\}$, $Y = \{Y(t), t \in [0, T]\}$ представляют собой некоторые случайные (или детерминированные) процессы, возможно, имеющие разную размерность. Далее, $U = \{U(t), t \in [0, 1]\}$ — это управление, а Ψ — функционал, описывающий структуру системы и способ ее функционирования. Следовательно, состояние системы $X = \Psi(Z, Y, U)$ также некоторый процесс $X = \{X(t), t \in [0, 1]\}$. Наконец, последний элемент $\mathcal{L}_T(U) = \mathcal{L}(T, Z, Y, U, X)$ — это целевая функция (критерий или мера риска), оценивающая качество функционирования системы.

Определение. Управление $U_T^* = \{U^*(t),\, t \in [0, T]\}$ называется *оптимальным*, если

$$\mathcal{L}_T(U_T^*) = \inf_{U_T \in \mathcal{U}_T} \mathcal{L}_T(U_T) \quad (\text{или } \mathcal{L}_T(U_T^*) = \sup_{U_T \in \mathcal{U}_T} \mathcal{L}_T(U_T)),$$

где $\mathcal{U}_T$ — класс допустимых управлений. Набор $U^* = \{U_T^*,\, T > 0\}$ называется *оптимальной политикой* (или стратегией).

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 17-01-00468).

Оптимизация может проводиться как в рамках надежностного подхода, когда надо минимизировать вероятность разорения или максимизировать вероятность бесперебойной работы системы, так и в рамках стоимостного подхода, когда минимизируются ожидаемые издержки или максимизируется ожидаемый доход (см. [3]).

При бесконечном горизонте планирования T в рамках стоимостного подхода не всегда удается найти оптимальное управление. Поэтому приходится использовать асимптотически оптимальное управление (см., например, [2], [4]).

Определение. Управление $\tilde{U}_T = \{\tilde{U}(t),\, t \in [0,T]\}$ называется *асимптотически оптимальным*, если

$$\lim_{T\to\infty} T^{-1}\mathcal{L}_T(\tilde{U}_T) = \lim_{T\to\infty} T^{-1}\mathcal{L}_T(U_T^*).$$

Доклад посвящен исследованию новых моделей страхования и теории запасов как в случае непрерывного, так и дискретного времени. Наряду с использованием методов, разработанных в [4], [5], продолжается изучение устойчивости оптимальных управлений к малым флуктуациям параметров и возмущениям описывающих рассматриваемую систему процессов (см., например, [6], [7]).

Литература

1. Прабху Н. Стохастические процессы теории запасов / Н. Прабху. — М. : Мир, 1984. — 185 с.

2. Bulinskaya E. New Research Directions in Modern Actuarial Sciences / E. Bulinskaya // Modern problems of stochastic analysis and statistics — selected contributions in honor of Valentin Konakov, ed. V.Panov. — Springer Proceedings in Mathematics and Statistics 208, 2017. — P. 349–408.

3. Bulinskaya E. Cost approach versus reliability / E. Bulinskaya // Proceedings of International Conference DCCN-2017. — Moscow : Technosphera, 2017. — P. 382–389.

4. Булинская Е.В. Эмпирические асимптотически оптимальные политики / Е.В. Булинская // Современные проблемы математики и механики : сборник, посвященный 190-летию П.Л.Чебышева. — М. : Изд-во Моск. ун-та. — 2011. — Т. 7, вып. 1. — С. 8–15.

5. Schmidli H. Stochastic Control in Insurance / H. Schmidli. — London : Springer-Verlag, 2008. — 254 p.

6. Bulinskaya E. Stochastic Insurance Models: Their Optimality and Stability / E. Bulinskaya // Advances in Data Analysis, ed. Christos H. Skiadas. — Birkhäuser, 2010. — P. 129–140.

7. Булинская Е.В. Анализ чувствительности некоторых прикладных моделей теории вероятностей / Е.В. Булинская, Б.И. Шигида // Фундаментальная и прикладная математика. — 2018. — Т. 22, вып. 3. — С. 19–34.

О СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ С ИНВОЛЮЦИЕЙ С НЕПРЕРЫВНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

М.Ш. Бурлуцкая (Воронеж, ВГУ)
bmsh2001@mail.ru

Рассмотрим смешанную задачу для уравнения первого порядка с инволюцией

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} + q(x)v(2-x,t), \tag{1}$$

$$x \in [0,2], \quad t \in (-\infty, +\infty)$$

$$v(0,t) = v(2,t), \qquad v(x,0) = \widetilde{\varphi}(x), \quad x \in [0,2]. \tag{2}$$

Классические решения подобных задач при минимальных требованиях на начальные данные исследовались в случае непрерывно дифференцируемой $q(x)$ (см. например, [1]). Здесь мы предполагаем $q \in C[0,2]$.

Соответствующая спектральная задача приводит к изучению функционально-дифференциального оператора с инволюцией $(Ly)(x) = y'(x) + q(x)y(2-x)$, $y(0) = y(2)$, и тесно связанного с ним оператора Дирака. Различные спектральные вопросы для таких операторов (впервые появившихся в [2]), в том числе и в случае недифференцируемого потенциала, исследовались в [2]–[6] (более полную библиографию и ссылки на работы других авторов см. в [4; 8]).

Установим связь между задачей (1)–(2) и смешанной задачей для системы уравнений первого порядка (см. также [7]):

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = B\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + Q(x)u(x,t), \tag{3}$$

$$x \in [0,1], \quad t \in (-\infty, +\infty),$$

$$u_1(0,t) = u_2(0,t), \qquad u_1(1,t) = u_2(1,t), \tag{4}$$

$$u(x,0)=\varphi(x), \tag{5}$$

где $u(x,t)=(u_1(x,t),u_2(x,t))^T$, $\varphi(x)=(\varphi_1(x),\varphi_2(x))^T$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, $Q(x)=\begin{pmatrix}0 & q_2(x)\\ q_1(x) & 0\end{pmatrix}$. Задача (3)–(5) в случае $q_j\in C[0,1]$ исследовалась в [8], где получено классическое решение при условии $\varphi\in D_{\widetilde{L}^2}$ ($\widetilde{L}$ — оператор, порожденный соответствующей спектральной задачей), в [9] классическое решение получено при $\varphi\in D_{\widetilde{L}}$. Также в [8; 9] доказывается, что формальное решение является обобщенным решением задачи, понимаемым как предел классических решений для случая гладких аппроксимаций начальных данных задачи.

Теорема 1. *Если $u(x,t)$ есть решение задачи (3)–(5), то $v(x,t)$ такая, что $v(x,t)=u_1(x,t)$, при $x\in[0,1]$, $v(x,t)=u_2(2-x,t)$, при $x\in[1,2]$, является решением задачи (1)–(2), где $q(x)=q_2(x)$, при $x\in[0,1]$, $q(x)=q_1(2-x)$, при $x\in[1,2]$, $\widetilde{\varphi}(x)=\varphi_1(x)$, при $x\in[0,1]$, $\widetilde{\varphi}(x)=\varphi_2(2-x)$, при $x\in[1,2]$.*

Замечание. Условие $u_1(1,t)=u_2(1,t)$ влечет непрерывность $v(x,t)$ в точке $x=1$. Функция $q(x)$, определенная в теореме 1, вообще говоря, терпит разрыв в точке $x{=}1$. Если $q_1(1)=q_2(1)$, то $q(x)$ — непрерывна. Минимальные требования на значения $\varphi(x)$ в задаче (1)–(3) $\varphi_1(0)=\varphi_2(0),\varphi_1(1)=\varphi_2(1)$ влекут непрерывность $\widetilde{\varphi}(x)$ в точке $x=1$.

Теорема 2. *Пусть $v(x,t)$ есть решение задачи (1)–(2). Тогда $u_1(x,t)=v(x,t)$, $u_2(x,t)=v(2-x,t)$, $x\in[0,1]$ есть решение задачи (3)–(5), где $q_1(x)=q(2-x)$, $q_2(x)=q(x)$, $\varphi_1(x)=\widetilde{\varphi}(x)$, $\varphi_2(x)=\widetilde{\varphi}(2-x)$, при $x\in[0,1]$.*

Используя результаты из [8; 9], устанавливается

Теорема 3. *Если $\widetilde{\varphi}(x)$ абсолютно непрерывна на $[0,2]$, $\widetilde{\varphi}'\in L_2[0,2]$, $\widetilde{\varphi}(0)=\widetilde{\varphi}(2)$, то классическое решение задачи (1)–(2) существует (под классическим решением понимается функция $v(x,t)$, абсолютно непрерывная по x и t, удовлетворяющая уравнению (1) почти всюду и условиям (2)).*

Отметим, что учитывая [4, Замечание 3], результаты могут быть обобщены на случай $q\in L_2[0,2]$.

Литература

1. Бурлуцкая М.Ш. Метод Фурье в смешанной задаче для уравнения первого порядка с инволюцией / М.Ш. Бурлуцкая, А.П. Хромов // ЖВМиМФ. — 2011. — Т. 51, № 12. — С. 2233–2246.

2. Хромов А.П. Об обращении интегральных операторов с ядрами, разрывными на диагоналях / А.П. Хромов // Матем. заметки. — 1998. — Т. 64, № 6. – С. 932–949.

3. Бурлуцкая М.Ш. Функционально-дифференциальный оператор с инволюцией / М.Ш. Бурлуцкая, В.П. Курдюмов, А.С. Луконина, А.П. Хромов // ДАН. — 2007. — Т. 414, № 4. — С. 1309–1312.

4. Бурлуцкая М.Ш. Уточненные асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций системы Дирака / М.Ш. Бурлуцкая, В.П. Курдюмов, А.П. Хромов // ДАН. — 2012. — Т. 443, № 4. — С. 414–417.

5. Бурлуцкая М.Ш. Функционально-дифференциальные операторы с инволюцией и операторы Дирака с периодическими краевыми условиями / М.Ш. Бурлуцкая, А.П. Хромов // ДАН. — 2014. — Т. 454, № 1. — С. 15–17.

6. Бурлуцкая М.Ш. Функционально-дифференциальные уравнения с инволюцией в классе разрывных решений / М.Ш. Бурлуцкая // Современные методы теории краевых задач : материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения — XXVII». — Воронеж : ИД ВГУ, 2017. — С. 47–48.

7. Бурлуцкая М.Ш. О свойствах решений смешанных задач для волнового уравнения и уравнения с инволюцией, рассматриваемого в классе разрывных решений / М.Ш. Бурлуцкая // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 19-й Международной Саратовской зимней школы, посвященной 90-летию со дня рождения академика П.Л. Ульянова. — Саратов : Изд-во «Научная книга», 2018. — С. 66–69.

8. Бурлуцкая М.Ш. Смешанная задача для системы дифференциальных уравнений первого порядка с непрерывным потенциалом / М.Ш. Бурлуцкая // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2016. — Т. 16, вып. 2. — С. 145–151.

9. Бурлуцкая М.Ш. О классическом решении смешанной задачи для системы уравнений первого порядка с непрерывным потенциалом / М.Ш. Бурлуцкая // Совр. методы теории краевых задач : материалы Междунар. конф. «Понтрягинские чтения — XXIX», посвящ. 90-летию В.А. Ильина. — Москва : Издательство МАКС-Пресс, 2018. — С. 65–66.

СУБОТНОШЕНИЕ ШТЕЙНЕРА В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ [1]

Л.Ш. Бурушева (Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова)
lburusheva@gmail.com

Пусть X — банахово пространство и M — его конечное подмножество. *Длиной кратчайшей сети* для M в X называется число

$$|\mathrm{smt}|(M,X)=\inf\{|\Gamma|:\ \text{сеть}\,\Gamma\,\text{соединяет}\,M\},$$

где сеть — связный граф с ребрами-отрезками. Через $|\Gamma|$ обозначается длина сети, то есть сумма длин ее ребер.

Пусть M — конечное метрическое пространство. Число

$$|\mathrm{mf}|(M)=\inf\{|\mathrm{smt}|(\varphi(M),Y):\varphi:M\to Y\},$$

где infimum берется по всем изометричным вложениям множества M в различные банаховы пространства Y, называется *длиной минимального заполнения* M.

Для всякого конечного подмножества M банахова пространства X выполнено очевидное неравенство $|\mathrm{smt}|(M,X)\geqslant|\mathrm{mf}|(M)$. Доклад посвящен следующему вопросу: во сколько раз величина $|\mathrm{smt}|(M,X)$ может быть больше величины $|\mathrm{mf}|(M)$ для какого-либо конечного множества M в банаховом пространстве X?

Теорема. *Для всякого банахова пространства X и его n- точечного подмножества M_n справедливо неравенство*

$$\frac{|\mathrm{mf}|(M_n)}{|\mathrm{smt}|(M_n,X)}\geqslant\frac{n}{2(n-1)},$$

и существуют такие X и M_n, при которых оно обращается в равенство.

Литература

1. Иванов А.О. Одномерная проблема Громова о минимальном заполнении / А.О. Иванов, А.А. Тужилин // Матем. сб. — 203:5. — 2012.

2. Беднов Б.Б. Банаховы пространства, реализующие минимальные заполнения / Б.Б. Беднов, П.А. Бородин // Матем. сб. — 205:4. — 2014.

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-0333).

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ОБРАТНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА СВЕРТКИ[1]

С.А. Бутерин (Саратов, СГУ)
buterinsa@info.sgu.ru

Пусть $\{\lambda_n\}_{n\geqslant 1}$ – спектр краевой задачи $L := L(M)$ вида

$$-y'' + \int_0^x M(x-t)y'(t)\,dt = \lambda y, \;\; 0 < x < \pi, \quad y(0) = y(\pi) = 0, \;\; (1)$$

где $M(x)$ – комплекснозначная функция, $(\pi - x)M(x) \in L_2(0,\pi)$.

В [1] исследовалась *обратная задача* восстановления функции $M(x)$ по спектру $\{\lambda_n\}_{n\geqslant 1}$. Была доказана теорема единственности для этой обратной задачи и получена конструктивная процедура ее решения вместе с необходимыми и достаточными условиями разрешимости. А именно, произвольная последовательность комплексных чисел $\{\lambda_n\}_{n\geqslant 1}$ является спектром некоторой краевой задачи L вида (1) тогда и только тогда, когда имеет место асимптотика

$$\lambda_n = (n + \varkappa_n)^2, \quad \{\varkappa_n\} \in l_2.$$

В настоящей работе получена устойчивость решения этой обратной задачи. Наряду с L рассмотрим краевую задачу $L(\tilde M)$.

Теорема 1. *Существует число $\delta > 0$, зависящее от $M(x)$, такое что если спектр $\{\tilde\lambda_n\}_{n\geqslant 1}$ задачи $L(\tilde M)$ удовлетворяет условию*

$$\Lambda := \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\lambda_n - \tilde\lambda_n|^2}{n^2}} \leqslant \delta,$$

то справедлива оценка $\|(\pi - x)(M(x) - \tilde M(x))\|_{L_2(0,\pi)} \leqslant C\Lambda$ с некоторой константой $C > 0$, зависящей только от функции $M(x)$.

Доказательство основано на одном результате работы [2].

Литература

1. Buterin S.A. On an inverse spectral problem for a convolution integro-differential operator / S.A. Buterin // Results Math. — 2007. — Vol. 50, no. 3-4. — P. 173–181.

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 17-11-01193).

2. Buterin S. On global solvability and uniform stability of one nonlinear integral equation / S. Buterin, M. Malyugina // Results Math. — 2018. — 73:117. — P. 1–19.
https://doi.org/10.1007/s00025-018-0879-5

О ВОССТАНОВЛЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ПУЧКОВ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ[1]

С.А. Бутерин, М.А. Малюгина (Саратов, СГУ)
ButerinSA@info.sgu.ru, Margarita.Malyugina@tele2.ru

Рассмотрим функционально-дифференциальное уравнение

$$y''(x) + \rho^2 y(x) = (q_0(x) + 2\rho q_1(x))y(x-a), \quad 0 < x < \pi, \qquad (1)$$

где ρ — спектральный параметр, $a \in [\pi/2, \pi)$, а $q_\nu(x) \in W_2^\nu[0,\pi]$ — комплекснозначные функции, причем $q_\nu(x) = 0$ на $(0,a)$, $\nu = 0,1$. Для простоты предположим, что $\int_a^\pi q_1(x)\,dx = 0$. Пусть $\{\rho_{n,j}\}$ — спектры краевых задач для уравнения (1) с краевыми условиями

$$y(0) = y^{(j)}(\pi) = 0, \quad j = 0,1.$$

Теорема 1. *Имеет место асимптотика*

$$\rho_{n,j} = \rho_{n,j}^0 + \frac{\omega_0}{\pi n}\cos\rho_{n,j}^0 a + (-1)^j\frac{\omega_1}{\pi n}\sin\rho_{n,j}^0 a + \frac{\varkappa_{n,j}}{n},$$

где $\omega_j \in \mathbb{C}$, $\rho_{n,j}^0 = n - \mathrm{sgn}(n)j/2$, $\{\varkappa_{n,j}\} \in l_2$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $j = 0,1$.

Пусть $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ — возрастающая последовательность натуральных чисел. Рассмотрим следующую *обратную задачу*: заданы подспектры $\{\rho_{\pm n_k,j}\}_{k\in\mathbb{N}}$, $j = 0,1$, найти функции $q_0(x)$, $q_1(x)$.

Теорема 2. *Для того, чтобы задание подспектров* $\{\rho_{\pm n_k,j}\}_{k\in\mathbb{N}}$, $j = 0,1$, *однозначно определяло функции* $q_0(x)$, $q_1(x)$, *необходимо и достаточно, чтобы каждая из систем функций*

$$\{\sin n_k x\}_{k\in\mathbb{N}}, \quad \{\sin(n_k - 1/2)x\}_{k\in\mathbb{N}},$$

была полна в пространстве $L_2(0, \pi - a)$.

Следствие. *При любом фиксированном* $a \in [\pi/2, \pi)$ *задание* $\{\rho_{2k,j}\}_{|k|\in\mathbb{N}}$, $j = 0,1$, *однозначно определяет функции* $q_0(x)$ *и* $q_1(x)$.

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект № 1.1660.2017/4.6).

Также можно получить алгоритм решения обратной задачи вместе с необходимыми и достаточными условиями ее разрешимости. Отметим, что случай $q_1(x) \equiv 0$ был подробно исследован в [1].

Литература

1. Buterin S.A. An inverse spectral problem for Sturm–Liouville operators with a large delay / S.A. Buterin, V.A. Yurko // Anal. Math. Phys. — 2017. — https://doi.org/10.1007/s13324-017-0176-6.

БАЗИСЫ УОЛША В НЕЙРОСЕТЕВОЙ КЛАССИФИКАЦИИ

В.В. Бутов, В.Н. Думачев (Воронеж, ВИ МВД РФ)
butovvladislav@yandex.ru, dumv@comch.ru

В работе предлагаются алгоритмы аналитической настройки синаптических весов искусственной нейронной сети, которая используется в качестве декодера помехоустойчивого двоичного блокового кода. Специфика размещения искаженных кодовых слов на сфере Хэмминга позволяет выделить непересекающиеся кластеры с центрами в неискаженных кодовых словах. Для кода (n, k) количество таких кластеров равно 2^k. С точки зрения Булевой алгебры декодер является совокупностью k булевых функцией от n переменных, которые могут принимать 2^{2^n} значений. Так как булевы функции, соответствующие неискаженным кодовым словам имеют одинаковое количество нулей и единиц, то задача сводится к выбору k векторов из $C_{2^{2^n}}^{2^{2^n-2}}$ комбинаций. Для построения линейного фильтра в качестве дополнительных признаков нейронной сети предлагается использовать 2^n базисных функций Уолша. Показано, что $(2^n - n)$ базисных функции Уолша могут быть представлены в виде линейного полинома Жегалкина от n входных векторов кодового слова, который реализуется с помощью двуслойной нейроной сети.

Литература

1. Haykin S. Neural Networks and Learning Machines / S. Haykin. — New Jersey: Pearson, 2008. — 936 p.

2. Morelos-Zaragoza R.H. The Art of Error Correcting Coding / R.H. Morelos-Zaragoza. — New York: Wiley, 2006. — 278 p.

3. Думачев В.Н. Особенности обучения нейросетевого декодера / В.Н. Думачев, А.Н. Копылов, В.В. Бутов // Системы управления и информационные технологии. — 2017. — Т. 67, № 1. — С. 29–33.

---

4. Думачев В.Н. О нейросетевом декодере помехоустойчивого кода Хэмминга / В.Н. Думачев, В.В. Бутов // Системы управления и информационные технологии. — 2017. — Т. 70, № 4. — С. 8–11.

5. Nachmani E. Near maximum likelihood decoding with deep learning / E. Nachmani, E. Marciano, D. Burshtein, Y. Beéry // 2018. ArXiv: cs.IT/1801.02726

ОТКЛИК НА ИМПУЛЬСНОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ СРЕДЫ С РЕОЛОГИЕЙ ВОЛЬТЕРРА-ФРЕШЕ С СЕПАРАБЕЛЬНЫМИ ЯДРАМИ

А.П. Бырдин, В.С. Прач, А.А. Сидоренко (Воронеж,
Воронежский государственный технический университет)
(Донецк, Украина, Донецкий политехнический институт)
sidorenko6302@mail.ru

Задачи по изучению ползучести конструкционных материалов позволяют установить адекватность реологических моделей экспериментальным результатам, полученным при испытаниях образцов. При обработке результатов опытов на ползучесть или релаксацию напряжений используется упрощение физических уравнений нелинейно-наследственной теории, в частности — предположение о сепарабельности ядер наследственности.

В настоящей работе рассматривается ползучесть таких материалов при одноосном нагружении вида $\sigma(t) = AH(t)H(t_0 - t)$, где H — функция Хевисайда. Определяющее соотношение для материала представлено в виде:

$$\begin{gathered}
\sigma(t) = \int\limits_0^t \cdots \int V_n(t-t_1,...,t-t_n) \prod_{m=1}^{n} \varepsilon(t_m)dt_m, \\
V_n(t_1,...,t_n) = a_n \prod_{m=1}^{n} V_1(t_m), \qquad V_1(t) = \delta(t) - v\beta e^{-\beta t},
\end{gathered} \tag{1}$$

где $V_1(t)$ — соответствует модели стандартного линейного тела, где v — дефект модуля упругости, β^{-1} — время релаксации. Рассматривая соотношение (1) как уравнение относительно деформации $\varepsilon(t)$ можно получить следующее выражение для ядер интегралов обратного аналитического функционала, аналогичного функционалу в (1):

$$W_n(t_1,...,t_n) = f_n\left(\frac{a_2}{a_1^2},...,\frac{a_n}{a_n^n}\right) W_1(t_n) \prod_{m=1}^{n-1} \delta_1(t_m - t_n), \tag{2}$$

где f_n можно построить в замкнутом виде для некоторых зависимостей a_n от n. Учитывая (2), решение уравнения (1) получаем в виде

$$\varepsilon(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n A^{n-1} \cdot \int\limits_0^t W_1(\tau)\sigma(t-\tau)d\tau. \qquad (3)$$

Из (3) следует, что в случае сепарабельных весовых функций релаксации V_n при действии напряжения в форме прямоугольного импульса кривые ползучести для нелинейной вязкоупругой среды будут подобны кривым ползучести линейного вязкоупругого тела.

Для жесткой и мягкой сред при коэффициентах вида $a_n = \mu^n$или $a_n = (-1)^{n-1}\mu^n$ соответственно, из (3) получим следующий закон ползучести

$$\varepsilon(t) = B^{(+,-)} \begin{cases} 1 + \frac{v}{\bar{v}}(1 - e^{-\bar{v}\beta t}), & 0 < t \leqslant t_0, \\ \frac{v}{\bar{v}}(e^{\bar{v}\beta t_0} - 1)e^{-\bar{v}\beta t}, & t_0 < t, \end{cases} \qquad (4)$$

где $\bar{v} = 1 - v$, амплитуды деформации для жесткой и мягкой сред имеют вид:

$$B^{(+)} \approx \frac{A}{\mu}(1 - A), \qquad B^{(-)} \approx \frac{A}{\mu}\left(1 - \frac{A}{8}\right), \qquad 0 < a < 0.17.$$

МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ[1]

Д.В. Валовик, В.Ю. Курсеева (Пенза, ПГУ)
dvalovik@mail.ru, 79273698109@ya.ru

Пусть $\bar{\mathrm{I}} = [0, h]$ и $h > 0$, $n \geqslant 2$ — целое число, $\mathrm{A}^*_{ij} = (0, \alpha^*_{ij})$, где $i, j = \overline{1, n}$, $\alpha^*_{ii} > 0$, при этом α^*_{ij} — произвольные фиксированные числа, а α^*_{ij} при $i \neq j$ достаточно малы. Пусть $\Lambda^*_i = [0, \lambda^*_i)$, где $\lambda^*_i > 0$ $(i = \overline{1, n})$, — достаточно большие числа. Множества $\mathbf{\Lambda}^*$ и $\mathbf{A}^*$ есть декартовы произведения Λ^*_i, A^*_{ij} соответственно. Кроме того, α_{ij} и λ_i, где $i, j = \overline{1, n}$, — положительные параметры.

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 18-71-10015).

Задача $P = P(\boldsymbol{\alpha})$, где $\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$, заключается в нахождении тех значений параметра $\boldsymbol{\lambda} = \bar{\boldsymbol{\lambda}} = (\bar{\lambda}_1, \ldots, \bar{\lambda}_n)$, для которых существуют решения $u_i \equiv u_i(x; \bar{\boldsymbol{\lambda}}, \boldsymbol{\alpha})$ системы $u_i'' = -(a_i - \lambda_i)u_i - u_i \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} u_j^2$, удовлетворяющие условиям $u_i(0) = 0$, $u_i'(0) = A_i$, $u_i(h) = 0$, где $(x, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\alpha}) \in \bar{\mathrm{I}} \times \boldsymbol{\Lambda}^* \times \mathbf{A}^*$, $a_i, A_i > 0$ — вещественные постоянные, и $u_i \in C^2(\bar{\mathrm{I}})$ [1, 2].

При $\alpha_{ij} = 0$ для $i \neq j$ задача $P(\boldsymbol{\alpha})$ распадается на n более простых задач $P(\alpha_{ii})$.

Теорема. *Пусть каждая из задач* $P(\alpha_{ii})$ *имеет* m_i *однократных собственных значений* $\lambda_i = \widehat{\lambda}_{i,1}, \ldots, \widehat{\lambda}_{i,m_i} \in [0, a_i) \cup (\lambda_i', \lambda_i^*) \subset \Lambda_i$ *соответственно. Тогда найдутся положительные постоянные* α_{ij}^0 *при* $i \neq j$, *такие, что для любых* $0 < \alpha_{ij} < \alpha_{ij}^0$ $(i \neq j)$ *задача* $P(\boldsymbol{\alpha})$ *имеет по крайней мере* $m_1 \times m_2 \times \ldots \times m_n$ *векторных собственных значений* $\bar{\boldsymbol{\lambda}}_{k_1,k_2,\ldots,k_n} = (\bar{\lambda}_{1,k_1}, \bar{\lambda}_{2,k_2}, \ldots, \bar{\lambda}_{n,k_n})^{\top}$, *где* $k_i = \overline{1, m_i}$; *при этом каждое* $\bar{\boldsymbol{\lambda}}_{k_1,k_2,\ldots,k_n}$ *содержится в некоторой окрестности точки* $(\widehat{\lambda}_{1,k_1}, \widehat{\lambda}_{2,k_2}, \ldots, \widehat{\lambda}_{n,k_n})^{\top}$.

Литература

1. Valovik D.V. Nonlinear multi-frequency electromagnetic wave propagation phenomena / D.V. Valovik //Journal of Optics. — 2017. — Vol. 19. — № 11. — P. 115502 (16 pages).

2. Boardman A.D. Third-Order Nonlinear Electromagnetic TE and TM Guided Waves / A.D.Boardman, P. Egan, F. Lederer, U. Langbein, D. Mihalache // Elsevier sci. Publ. North-Holland. — 1991. — Vol. 29. — P. 73–287.

КОЛМОГОРОВСКИЕ ПОПЕРЕЧНИКИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ВЕСОВЫХ КЛАССОВ СОБОЛЕВА[1]

А.А. Васильева (Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова)
vasilyeva_nastya@inbox.ru

Пусть $1 < p \leqslant q < \infty$, $g(t) = t^{-\beta}|\log t|^{\mu}$, $w(t) = t^{-\sigma}|\log t|^{\nu}$, $t \in [0,\, e^{-1}]$. Положим

$$M = \{f \in AC[0,\, e^{-1}] : \int\limits_0^{e^{-1}} |f'/g|^p \, dt \leqslant 1,\ \int\limits_0^{e^{-1}} |wf|^p \, dt \leqslant 1\}.$$

Теорема. *Предположим, что* $\beta = 1 + \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$, $\beta + \sigma = 1$, $\mu + \nu > 0$; *при этом в случае* $\mu > -\frac{1}{p'} - \frac{1}{q}$ *выполнено* $\nu > \mu\frac{1/p-1/q}{1/p'+1/q}$.

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00295).

1. *Пусть* $p = q$ *или* $q \leqslant 2$. *Положим* $\theta_1 = 1 + \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$, $\theta_2 = \frac{\nu(1/p'+1/q)-\mu(1/p-1/q)}{\mu+\nu+1}$. *Предположим, что* $\theta_1 \neq \theta_2$. *Тогда* $d_n(M,\, L_q[0,\, 1]) \asymp n^{-\min\{\theta_1,\,\theta_2\}}$.

2. *Пусть* $p < q$ *и* $q > 2$. *Положим*

$$\theta_1 = 1 + \frac{1}{q} - \frac{1}{p} + \min\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{q}, \frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right\},$$

$$\theta_2 = \frac{\nu(1/p' + 1/q) - \mu(1/p - 1/q)}{\mu + \nu + 1} + \min\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{q}, \frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right\},$$

$$\theta_3 = \frac{q(\nu(1/p' + 1/q) - \mu(1/p - 1/q))}{2(\mu + \nu + 1)}.$$

Предположим, что существует $j_* \in \{1,\, 2,\, 3\}$ *такое, что* $\theta_{j_*} < \min_{j \neq j_*} \theta_j$. *Тогда* $d_n(M,\, L_q[0,\, 1]) \asymp n^{-\theta_{j_*}}$.

Доказательство опирается на теорему вложения Р. Ойнарова [1].

Литература

1. Oinarov R. On weighted norm inequalities with three weights / R. Oinarov // J. London Math. Soc. — 1993. — V. s2–48, Issue 1. — P. 103–116.

О ВЕСАХ И ФУНКЦИЯХ В МЕТОДАХ ВЕСОВОГО РЕШЕТА

Е.В. Вахитова, С.Р. Вахитова (Воронеж, ВГУ)
algebraist@yandex.ru

В настоящей работе проведен краткий обзор методов весового решета в аналитической теории чисел, сравнение различных весов и о функциях в методе решета.

В работах [1], [2] приведены ссылки на работы [3], [4]. При этом не учтена работа [5], в которой приведено подробное изложение метода весового решета с весами А. А. Бухштаба, которые были анонсированы им в 1985 году [6]. Методам весового решета и их приложениям посвящены также работы [7]–[15].

Следует различать метод решета А. Сельберга и метод решета В. Бруна с различными весами, а именно: веса А. А. Бухштаба 1967 года [16], веса Х.– Э. Рихерта 1969 года [17], [18], веса А. А.

Бухштаба – М. Лабордэ 1979 года [19] (это веса А. А. Бухштаба в непрерывной форме, полученной М. Лабордэ) и веса А. А. Бухштаба, анонсированные им в 1985 году [6].

Метод решета А. Сельберга с весами А. А. Бухштаба, анонсированными им в 1985 году, и метод решета В. Бруна с весами А. А. Бухштаба, анонсированными им в 1985 году, исследованы в работах [3] – [5] и [7], [8].

Функции в методе решета впервые ввел А. А. Бухштаб [20], [21], это признано (см. [18], гл. 8, с. 237 и [2], гл. 4, с. 167).

Сравнение различных весов в методах весового решета проведено в работе [22].

Литература

1. Greaves G. Sieve methods and problems / G. Greaves. — Modern problem of number theory and its application : International conference 10-15 sept., 2001. — Ч. II. — М. : Изд-во МГУ. — 2001. — С. 7–47.

2. Greaves G. Sieves in number theory. / G. Greaves. — Berlin : Springer–Verlag, 2001. — 304 p.

3. Вахитова Е.В. О приложении функций Бухштаба / Е.В. Вахитова // Матем. заметки. — 1995. — Т. 57, № 1. — С. 121–125. Vakhitova E.V. Application of Bukhstab functions // Mathematical Notes, 1995. — V. 57, № 1. — P. 85–87.

4. Вахитова Е.В. Об одномерном решете Сельберга с весами Бухштаба нового типа / Е.В. Вахитова // Матем. заметки. — 1999. — Т. 66, № 1. — С. 38–49.

5. Вахитова Е.В. О новом типе весового решета Бухштаба / Е.В. Вахитова // М. : Деп. в ВИНИТИ, 26.08.93 — №2342–В93, 1993. — 34 с.

6. Бухштаб А.А. Новый тип весового решета / А.А. Бухштаб // Теория чисел и её приложения : тез. докл. Всесоюз. конф. — Тбилиси, 1985. — С. 22–24.

7. Вахитова Е.В. Методы решета с весами Бухштаба и их приложения / Е.В. Вахитова. — М. : Изд-во МПГУ «Прометей», 2002. — 268 с.

8. Вахитова Е.В. Методы решета с весами Бухштаба и их приложения : 2-е изд., перераб. и доп. / Е.В. Вахитова, С.Р. Вахитова. — Воронеж : издат. дом ВГУ, 2014. — 332 с.

9. Вахитова Е.В. О некоторых приложениях одномерного решета с весами / Е.В. Вахитова // Матем. заметки. — 1992. — Т. 51, № 6. — С. 139–141.

Vakhitova E. V. Certain applications of a one-dimensional weighted lattice // Plenum Publishing Corporation, 1993. — P. 620–621.

10. Вахитова Е.В. Приложение метода весового решета к полиномиальной последовательности / Е.В. Вахитова // Вестник Воронежского государственного университета. Серия : Физика. Математика. — 2010. — № 2. — С. 34–36.

11. Вахитова Е.В. Приложение метода весового решета к оценке почти простого числа в арифметической прогрессии / Е.В. Вахитова // Вестник Воронежского государственного университета. Серия : Физика. Математика. — 2011. — № 1. — С. 107–110.

12. Вахитова Е.В. Приложение метода весового решета к коротким интервалам арифметической прогрессии / Е.В. Вахитова, С.Р. Вахитова // Вестник Воронежского государственного университета. Серия : Физика. Математика. — 2012. — № 2. — С. 86–92.

13. Вахитова Е.В. Приложение весового решета к оценке наименьшего почти простого числа полиномиальной последовательности от простого аргумента / Е.В. Вахитова, С.Р. Вахитова // Научные ведомости БелГУ. Серия : Математика. Физика. — 2012. — № 23 (142), Вып. 29. — С. 5–13.

14. Вахитова Е.В. О выборе приближения числа элементов в последовательности значений неприводимого полинома от аргумента pq с ограничениями на p и q / Е.В. Вахитова, С.Р. Вахитова // Известия Саратовского ун-та. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика. — 2013. — Т. 13, Вып. 1, Ч. 1. — С. 3–8.

15. Вахитова Е.В. О выборе приближения числа элементов в последовательности специального вида / Е.В. Вахитова, С.Р. Вахитова // Вестник Воронежского государственного университета. Серия : Физика. Математика. — 2016. — № 3 — С. 112–120.

16. Бухштаб А. А. Комбинаторное усиление метода эратосфенова решета / А.А. Бухштаб // УМН, 1967. — Т. 22. — № 3 (135). — С. 199–226.

17. Richert H.–E. Selbergs sieve with weights / H.–E. Richert // Mathematika. — 1969. — V. 16, № 31. — P. 1–22.

18. Halberstam H. Sieve methods / H. Halberstam, H.-E. Richert. — London : Acad. Press, 1974. — 364 p.

19. Laborde M. Buchstabs sifting weights / M. Laborde // Mathematika. — 1979. — V. 26. — P. 250–257.

20. Бухштаб А.А. Асимптотическая оценка одной общей теоретикочисловой функции / А.А. Бухштаб // Матем. сб. — 1937. — Т. 2 (44), № 6. — С. 1239–1246.

21. Бухштаб А.А. Новые исследования по методу эратосфенова решета : дис. ... д-ра физико-матем. наук / А.А. Бухштаб. — М., 1944. — 129 с.

22. Вахитова Е.В. Сравнение весовых функций в методе весового решета / Е.В. Вахитова, С.Р. Вахитова // Ученые записки Орловского государственного университета. Труды X Междунар. конф. «Алгебра и теория чисел : современные проблемы и приложения». Волгоград, 10–16 сентября 2012 г. — Орел : Изд-во ОрлГУ, 2012. — № 6, Ч. 2. — С. 51–59.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ АЭРОУПРУГИХ СИСТЕМ[1]

П.А. Вельмисов, А.А. Молгачев,
Ю.В. Покладова (Ульяновск, УлГТУ)
velmisov@ulstu.ru

Рассматриваются математические модели динамики деформируемых элементов (упругих пластин), являющихся составными частями конструкций, находящихся во взаимодействии с потоком газа или жидкости (вибрационных устройств, защитных экранов, датчиков давления и др.).

Математические модели представляют собой начально-краевые задачи для связанных систем дифференциальных уравнений с частными производными для аэрогидродинамических функций и функций деформаций упругих элементов.

Для описания движения жидкости или газа в модели идеальной несжимаемой среды используется уравнение Лапласа

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0,$$

в модели идеальной сжимаемой среды — уравнение линейной теории

$$\varphi_{tt} + 2V\varphi_{xt} + V^2\varphi_{xx} = a_0(\varphi_{xx} + \varphi_{yy}),$$

или трансзвуковое нелинейное уравнение Линя–Рейснера–Тзяна

$$2\varphi_{xt} + (\gamma + 1)\varphi_x\varphi_{xx} - \varphi_{yy} = 0,$$

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Ульяновской области (проект № 18-41-730015).

где $\varphi(x, y, t)$ — потенциал скорости жидкости (газа); V, a_0 , γ — некоторые константы; индексы x, y, t снизу обозначают производные по x, y, t соответственно.

Для описания течения вязкой несжимаемой среды используются уравнения Навье–Стокса

$$\rho(u_t + uu_x + vu_y) = -p_x + \mu(u_{xx} + u_{yy}),$$

$$\rho(v_t + uv_x + vv_y) = -p_y + \mu(v_{xx} + v_{yy}), \;\; u_x + v_y = 0,$$

где $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$ — проекции вектора скорости жидкости; $p(x, y, t)$ — давление; ρ, μ — постоянные.

Для описания динамики упругих элементов (пластин) используется модель, учитывающая демпфирование продольного усилия и изгибающего момента пластины. В этом случае динамика упругих элементов описывается двумя уравнениями для продольных $\nu(x, t)$ и поперечных $w(x, t)$ деформаций:

$$m\nu_{tt}(x, t) - G_x(x, t) - \tau G_{xt}(x, t) + f(x, t, \nu, w, \nu_t, w_t) = F_x,$$

$$mw_{tt}(x, t) - [w_x(x, t)(G(x, t) + \tau G_t(x, t))]_x + M_{xx}(x, t)+$$

$$+\gamma M_{txx}(x, t) + g(x, t, \nu, w, \nu_t, w_t) = F_y.$$

Здесь $M(x, t) = EJ\frac{w_{xx}}{[1+2(\nu_x+\frac{1}{2}w_x^2)]^{\frac{3}{2}}}$ — изгибающий момент;

$G(x, t) = EF(\nu_x + \frac{1}{2}w_x^2)$ — продольное усилие; $F_x = \mu(u_y + v_x)$, $F_y = -p + 2\mu v_y$ — продольная и поперечная составляющие гидродинамической силы; $f(x, t, \nu, w, \nu_t, w_t)$, $g(x, t, \nu, w, \nu_t, w_t)$ — функции, описывающие некоторые внешние (например, управляющие) воздействия; m, EF, EJ, γ, τ — некоторые постоянные.

Предполагая деформации малыми, можно положить $M(x, t) = = EJ[w_{xx} - 3(\nu_x + \frac{1}{2}w_x^2)w_{xx}]$.

Для изучения колебаний упругих элементов использовались так же различные модели (как линейные, так и нелинейные), описываемые только одним уравнением для поперечных деформаций $w(x, t)$.

Исследование динамической устойчивости упругих элементов проводилось на основе функционалов типа Ляпунова и на основе численных методов, как для линейных, так и для нелинейных моделей. Приведены примеры численного эксперимента в задачах о динамике элементов различных аэроупругих конструкций.

Литература

1. Вельмисов П.А. Математическое моделирование в задачах динамики виброударных и аэроупругих систем / П.А. Вельмисов, В.К. Манжосов. — Ульяновск : УлГТУ, 2014. — 204 с.

2. Вельмисов П.А. Математическое моделирование динамики защитной поверхности резервуара / П.А. Вельмисов, Ю.В. Покладова // Вестник Ульяновского гос. тех. ун-та. — 2018. — №. 2. — С. 27–35.

3. Вельмисов П.А. О некоторых математических моделях механической системы «трубопровод–датчик давления» / П.А. Вельмисов, Ю.В. Покладова // Вестник Самарского гос. тех. ун-та. Сер. : Физ.-мат. науки. — 2018. — №. 1 (29). — С. 137–144.

СОСТАВНОЙ МЕТОД УВЕЛИЧЕНИЯ ЭФФЕКТИВНОСТИ СЖАТИЯ ИНФОРМАЦИИ

В.Н. Верещагин (Воронеж, ВНИИ «Вега»)
Slawa-W@mail.ru

Проблема увеличения эффективности функционирования информационных систем рассмотрена во многих работах, например в [1-3]. Для решения этой проблемы предлагается использовать комбинированный (составной) метод сжатия.

Под эффективностью сжатия понимается соотношение параметров степени сжатия и качества восстановления (например, их произведение, сумма и т.д.), характеризующих акт сжатия. Степень сжатия определяется коэффициентом сжатия K, равным отношению объёмов исходного (несжатого) изображения и данных сжатого изображения, а качество восстановления может определяться многими критериями, например, значением отношения пикового уровня сигнала к уровню шума $PSNR$ (обозн. $PSNR \equiv P$), получаемым путём сравнения исходного и восстановленного изображений [2]. Таким образом, каждый акт сжатия характеризуется парой чисел: (K, P). Любой метод сжатия характеризуется зависимостью $P = f(K)$ или $K = f^{-1}(P)$.

Теорема 1. *1. Если есть два метода сжатия, имеющие разные эффективности ($K_{10}P_{10} < K_{20}P_{20}$), и возможность последовательного сжатия этими методами, в результате чего получается составной метод, то эффективность этого составного*

метода будет удовлетворять условию: $K_{10}P_{10} < K_{12}P_{12} < K_{20}P_{20}$ *(*$K_{10}, K_{20} > 1$*).*

2. Если после сжатия методом 1 в результате досжатия методом 2 эффективность получившегося составного метода стала выше эффективности метода 1, то метод 2 эффективнее метода 1: если $K_{12}P_{12} > K_{10}P_{10}$*, то* $K_{20}P_{20} > K_{12}P_{12}$*.*

Теорема 2. *Качество восстановления составного метода удовлетворяет условию* $P_{21} < P_{12} < P_{22}$*, причем* P_{12} *определяется из уравнения:* $(P_{12} - P_{21})/(P_{22} - P_{12}) = K_{10}/K_{20}$*;* $K_{10}, K_{20} > 1$*. Аналогично можно определить* K_{12}*;*

$P_{21} = f_1(K_{10}K_{20})$, $P_{22} = f_2(K_{10}K_{20})$.

Разность между теоретическим и практическим значениями эффективности составного метода характеризует помехоустойчивость первого метода сжатия. Данную теорию можно обобщить на любое количество методов сжатия, а также на сжатие информации других типов. Таким образом, представлена новая теория сжатия (сжатие составным методом, в частности, с применением стеганографических функций с целью сжатия информации) и методика оценки эффективности сжатия информации составным методом (оценка качества).

Литература

1. Потапов А.А. Фракталы в радиофизике и радиолокации: Топология выборки. Изд. 2-е, перераб. и доп. / А.А. Потапов. — М. : Университетская книга, 2005. — 848 с.

2. Ватолин Д.С. Всё о сжатии данных, изображений и видео / Д.С. Ватолин // [Электронный ресурс]. URL: www.compression.ru (дата обращения: 15.12.2018).

3. Верещагин В.Н. Фрактальное сжатие графической информации с реализацией стеганографических функций для каналов связи с БПЛА / В.Н. Верещагин, Ю.В. Белозерцев, А.В. Велигоша, И.И. Пеленков // Теория и техника радиосвязи. — 2016. — №3. — С. 35–45.

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ СЖАТЫХ ИЗМЕРЕНИЙ В РАДИОФИЗИКЕ

В.Н. Верещагин (Воронеж, ВГУ)
Slawa-W@mail.ru

В современной теории обработки сигналов всё чаще возникают задачи сжатия данных [1-4]. К ним относятся, например, задачи сжатия информации, а также уменьшения количества необходимых измерений. Однако, существующие способы сжатия имеют недостаточную для решения практических задач эффективность [4, 5]. Поэтому представляют интерес поиск и разработка новых, более эффективных способов сжатия.

Известно, что любую матрицу можно привести к нормальной форме Фробениуса (НФФ) [6, 7]. Известен также метод А.М. Данилевского получения НФФ матрицы [7]. Вопросы же восстановления исходной матрицы из её НФФ недостаточно освещены в известной литературе. Исследования показали, что возможно однозначное восстановление, не требующее дополнительной информации, из НФФ исходной матрицы с помощью решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) на каждом из трёх этапов восстановления. Сложность восстановления заключается в том, что иногда необходимо решать СЛАУ большой размерности. Таким образом, можно представить n^2 чисел с помощью n чисел.

Найденный способ может использоваться во многих приложениях радиофизики, в частности, где требуется сжатие данных и (или) обеспечение помехозащищённости, например, при сжатии аналогового изображения, при передаче сигнала с некоторым набором квазигармонических составляющих в спектре, когда уменьшение количества этих составляющих позволит обеспечить низкое энергопотребление генератора и передатчика, а также высокую помехозащищённость.

Литература

1. Потапов А.А. Фракталы в радиофизике и радиолокации: Топология выборки / А.А. Потапов. — М. : Университетская книга, 2005. — 848 с.

2. Потапов А.А. Новейшие методы обработки изображений / А.А. Потапов. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2008. — 496 с.

---

3. Кашин Б.С. Замечание о задаче сжатого измерения / Б.С. Кашин, В.Н. Темляков // Математические заметки. — 2007. — Т. 82, вып. 6. — С. 829–837.

4. Ватолин Д.С. Всё о сжатии данных, изображений и видео / Д.С. Ватолин // [Электронный ресурс]. URL: www.compression.ru (дата обращения: 15.12.2018).

5. Граничин О.Н. Рандомизация получения данных и оптимизация (опознание со сжатием) / О.Н. Граничин, Д.В. Павленко // Автомат. и телемех. — 2010. — Т. 82, вып. 11. — С. 3–28.

6. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. 5-е изд. / Ф.Р. Гантмахер. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2010. — 560 с.

7. Березин И.С. Методы вычислений / И.С. Березин, Н.П. Жидков. — Т.2. — М. : ГИФМЛ, 1959. — 620 с.

РАЗРЕШИМОСТЬ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ-СТОКСА

Ю.П. Вирченко, А.В. Субботин (Белгород, БелГУ)
virch@bsu.edu.ru

Разрешимость начально-краевой задачи для базового уравнения Навье-Стокса (см., например, [1])

$$\dot{\mathbf{v}} + (\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v} = \eta \Delta \mathbf{v} \qquad (1)$$

динамики вязкой несжимаемой жидкости до сих остается одной из главных проблем современной математической физики. Особенно остро эта проблема стоит относительно существования глобальных по времени решений, описывающих трехмерные течения жидкости. Для двумерных течений в случае ограниченных областей эта проблема была положительно решена О.А. Ладыженской, которые суммированы в [2]. Кроме того, в трехмерном случае удалось доказать существование в трехмерном случае стационарных решений [3]. Однако, до настоящего времени, нет доказательства разрешимости начально-краевой задачи даже для двумерных течений в случае неограниченных областей при довольно широком предположении о форме области, занимаемой движущейся жидкостью. Сложность решения проблемы связана как с нелинейностью самого уравнения Навье-Стокса, так и с проблемой учета условия несжимаемости $(\nabla, \mathbf{v}) = 0$ при доказательстве существования решения.

В настоящем сообщении мы предлагаем такой метод учета дифференциальной связи, представляющей условие несжимаемости, который позволяет явно выделять класс векторных полей, где ставится начально-краевая задача. Этот метод позволяет непосредственно доказать разрешимость задачи для двумерных течений в неограниченных областях. Метод основан на выявлении необходимых и достаточных условий, которые автоматически обеспечивают выполнимость условия $(\nabla, \mathbf{v}) = 0$ для решений в течение эволюции. Ранее этот метод был использован [4] при анализе уравнения Эйлера при $\eta = 0$. Он основан на следующем утверждении.

Теорема 1. *Если гладкое векторое двумерное поле* $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ *удовлетворяет условию* $(\nabla, \mathbf{v}) = 0$*, то для того чтобы оно удовлетворяло уравнению (1), необходимо и достаточно чтобы матрица* $A_{jk} = \nabla_k v_j$ *была нильпотентной.*

Нильпотентность матрицы, позволяет в двумерном случае привести уравнение (1) к виду, который позволяет установить тот тип границ области Ω, в которой происходит движение жидкости, и класс векторных полей $\mathbf{v}(\mathbf{x}, 0)$, представляющих начальные условия, для которых существует глобальное решение начально-краевой задачи для уравнения (1). В частности, доказана

Теорема 2. *Для того, чтобы начально-краевая задача для двумерного гладкого поля* $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$*, заданного на всем пространстве* $\mathbb{R}^2$*, которое удовлетворяет уравнению (1) и условию*

$$(\nabla, \mathbf{v}) = 0\,,$$

была разрешима, необходимо и достаточно чтобы это поле представляло плоско-параллельное течение, то есть

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{a} f\big((\mathbf{n}, \mathbf{x}), t\big)\,,$$

где $(\mathbf{a}, \mathbf{n}) = 0$ *При этом функция* $f(\zeta, t)$ *удовлетворяет уравнению*

$$\dot{f} = \eta f''\,,$$

Здесь штрих обозначает дифференцирование по переменной ζ.

Литература

1. Ландау Л.Д. Гидродинамика / Л.Д. Ландау, М.А Лифшиц. — М. : Наука, 1986. — 736 с.

2. Ладыженская О.А. Математические вопросы движения вязкой жидкости / О.А. Ладыженская. — М. : Наука, 1970.

3. Ладыженская О.А. Исследование уравнения Навье-Стокса в случае стационарного движения несжимаемой жидкости / О.А. Ладыженская // Успехи мат. наук. — 1959. — Т. XIV, № 3(87). — С. 75–97.

4. Вирченко Ю.П. Стационарные плоские течения в гидродинамике идеальной несжимаемой жидкости / Ю.П. Вирченко // Второй Международный Российско-Казахский симпозиум «Уравнения смешанного типа, родственные проблемы анализа и информатики», 23–27 мая 2011 г. — Кабардино-Балкарская Республика, Приэльбрусье. — Нальчик : НИИ ПМА КБНЦ РАН, 2011. — С. 70–72.

ОПИСАНИЕ КЛАССА ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ ФЕРРОДИНАМИКИ

Ю.П. Вирченко, А.В. Субботин (Белгород, БелГУ)
virch@bsu.edu.ru

В теории магнетизма существует теоретическая проблема, связанная с построением адекватного эволюционного уравнения, описывающего на макроскопическом уровне изменения со временем t пространственного распределения плотности магнитного момента $\mathbf{M}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ ферромагнитных материалов [1]. Обычно используемое в ферродинамике т.н. *уравнение Ландау-Лифшица*, которое, в простейшей ситуации сферически симметричного ферромагнетика в отсутствие внешнего магнитного поля, имеет вид

$$\dot{\mathbf{M}} = \gamma[\mathbf{M}, \Delta\mathbf{M}]\,, \qquad (1)$$

несмотря на широкое применение в приложениях, а также его интенсивное изучение с математической точки зрения [2], обладает двумя свойствами, которые не позволяют его считать, вполне адекватным описываемой физической ситуации. Во-первых, это уравнение не описывает диссипативных процессов (магнитного трения), так как линейный оператор, получаемый линеаризацией правой части (1), не является диссипативным. Во-вторых, это уравнение не обладает инваринатом $(\nabla, \mathbf{M})$, что не обеспечивает выполнимость условия соленоидальности $(\nabla, \mathbf{M}) = 0$ поля $\mathbf{M}(\mathbf{x}, t)$ в течение эволюции, а это необходимо, так как в отсутствии внешнего магнитного поля, поле $\mathbf{M}$ представляет поле магнитной индукции внутри ферромагнитной среды.

В связи с описанной ситуацией, возникает математическая задача о перечислении всего класса допустимых эволюционных уравнений для псевдовекторного поля $\mathbf{M}(\mathbf{x}, t)$ таких, которые обладают двумя инвариантами $\mathbf{M}^2(\mathbf{x}, t) = \text{const}$, как это имеет место для уравнения (1), и $(\nabla, \mathbf{M}) = 0$. Доказаны следующие утверждения.

Теорема 1. *Если гладкое псевдовекторое поле* $\mathbf{M}(\mathbf{x}, t)$ *унимодально* $\mathbf{M}^2(\mathbf{x}, t) = const$ *и если его изменение со временем подчинено дифференциальному уравнению второго порядка по* $\mathbf{x}$*, которое имеет дивергентный тип* $\dot{M}_i = \nabla_j S_{ij}[\mathbf{M}]$*, где* $S_{ij}[\mathbf{M}]$ *– псевдотензорное поле, представляемое действием на* $\mathbf{M}$ *трансляционно инвариантного дифференциального оператора (квазинелинейного) первого порядка, ковариантного при действии группы* $\mathbb{O}_3$*, то класс всех таких операторов* $S_{ij}[\mathbf{M}]$ *полностью описывается линейной суперпозицией следующих линейно независимых операторов:*

$$\varepsilon_{ikl} M_k \nabla_j M_l, \quad \varepsilon_{jkl} M_k \nabla_l M_i, \quad M_i \varepsilon_{jkl} \nabla_k M_l, \quad \varepsilon_{ikl} M_j M_k M_n \nabla_n M_l \,.$$

Теорема 2. *Если гладкое псевдовекторое поле* $\mathbf{M}(\mathbf{x}, t)$ *унимодально* $\mathbf{M}^2(\mathbf{x}, t) = const$ *и соленоидально, а его изменение со временем подчинено дифференциальному уравнению второго порядка дивергентного типа* $\dot{M}_i = \nabla_j S_{ij}[\mathbf{M}]$ *с псевдотензорным полем* $S_{ij}[\mathbf{M}]$*, представляющим действие на* $\mathbf{M}$ *трансляционно инвариантного дифференциального оператора первого порядка, ковариантного при действии группы* $\mathbb{O}_3$*, то класс таких операторов* $S_{ij}[\mathbf{M}]$ *состоит из однопараметрического семейства операторов* $\gamma M_i \varepsilon_{jkl} \nabla_k M_l$*.*

Вычисление символа линеаризации оператора $\gamma M_i \varepsilon_{jkl} \nabla_k M_l$ показывает, что этот оператор не является диссипативным. Таким образом, в случае сферически симметричного ферромагнитного материала невозможно построить эволюционное уравнение вида $\dot{M}_i = \nabla_j S_{ij}[\mathbf{M}]$, удовлетворяющее сформулированным в водной части условиям.

Литература

1. Ахиезер А.И. Спиновые волны / А.И. Ахиезер, В.Г. Барьяхтар, С.В. Пелетминский. — М. : Наука, 1967. — 368 с.

2. Косевич А.М. Нелинейные волны намагниченности / А.М. Косевич, Б.А. Иванов, А.С. Ковалев. — К. : Наукова думка, 1988. — 192 с.

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ИНВЕСТИЦИОННЫМ ПОТОКОМ

О.В. Владимирова, М.И. Ковалева, И.В. Колесникова, Ю.И. Сапронов (Воронеж, ВГУ; ВУНЦ ВВС «ВВА»)
kolinna@inbox.ru

В данной работе рассмотрена феноменологическая модель автоматического управления инвестиционным потоком, основанная на аналогии с «самоуправляемым» движением жидкости в рамках модели Навье-Стокса, определяющей поле скоростей жидкости. Рассмотрен аналог уравнения Навье-Стокса, приспособленный для изучения многокомпонентного потока инвестиций при условии прилипания изображающей точки на границе «экономической области» (обращение в ноль вектора скорости потока). В случае стационарного потока предложена методика приближенного вычисления поля скоростей посредством метода Галеркина и его обобщения.

Важными показателями удачного моделирования являются такие факторы, как 1) сбалансированность инновационных мероприятий, отсутствие «перекосов», соблюдение допустимых пропорций между компонентами инновационной системы в целом; 2) регулярное и оптимальное использование инновационных заимствований; 3) недопустимость рискованных инвестиций. Правомерность и актуальность такой точки зрения в условиях российской экономики подтверждается в [1].

Выяснение закономерностей рождения и распространения технологических инноваций, объемов продаж, товарных потоков и т.п. позволяет объяснять некоторые экономические явления.

Известная модель Полтеровича-Хенкина [2]-[3] позволяет достаточно точно описывать эволюцию распределения предприятий по уровням технологической эффективности, но оставляет без ответа, например, вопрос о причине перехода предприятий к той или иной инновационной стратегии. Почему одни предприятия переходят к заимствованию более эффективной технологии, а другие — нет? Почему одни это делают быстрее, а другие — медленнее? Считается, что в модели Полтеровича-Хенкина нет соответствующих переменных, на основе которых можно было бы бы прояснить возникающие эффекты [4].

Структурную перестройку физической среды часто объясняют на основе нелинейного диффузионного уравнения Кана-Хилларда

$$\dot{u} = \Delta \operatorname{grad} V(u) := \mathcal{D}\,\Delta(u^3 - u - \gamma\Delta(u))$$

и ему подобных уравнений. Здесь $u = u(x)$ — относительная концентрация компонента вещества, $x \in U \subset \mathbb{R}^m$, $1 \leqslant m \leqslant 3$, $\mathcal{D}$ — коэффициент диффузии,

$$V(u) := \mathcal{D}\int\limits_U \left(\frac{(u^2-1)^2}{4} + \gamma\frac{|\nabla u|^2}{2}\right) dx$$

— интеграл энергии, U — область, занятая изучаемой средой.

Близким, но более простым уравнением, также способным моделировать структурные превращения, является широко известное уравнение диффузии с квадратично-кубической нелинейностью:

$$\dot{w} = -\operatorname{grad} V(w) := \Delta(w) + \lambda w - a\,w^2 - w^3,$$

где $w = w(x)$ — концентрация изучаемого компонента вещества (распределение инвестиции), $x \in U \subset \mathbb{R}^2$ (двумерная задача),

$$V(w) := \iint\limits_U \left(\frac{|\nabla w|^2}{2} - \lambda\frac{w^2}{2} + a\,\frac{w^3}{3} + \frac{w^4}{4}\right) dx_1\,dx_2$$

— интеграл энергии (действия), $U = [0,1] \times [0,1]$ — область, занятая изучаемой средой (в экономике — это область инвестирования, выраженная, например, показателями производительности). Стабильные (устойчивые) фазы соответствуют точкам минимума функционала энергии. Как правило, предполагается выполнение граничного условия Неймана

$$\left.\frac{\partial w}{\partial n}\right|_{\partial U} = 0,$$

где ∂U — граница области U, n — векторное поле нормалей к границе, и выполнено естественное ограничение (на количество компонента в целом)

$$\iint\limits_U w(x_1, x_2)\,dx_1\,dx_2 \ = c = \mathrm{const} > \ 0.$$

В случае инвестиций этот интеграл можно интерпретировать как запланированные издержки на закупку нового оборудования.

В случае моделирования одномерного (однокомпонентного) инвестиционного потока рассматриваются инновационные циклы, описываемые логистической кривой. При этом считается, что цикл инноваций начинается с кумулятивного накопления инновационного ресурса. Достижение некоторого критического уровня ресурса порождает переход к экспоненциальному росту инновационного процесса. При подходе к состоянию насыщения происходит замедление темпов роста, экспоненциальный участок траектории инновационного процесса заменяется логарифмическим. Жизненный цикл инноваций завершается и наступает стадия сворачивания производства.

В данной работе предложен прямой подход к описанию влияния технологической диффузии на распределение многокомпонентных инвестиций, основанный на обобщенной гидродинамической аналогии: поток инвестиций сравнивается с потоком многомерной жидкости, и при этом учитывается прямой обмен инновационными ресурсами.

В работах [2], [3] построена дискретнаяx модель взаимодействия между объемом внедренных инноваций (на заданном предприятии) и объемом предстоящего (необходимого) инвестирования инноваций, основанная на (модельном) уравнении

$$\dot{x}_n = (-\alpha + \beta(1 - x_n))(x_n - x_{n-1}) + \mu(x_{n+1} - x_n)\,,$$

носящем в настоящее время название «уравнение Полтеровича-Хенкина». В этом уравнении x_n — объем необходимого инвестирования инноваций. Это уравнение можно переписать в виде

$$\dot{x}_n = \mu(x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}) - \gamma(x_n - x_{n-1}) + \beta(1 - x_n)(x_n - x_{n-1}),$$

где $\gamma = \alpha + \mu$, что позволяет воспринимать уравнение как разностную аппроксимацию «непрерывного» модельного уравнения

$$\dot{x} = \mu\, x'' - \gamma\, x' + \beta\,(1 - x)(x')$$

или

$$\dot{x} = \mu\, x'' - (\gamma - \beta + \beta\, x)x'\,.$$

Здесь $x = x(s, t)$ — скорость инвестирования, зависящая от инновационного внедрения s и времени t. Сделав замену $\gamma - \beta + \beta\, x =$

y, получим, после отбрасывания общего множителя β и переноса конвективного члена $\beta\, y\, y'$ в левую часть, уравнение Бюргерса $\dot{y} + y'\, y = \mu\, y''$, которое можно исследовать разнообразными методами, включая приближенные методы изучения посткритических структурных перестроек, изложенные в [5], [6], [7].

Для повышения точности модели Бюргерса (рассмотренного как одномерный вариант классического уравнения Навье-Стокса) можно ввести дополнительное слагаемое $v\,\left(\lambda - \|v\|^2\right)$, учитывающее прямой (механический) обмен инновационными ресурсами. В результате получим более общее модельное уравнение в виде

$$\dot{v} + \frac{\partial v}{\partial x}\, v = \mu\, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + v\,\left(\lambda - v^2\right). \tag{1}$$

Анализ решений уравнения (1) базируется на вычислении собственных функций и собственных значений операторного пучка $A + \lambda I \,:\, E \to F$, $A = \frac{d^2}{dx^2}$ при краевых условия Дирихле: $E = \{u \in C^2[0,1] \,:\, u(0) = u(1) = 0\}$, $F = C[0,1]$. Собственные функции операторного пучка $A + \lambda\, I$ в пространстве E определяются формулой $e_k = \sqrt{2}\, \sin(\pi\, k\, x)$, эта функция отвечает собственному значению $\lambda = (\pi\, k)^2$. Приближение Бубнова-Галеркина по n модам к решению уравнения (1) имеют вид $v(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k(t) e_k(x)$. Поток инвестиций определяется дифференциальным уравнением $\dot{x} = v(x,t)$. Графики скоростей инвестиционных поступлений представляют собой разновидности S-образных кривых.

В более общем многомерном случае (для фирмы, состоящей из нескольких предприятий) можно поток инвестиций «уподобить потоку воды» и, таким образом, перенести на область экономической динамики, связанной с планированием потоков инвестиций и их управлением, методы многомерной гидродинамики (на основе многомерного уравнения Навье-Стокса и его обобщений). Возможно, на этом пути можно обнаружить новые полезные правила в «организации динамики» инвестиций и инноваций.

Стационарный вариант уравнения (1) приводит, после соответствующей перепараметризации, к краевой задаче

$$\frac{d^2 v}{dr^2} + \lambda\, v - v^3 + \varepsilon\, \frac{dv}{dr}\, v = q\,, \qquad q = q(r)\,,$$

$$v(0) = v(1) = 0.$$

Если параметр ε достаточно мал и $\lambda = \pi^2 + \delta$, где δ — малый положительный параметр, то в этой задаче можно применить методику М.А. Малюгиной [8]–[12], разработанную для случаев нарушения потенциальности. При конечных приращениях λ можно воспользоваться методикой, изложенной в [7], [13], основанной на аппроксимациях Галеркина.

Литература

1. Медведев Д.А. Социально-экономическое развитие России : обретение новой динамики / Д.А. Медведев // Вопросы экономики. — 2016. — №10. — С. 5–30.

2. Полтерович В.М. Эволюционная модель взаимодействия процессов создания и заимствования технологий / В.М. Полтерович, Г.М. Хенкин // Экономика и математические методы. — 1988. — Т. XXIV, вып. 6. — С. 1071–1083.

3. Полтерович В.М. Гипотеза об инновационной паузе и стратегия модернизации / В.М. Полтерович // Вопросы экономики. — 2009. — № 6. — С. 4–22.

4. Балацкий Е.В. Моделирование процессов межсекторальной конкуренции / Е.В. Балацкий // Общество и экономика. — 2008. — № 5. — С. 54–70.

5. Красносельский М.А. Приближенное решение операторных уравнений / М.А. Красносельский, Г.М. Вайникко, П.П. Забрейко, Я.Б. Рутицкий, В.Я. Стеценко. — М. : Наука, 1969. — 456 с.

6. Красносельский М.А. Геометрические методы нелинейного анализа / М. А. Красносельский, П.П. Забрейко. — М. : Наука, 1975. — 512 с.

7. Коротких А.С. К моделированию структурной перестройки посредством нелинейного уравнения диффузии / А.С. Коротких, Д.В. Костин, Т.И. Костина, Ю.И. Сапронов // Насосы. Турбины. Системы. — Воронеж : ООО ИПЦ «Научная книга». — 2015. — №1 (14). — С. 81–85.

8. Малюгина М.А. К анализу посткритических прогибов слабо неоднородных упругих систем в условиях нарушения потенциальности / М.А. Малюгина // Семинар по глобальному и стохастическому анализу. Сборник научных статей под ред. Ю.Е. Гликлиха и Ю.И. Сапронова. — Воронеж : ВГУ, 2009. – Вып. 4. — С. 32–37.

9. Малюгина М.А. Бифуркационный анализ краевых задач в условиях нарушения потенциальности / М.А. Малюгина // Международная конференция «Современные проблемы математики, механики и их приложений», посвященная 70-летию ректора МГУ

им. М.В. Ломоносова академика В.А. Садовничего : материалы конференции, Москва, 30 марта — 3 апреля 2009 г. — М. : Изд-во «Университетская книга», 2009. — С. 173.

10. Малюгина М.А. Анализ уравнения конфигураций слабо неоднородных упругих систем при двухмодовом вырождении в условиях нарушения потенциальности / М.А. Малюгина // Крымская Осенняя Математическая школа-симпозиум (КРОМШ-2010). Двадцать первая ежегодная международная конференция. Тезисы докладов. — С. 29.

11. Малюгина М.А. Двумерные локальные сечения дискриминантного множества уравнения Ка́рмана при наличии неконсервативной силы / М.А. Малюгина // Математические модели и операторные уравнения. — Воронеж : ВГУ. — 2011. – Т. 7. — С. 160–169.

12. Малюгина М.А. Сечение дискриминантных множеств слабо неоднородных упругих систем в условиях нарушения потенциальности / М.А. Малюгина // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика. Математика. — 2011. — № 1. — С. 187–192.

13. Коротких А.С. Бифуркации стационарных решений уравнения «реакция-диффузия» и переход концентраций в стабильное состояние / А.С. Коротких // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика. Математика. — 2017. — № 1. — С. 115–127.

О МАЛЫХ КОЛЕБАНИЯХ СОЧЛЕНЁННЫХ МАЯТНИКОВ С ПОЛОСТЯМИ, ЗАПОЛНЕННЫМИ НЕСМЕШИВАЮЩИМИСЯ ЖИДКОСТЯМИ[1]

В.И. Войтицкий, Н.Д. Копачевский (Симферополь,
Крымский федеральный университет им. В.И. Вернадского)
victor.voytitsky@gmail.com, kopachevsky@list.ru

Сочленёнными маятниками называют такую систему связанных друг с другом тел, когда первый маятник закреплён в неподвижной точке с помощью сферического шарнира, второй подобным образом прикреплён к первому и т.д. В работе изучен случай трёх сочленённых маятников, содержащих по одной полости, целиком заполненной жидкостями, когда в полости первого маятника находятся две идеальные жидкости, в полости второго — три вязкие жидкости, в полости третьего — одна идеальная жидкость. Это ва-

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке второго соавтора грантом Министерства образования и науки РФ (проект 14.Z50.31.0037).

риант частично диссипативной гидромеханической системы, в которой диссипация энергии происходит за счёт трения в гарнирах и действия вязких сил (второй маятник).

Предполагается, что в состоянии равновесия в поле сил тяжести все точки подвеса и все центры масс маятников находятся на одной вертикальной оси, а границы раздела между жидкостями горизонтальны. При изучении линеаризованной задачи о малых колебаниях этой системы выделены динамические и кинематические переменные, описывающие её движение. Это наборы полей скоростей жидкости в полостях и угловые скорости маятников (динамические переменные), а также наборы полей отклонений границ раздела жидкостей и угловые перемещения маятников (кинематические переменные).

Предварительно изучены вспомогательные начально-краевые задачи о малых движениях одиночных маятников с тремя описанными видами заполнения полости жидкостями. При исследовании применены методы функционального анализа, теория линейных операторов, действующих в гильбертовом пространстве и теория полугрупп операторов.

Для трёх вспомогательных задач и общей задачи о колебаниях системы сочленённых маятников установлено, что каждая из задач приводится в соответственно подобранном гильбертовом пространстве $H = H_1 \oplus H_2$ к задаче Коши вида

$$\begin{cases} C_1 \dfrac{dz_1}{dt} + A_1 z_1 + gB_{12} z_2 = f_1(t), \quad z_1(0) = z_1^0; \\ gC_2 \dfrac{dz_2}{dt} + gB_{21} z_1 = 0, \quad z_2(0) = z_2^0, \end{cases} \tag{1}$$

где $z_1 \in H_1$ — набор динамических переменных, $z_2 \in H_2$ — набор кинематических переменных, $0 \ll C_1 \in \mathcal{L}(H_1)$ — оператор кинетической энергии, $C_2 = C_2^* \in \mathcal{L}(H_2)$ — оператор потенциальной энергии, $0 \leqslant A_1$ — оператор диссипации энергии, а B_{12} и $B_{21} = -B_{12}^*$ связаны с обменом между кинетической и потенциальной энергиями системы.

Для задачи (1) выведен закон баланса полной энергии и доказана теорема о сильной (по переменной t) разрешимости этой задачи на произвольном отрезке времени $[0; T]$ как в случае статической устойчивости ($C_2 \gg 0$), так и в случае статической неустойчивости.

Для трёх вспомогательных задач и общей задачи рассмотрена проблема собственных (нормальных) колебаний. Изучен случай консервативной системы, когда все жидкости в полостях являются идеальными и трение в шарнирах отсутствует. Получены новые вариационные принципы для нахождения частот и мод собственных колебаний маятников.

Литература

1. Жуковский Н. Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью / Н. Е. Жуковский // Избранные сочинения. — Т. 1. — М.–Л. : Гостехиздат, 1948. — С. 31–52.

2. Копачевский Н. Д. Операторные методы в линейной гидродинамике. Эволюционные и спектральные задачи / Н. Д. Копачевский, С. Г. Крейн, Нго Зуй Кан. — М. : Наука, 1989. — 416 с.

3. Батыр Э. И. Малые движения и нормальные колебания системы сочлененных гиростатов / Э. И. Батыр, Н. Д. Копачевский // Современная математика. Фундаментальные направления. — Т. 49 (2013). — С. 5–88.

4. Копачевский Н. Д. О колебаниях двух сочлененных маятников, содержащих полости, частично заполненные несжимаемой жидкостью / Н. Д. Копачевский, В. И. Войтицкий, З. З. Ситшаева // Современная математика. Фундаментальные направления. — Т. 63, № 4 (2017). — С. 627-677.

5. Войтицкий В. И. О малых колебаниях системы из трёх сочленённых маятников с полостями, заполненными несмешивающимися несжимаемыми жидкостями / В. И. Войтицкий, Н. Д. Копачевский // Материалы международной научной конференции «Современные методы и проблемы математической гидродинамики–2018» (3-8 мая 2018 г., Воронеж), 2018. — С. 84-91.

МОДИФИЦИРОВАННЫЕ ДРОБНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ХАРДИ И ХАРДИ-ЛИТТЛВУДА В НЕКОТОРЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

С.С. Волосивец, Б.И. Голубов

(Саратов, СГУ; Москва, МФТИ)

volosivetsss@mail.ru, golubov@mail.mipt.ru

Пусть $\mathbf{P} = \{p_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ такова, что $2 \leqslant p_n \leqslant N$, $n \in \mathbb{N}$. Положим $m_0 = 1$, $m_n = p_1 \dots p_n$ при $n \in \mathbb{N}$ и $p_{-n} = p_n$, $m_{-n} = m_n^{-1}$ при

$n \in \mathbb{N}$. Тогда каждое число $x \in \mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ записывается в виде

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_{-n} m_{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} x_n / m_n, \quad x_n \in \mathbb{Z} \cap [0, p_n), \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \ (1)$$

Здесь первая сумма конечна и для $x = l/m_k$, $l \in \mathbb{Z}_+$, $k \in \mathbb{Z}$, мы выбираем разложение с конечным числом $x_n \neq 0$. Для $x \in [m_{n-1}, m_n)$, $n \in \mathbb{Z}$, положим $|x|_{\mathbf{P}} = m_n$, а $|0|_{\mathbf{P}} = 0$, тогда $N^{-1}|x|_{\mathbf{P}} \leqslant x \leqslant |x|_{\mathbf{P}}$ для всех $x \in \mathbb{R}_+$. Для x, y, записанных в виде (1), по определению $x \ominus y = z = \sum_{n=1}^{\infty} z_{-n} m_{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} z_n / m_n$, где $x_n \in \mathbb{Z} \cap [0, p_n)$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ и $z_n = x_n - y_n \pmod{p_n}$. Подробнее см. в [1,§ 1.5].

Пусть $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$. Тогда положим $|\mathbf{x}|_{\mathbf{P}} := \max(|x_1|_{\mathbf{P}}, \ldots, |x_n|_{\mathbf{P}})$, $B_k(\mathbf{a}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n : |\mathbf{x} - \mathbf{a}|_{\mathbf{P}} \leqslant m_k\}$ и $S_k(\mathbf{a}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n : |\mathbf{x} - \mathbf{a}|_{\mathbf{P}} = m_k\}$, $k \in \mathbb{Z}$, где $\mathbf{a} \in \mathbb{R}_+^n$. Через B_k и S_k обозначаем $B_k(\mathbf{0})$ и $S_k(\mathbf{0})$, где $\mathbf{0}$ — нуль $\mathbb{R}^n$.

Будем рассматривать дробные операторы типа Харди-Литтлвуда и Харди (при $0 \leqslant \beta \leqslant n$)

$$B_\beta(\mathbf{P}, f)(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|_{\mathbf{P}}^{\beta - n} \int_{|\mathbf{t}|_{\mathbf{P}} \leqslant |\mathbf{x}|_{\mathbf{P}}} f(\mathbf{t})\, d\mathbf{t},$$

$$H_\beta(\mathbf{P}, f)(\mathbf{x}) = \int_{|\mathbf{t}|_{\mathbf{P}} \geqslant |\mathbf{x}|_{\mathbf{P}}} |\mathbf{t}|_{\mathbf{P}}^{\beta - n} f(\mathbf{t})\, d\mathbf{t}$$

и, для $b \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N_+)$, их коммутаторы $B_{\beta,b}(\mathbf{P}, f)(\mathbf{x}) = b(\mathbf{x}) B_\beta(\mathbf{P}, f)(\mathbf{x}) - B_\beta(\mathbf{P}, bf)(\mathbf{x})$ и $H_{\beta,b}(\mathbf{P}, f)(\mathbf{x})) = b(\mathbf{x}) H_\beta(\mathbf{P}, f)(\mathbf{x}) - H_\beta(\mathbf{P}, bf)(\mathbf{x})$. Дробные операторы Харди и Харди-Литтлвуда известны в гармоническом анализе (см. например, [2]). Что касается модифицированных операторов, то при $n = 1$ они были введены вторым из авторов [3]. Они удобнее тем. что для их ограниченности в различных пространствах часто нужны более слабые условия, чем для обычных.

Для $f \in L^1(B_k(\mathbf{a}))$ положим $f_{B_k(\mathbf{a})} = |B_k(\mathbf{a})|^{-1} \int_{B_k(\mathbf{a})} f(\mathbf{t})\, d\mathbf{t}$. Функция $f \in L^q_{loc}(\mathbb{R}^n_+)$, $1 \leqslant q < \infty$, принадлежит классу $CMO^q(\mathbf{P}, \mathbb{R}^n_+)$, если

$$\|f\|_{CMO^q} := \sup_{k \in \mathbb{Z}} \left(|B_k(\mathbf{0})|^{-1} \int_{B_k(\mathbf{0})} |f(\mathbf{t}) - f_{b_k(\mathbf{0})}|^q\, d\mathbf{t} \right)^{1/q} < \infty.$$

Пусть $\alpha > 0$. Будем писать $f \in \Lambda_\alpha(\mathbf{P}, \mathbb{R}^n_+)$, если $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| \leqslant C|\mathbf{x} \ominus \mathbf{y})|_{\mathbf{P}}^{\alpha}$, где $|\mathbf{x} \ominus \mathbf{y})|_{\mathbf{P}} = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i \ominus y_i|_{\mathbf{P}}$.

Рассмотрим весовую функцию $w(x)$, измеримую по Лебегу и п.в. положительную на $\mathbb{R}^n_+$. Тогда пространство $L^q_w(\mathbb{R}^n_+)$, $1 \leqslant q < \infty$, состоит из функций с конечной нормой $\|f\|_{q,w}= \Big(\int_{\mathbb{R}^n_+} |f(\mathbf{t})|^q w(\mathbf{t})\, d\mathbf{t}\Big)^{1/q}$. Введем обозначение $w_\delta(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|^{\delta}_{\mathbf{P}}$.

Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < q, r < \infty$ и $\lambda > 0$. Тогда пространство Морри-Герца $MK^{\alpha,\lambda}_{q,r}(\mathbf{P}, \mathbb{R}^n_+)$ состоит из функций $f \in L^q_{loc}(\mathbb{R}^n \setminus \mathbf{0})$, для которых

$$\|f\|_{MK^{\alpha,\lambda}_{q,r}} := \sup_{s \in \mathbb{Z}} m_s^{-\lambda} \left(\sum_{k=-\infty}^{s} m_k^{\alpha q} \|f X_{S_k}\|_r^q \right)^{1/q} < \infty.$$

Здесь, как обычно, $\|f\|_r = \Big(\int_{\mathbb{R}^n_+} |f(\mathbf{t})|^r\, d\mathbf{t}\Big)^{1/r}$ — норма или квазинорма в пространстве $L^r(\mathbb{R}^n_+)$, X_E — характеристическая функция множества E. При $\lambda = 0$ получаем определение пространства Герца $K^{\alpha,q}_r(\mathbf{P}, \mathbb{R}^n_+)$. По поводу классических пространств Герца и Морри см. [4] и [5], p-адические модификации этих и других пространств см. в [6].

Первые две теоремы посвящены условиям ограниченности коммутаторов.

Теорема 1. *Пусть* $\beta \geqslant 0$, $0 < q_1 \leqslant q_2 < \infty$, $1 < r_1 < \infty$, $1/r_1 - 1/r_2 = \beta/n$, $1/r_1 + 1/r_1' = 1$, $\gamma = \max(r_1', r_2)$ *и* $b \in CMO^\gamma(\mathbf{P}, \mathbb{R}^n_+)$. *Тогда*

1) если $\alpha < n/r_1'$, *то* $\|B_{\beta,b}(\mathbf{P}, f)\|_{K^{\alpha,q_2}_{r_2}} \leqslant C\|b\|_{CMO^\gamma}\|f\|_{K^{\alpha,q_1}_{r_1}}$;

2) если $\alpha > -n/r_2$, *то* $\|H_{\beta,b}(\mathbf{P}, f)\|_{K^{\alpha,q_2}_{r_2}} \leqslant C\|b\|_{CMO^\gamma}\|f\|_{K^{\alpha,q_1}_{r_1}}$.

Теорема 2. 1) *Пусть* $1 < p \leqslant q < \infty$, $0 \leqslant \beta < n$, $\alpha > 0$, $b \in \Lambda_\alpha(\mathbf{P}, \mathbb{R}^n_+)$, $\delta, \gamma \in \mathbb{R}$ *удовлетворяют условиям* $\alpha + \beta + \delta/q = \gamma/p + n(1/p - 1/q)$ *и* $q(\alpha + \beta) + \delta > n(q-1)$. *Тогда коммутатор* $B_{\beta,b}(\mathbf{P}, f)$ *действует из* $L^p_{w_\gamma}(\mathbb{R}^N_+)$ *в* $L^q_{w_\delta}(\mathbb{R}^N_+)$.

2) *Пусть* $1 < p \leqslant q < \infty$, $0 \leqslant \beta < n$, $\alpha > 0$, $b \in \Lambda_\alpha(\mathbf{P}, \mathbb{R}^n_+)$, $\delta, \gamma \in \mathbb{R}$ *удовлетворяют условиям* $\alpha + \beta + \delta/q = \gamma/p + n(1/p - 1/q)$ *и* $\gamma < (\alpha + \beta)p - n$. *Тогда коммутатор* $H_{\beta,b}(\mathbf{P}, f)$ *действует из* $L^p_{w_\gamma}(\mathbb{R}^N_+)$ *в* $L^q_{w_\delta}(\mathbb{R}^N_+)$.

Следующая теорема показывает, что условие $b \in CMO^\gamma(\mathbf{P}, \mathbb{R}^n_+)$ в п. 1) теоремы 1 нельзя ослабить.

Теорема 3. *Пусть* $\alpha > 0$ *и* $1 < r_1' < r < r_2$ *(т.е.* $\gamma = r_2$ *в обозначениях теоремы 1) и выполняются другие условия теоремы*

1. Тогда существуют $b \in CMO^{r}(\mathbf{P},\mathbb{R}^n_+) \setminus CMO^{r_2}(\mathbf{P},\mathbb{R}^n_+)$ *и* $f \in K^{\alpha,q_1}_{r_1}(\mathbf{P},\mathbb{R}^n_+)$, *такие что* $B_{\beta,b}(\mathbf{P},f) \notin K^{\alpha,q_2}_{r_2}$.

Последняя теорема посвящен условиям ограниченности самих дробных модифицированных операторов Харди и Харди-Литтлвуда в пространствах Морри-Герца.

Теорема 4. *Пусть* $0 < q_1 \leqslant q_2 < \infty$, $1 < r_1 < r_2 < \infty$, $0 \leqslant \beta < n$, $1/r_1 - 1/r_2 = \beta/n$ *и* $\lambda \geqslant 0$.

1) *Если* $\alpha < n/r_1' + \lambda$, *то* $\|B_\beta(\mathbf{P},f)\|_{MK^{\alpha,\lambda}_{q_2,r_2}} \leqslant C\|f\|_{MK^{\alpha,\lambda}_{q_1,r_1}}$.

2) *Если* $\alpha > -n/r_2 + \lambda$, *то* $\|H_\beta(\mathbf{P},f)\|_{MK^{\alpha,\lambda}_{q_2,r_2}} \leqslant C\|f\|_{MK^{\alpha,\lambda}_{q_1,r_1}}$.

Литература

1. Голубов Б.И. Ряды и преобразования Уолша / Б.И. Голубов, А.В. Ефимов, В.А. Скворцов. — М. : Наука, 1987. — 344 с.

2. Andersen K.F. Weighted weak type Hardy inequalities with applications to Hilbert transforms and maximal functions / K.F. Andersen, B. Muckenhoupt // Studia Math. — 1982. — Vol. 72, №1. — P. 9–26.

3. Голубов Б.И. О двоичных аналогах операторов Харди и Харди-Литтлвуда / Б.И. Голубов // Сиб. матем. журнал. — 1999. — Т. 40, вып. 6. — С. 1244–1252.

4. Herz C. Lipschitz spaces and Bernstein's theorem on absolutely convergent Fourier transforms / C. Herz // J. Math. Mech. — 1968. — Vol. 18, №4. — P. 283–324.

5. Morrey C. On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations / C. Morrey // Trans. Amer. Math. Soc. — 1938. — Vol. 43, №1. — P. 126–166.

6. Chuong N.M. Weighted Hardy-Littlewood operators and commutators on p-adic functional spaces / N.M. Chuong, D.V. Duong // p-Adic Numb. Ultr. Anal. Appl. — 2013. — Vol. 5, №1. — P. 65–82.

О НЕКОТОРЫХ ПРИМЕРАХ НЕЛОКАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ С СУПЕРУСТОЙЧИВОЙ ПОЛУГРУППОЙ

Ву Нгуен Шон Тунг (Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова)
vnsontung@mail.ru

Настоящая заметка продолжает исследование, начатое в [1], [2]. Так, в [1] установлена корректная разрешимость одного класса обратных задач для эволюционных дифференциальных уравнений

с *суперустойчивой полугруппой.* В [2] приведены достаточно общие примеры линейных операторов, порождающих такие полугруппы. Сейчас мы переносим результаты на нелокальные задачи для эволюционных уравнений.

Рассматриваем задачу вида

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t), \qquad t \geqslant 0, \\ \int\limits_0^{+\infty} \eta(t)u(t)\,dt = u_1. \end{cases} \tag{1}$$

Предполагаем, что A является производящим оператором для суперустойчивой полугруппы $U(t)$ класса C_0. Требование суперустойчивости (см. [3], [4]) означает, что

$$\omega_0 = \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln\|U(t)\|}{t} = -\infty. \tag{2}$$

Предположение (2) позволяет доказать корректную разрешимость нелокальной задачи (1) при минимальных ограничениях на весовую функцию $\eta(t)$.

Пусть $\eta \in BV[0,\tau]$ при любом $\tau > 0$, и справедлива оценка

$$\operatorname{Var}\{\eta(t)\}\Big|_0^\tau \leqslant Ce^{\gamma\tau}, \qquad \tau > 0,$$

с константами $C \geqslant 0$ и $\gamma \geqslant 0$. Пусть также $\eta(0) = \eta(0+) \neq 0$. Тогда задача (1) является корректной, т. е. при любом выборе $u_1 \in D(A)$ задача (1) имеет единственное обобщенное решение $u(t) = U(t)u_0$ с элементом $u_0 \in E$.

Несколько обобщая конструкцию [2], дадим характерный пример оператора A, порождающего суперустойчивую полугруппу. Рассмотрим на полуоси $\mathbb{R}_+$ оператор переноса с поглощением

$$A = -d/dx - a(x), \qquad x \geqslant 0, \tag{3}$$

в весовом банаховом пространстве $E \equiv L^p(\mathbb{R}_+, e^{-\nu(x)}dx)$ со значением $p \geqslant 1$. Область определения оператора (3) зададим правилом

$$D(A) = \{\, h \in AC_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+) : \quad h \in E, \quad Ah \in E, \quad h(0) = 0 \,\},$$

где через $AC_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ обозначено пространство локально абсолютно непрерывных функций на $\mathbb{R}_+$. Допустим, что выполнено любое из предположений.

Предположение 1. Пусть $\nu(x) = x\nu_0(x)$, где $\nu_0(x)$ — неотрицательная, неубывающая функция на $\mathbb{R}_+$, такая, что

$$\lim_{x\to+\infty} \nu_0(x) = +\infty.$$

Считаем при этом, что $a(x)$ — измеримая, неотрицательная, локально ограниченная функция на $\mathbb{R}_+$.

Предположение 2. Пусть $a(x)$ — измеримая, неотрицательная, локально ограниченная функция на $\mathbb{R}_+$, причем

$$\lim_{x\to+\infty} a(x) = +\infty.$$

Считаем при этом, что $\nu(x)$ — неотрицательная, неубывающая функция на $\mathbb{R}_+$.

Тогда оператор (3) порождает суперустойчивую полугруппу

$$U(t)h(x) = \begin{cases} h(x-t)\exp\left(-\int\limits_0^t a(x-s)\,ds\right), & x > t, \\ 0, & x \leqslant t, \end{cases}$$

в пространстве $E \equiv L^p(\mathbb{R}_+, e^{-\nu(x)}dx)$ на полуоси $\mathbb{R}_+$.

Используя операторы переноса вида (3) в нелокальной задаче (1), получаем интересный класс примеров к нашей теории.

Исследование выполнено совместно с И. В. Тихоновым.

Литература

1. Тихонов И.В. Разрешимость линейной обратной задачи для эволюционного уравнения с суперустойчивой полугруппой / И.В. Тихонов, Ву Нгуен Шон Тунг // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Математика. Информатика. Физика. — 2018. — Т. 26, № 2. — С. 103–118.

2. Ву Нгуен Шон Тунг. Специальные примеры суперустойчивых полугрупп и их применение в теории обратных задач / Ву Нгуен Шон Тунг // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. — 2018. — Т. 18, вып. 3. — С. 252–262.

3. Balakrishnan A.V. On superstability of semigroups / A.V. Balakrishnan // Systems modelling and optimization. Proceedings of the 18th IFIP conference on system modelling and optimization. CRC research notes in mathematics. Chapman and Hall. — 1999. — P. 12–19.

4. Balakrishnan A.V. Superstability of systems / A.V. Balakrishnan // Applied Mathematics and Computation. — 2005. — V. 164, № 2. — P. 321–326.

ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ РЕШЕНИЯ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

И.А. Высоцкая (Воронеж, ВГУ)
i.a.trrishina@gmail.ru

Функцию x из $C_{b,u}(\mathbb{R},X)$ назовем *интегрально убывающей на бесконечности*, если $\lim\limits_{\alpha\to\infty}\frac{1}{\alpha}\sup\limits_{t\in\mathbb{J}}\int\limits_0^\alpha \|x(t+s)\|\,ds = 0$, и будем обозначать символом $C_{0,int} = C_{0,int}(\mathbb{J},X)$.

Определение 1. Далее символом $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_0(\mathbb{R},X)$ обозначим замкнутое подпространство функций из $C_{b,u}(\mathbb{R},X)$, обладающих свойствами: 1) $S(t)x \in \mathcal{C}_0, t \in \mathbb{R}$ и любой функции $x \in \mathcal{C}_0$; 2) $C_0 \subset \mathcal{C}_0 \subset C_{0,int}$; 3) $e_\lambda x \in \mathcal{C}_0, \lambda \in \mathbb{R}$, где $e_\lambda(t) = e^{i\lambda t}$, $t \in \mathbb{R}$.

Определение 2. Пусть $\varepsilon > 0$.Число $\omega \in \mathbb{R}$ называется *ε-периодом функции* $x \in C_{b,u}(\mathbb{R},X)$ на бесконечности относительно подпространства $\mathcal{C}_0(\mathbb{R},X)$ исчезающих на бесконечности функций, если существует функция $x_0 \in \mathcal{C}_0$ такая, что $\|S(\omega)x - x - x_0\| < \varepsilon$.

Определение 3. Функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{R},X)$ называется *почти периодической на бесконечности* относительно подпространства $\mathcal{C}_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ множество ее ε-периодов на бесконечности относительно плотно [1] на $\mathbb{R}$.

Рассмотрим уравнение $x(t+1) = Ax(t) + f(t), t \in \mathbb{R}$, где $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R},X)$ и $A \in EndX$. Справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть для оператора* $A \in EndX$ *выполнено условие* $\sigma(A) \cap \mathbb{T} = \{\gamma_1, \gamma_2 ..., \gamma_m\}$, *где* $\gamma_k = e^{i\lambda_k}, 1 \leqslant k \leqslant N$ *и* $\mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$. *Тогда равномерно непрерывное ограниченное решение* $x : \mathbb{R} \to X$ *разностного уравнения является почти периодической на бесконечности функцией относительно подпространства* $\mathcal{C}_0$ *и имеет вид* $x(t) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i(t)e^{i\lambda_k t}, t \in \mathbb{R}$, *где* $x_i, 1 \leqslant i \leqslant n$. *- медленно меняющиеся функции [1] относительно пространства* $\mathcal{C}_0$.

Литература

1. Тришина И.А. Почти периодические на бесконечности функции относительно подпространства интегрально убывающих на бесконечности функций / И.А. Тришина // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер.

Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2017. — Т. 17, № 4. — С. 402–418.

ОЦЕНКИ ВИНЕРОВСКОЙ НОРМЫ В $\mathbb{Z}_p^d$ [1]

М.Р. Габдуллин (Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова)
gabdullin.mikhail@yandex.ru

Пусть $B \subset \mathbb{Z}$ — конечное множество и $e(x) := \exp(2\pi i x)$. Знаменитая гипотеза Литтлвуда гласит, что

$$\int_0^1 \left| \sum_{b \in B} e(bx) \right| dx \gg \log |B|. \tag{1}$$

Это неравенство было независимо доказано С. Конягиным [1] и МакГи, Пиньо и Смитом [2] в 1981 году.

В работе Б. Грина и С. Конягина [3], а также в ряде последующих работ [4]-[8] изучался дискретный аналог гипотезы Литтлвуда для случая группы $\mathbb{Z}_p$. Для произвольной функции $f\colon \mathbb{Z}_p \to \mathbb{C}$ определим её винеровскую норму

$$\|f\|_{A(\mathbb{Z}_p)} := \|\hat{f}\|_1 = \sum_{\gamma \in \hat{\mathbb{Z}}_p} |\hat{f}(\gamma)|$$

(здесь γ пробегает группу $\hat{\mathbb{Z}}_p$ всех гомоморфизмов $\mathbb{Z}_p$ в $\mathbb{C}$, а $\hat{f}(\gamma) = p^{-1} \sum_{x \in \mathbb{Z}_p} f(x)\overline{\gamma(x)}$; аналогично определяется преобразование Фурье и винеровская норма на произвольной конечной абелевой группе). Пусть $A \subseteq \mathbb{Z}_p$; через $A(x)$ будем обозначать его характеристическую функцию. Предполагается, что при $2 \leqslant |A| < p/2$ имеет место оценка

$$\|A\|_{\mathbb{Z}_p} \gg \log |A|, \tag{2}$$

аналогичная оценке (1) в непрерывном случае. Неравенство (2) доказано С. Конягиным и И. Шкредовым [4] для множеств малого размера, а именно, при $|A| \ll \exp((\log p / \log\log p)^{1/3})$. В общем случае известны более слабые нижние оценки вида (2), где в правой части стоит некоторая степень логарифма $|A|$ (см. работы [4]-[8]).

Мы переносим одномерные результаты на многомерный случай.

---

[1] Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект 14.W03.31.0031).

Теорема. *Пусть $E \subseteq \mathbb{C}$ — произвольное множество и число $C > 0$ достаточно велико. Предположим, что для любой функции $h\colon \mathbb{Z}_p \to E \cup \{0\}$ выполнена оценка*

$$\|h\|_{A(\mathbb{Z}_p)} \geqslant F(p, \delta),$$

где $\delta = |supp\, h| p^{-1}$. Тогда для любой функции $f\colon \mathbb{Z}_p^d \to E \cup \{0\}$ такой, что $|supp\, f| = \delta p^d$, $\delta \geqslant C p^{-1}$, выполнено

$$\|f\|_{A(\mathbb{Z}_p^d)} \geqslant F(p, \delta'),$$

для некоторого $\delta' = \delta + O(\delta^{1/2} p^{-1/2})$, причём подразумеваемая постоянная абсолютна.

Замечание. *Не умаляя общности, в формулировке теоремы можно считать, что функция $F(p, \delta)$ равна $+\infty$, если $p\delta$ не равно целому числу. Это предположение не влияет на посылку теоремы и отсекает тривиальные случаи, связанные с тем, что мы не знаем точное значение δ'.*

Литература

1. Конягин С.В. О проблеме Литтлвуда / С.В. Конягин // Известия РАН. — 45 (1981). — С. 243-265.

2. McGee. Hardy's inequality and the L_1 norm of exponential sums / McGee, L. Pigno, B. Smith // Annals of Math. — 113 (1981). — С. 613–618.

3. Green B.J. On the Littlewood problem modulo prime / B.J. Green, S.V. Konyagin // Canad. J.Math. — 61 (2009). — С. 141–164.

4. Konyagin S.V. A quantitative version of Beurling-Helson theorem / S.V. Konyagin, I.D. Shkredov // Funct. Analysis and Its Appl. — 49 (2015). — С. 110–121.

5. Konyagin S.V. On Wiener norm of subsets of $\mathbb{Z}_p$ of medium size / S.V. Konyagin, I.D. Shkredov // Journal of Mathemetical Sciences. — 218 (2016). — С. 599–608.

6. Schoen T. On the Littlewood conjecture modulo prime / T. Schoen // Moscow Journal of Number Theory and Combinatorics. — 2016. — С. 1-5.

7. Sanders T. The Littlewood-Gowers problem / T. Sanders // J.Anal.Math. — 101 (2007). — С. 123–162.

8. Sanders T. Bounds in Cohen's idempotent theorem / T. Sanders // preprint

ОБ ОРТОРЕКУРСИВНЫХ РАЗЛОЖЕНИЯХ[1]

В.В. Галатенко, Т.П. Лукашенко, В.А. Садовничий
(Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова)
vgalat@imscs.msu.ru, lukashenko@mail.ru, info@rector.msu.ru

Орторекурсивные разложения как обобщение ортогональных разложений в ряды Фурье впервые появились в 1999 году в [1,2]. Дадим их определение. Пусть H — гильбертово пространство над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ со скалярным произведением $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$, $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ — произвольная последовательность нормированных элементов H, f — разлагаемый элемент H.

Определение 1. *Орторекурсивное разложение* f по последовательности $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ определяется индуктивно через построение последовательностей остатков $\{r_n\}_{n=0}^{\infty}$ и коэффициентов $\{\hat{f}_n\}_{n=1}^{\infty}$ разложения: $r_0 = f$; $\hat{f}_n = (r_{n-1}, e_n)$, $r_n = r_{n-1} - \hat{f}_n e_n$, $n \in \mathbb{N}$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \hat{f}_n e_n$ называется орторекурсивным разложением (орторекурсивным рядом Фурье) элемента f по $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Легко видеть, что если $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ортонормированная система, то коэффициенты $\{\hat{f}_n\}_{n=1}^{\infty}$ являются обычными коэффициентами Фурье, а орторекурсивный ряд Фурье — обычным рядом Фурье. Для орторекурсивных разложений верны аналоги тождества Бесселя $\|r_N\|^2 = \|f - \sum\limits_{n=1}^{N} \hat{f}_n e_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum\limits_{n=1}^{N} |\hat{f}_n|^2$ и неравенства Бесселя $\|f\|^2 \geqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} |\hat{f}_n|^2$, а аналог равенства Парсеваля $\|f\|^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |\hat{f}_n|^2$ имеет место тогда и только тогда, когда орторекурсивный ряд Фурье сходится к разлагаемому элементу.

Заметим, что если члены последовательности $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ не задавать сразу, а выбирать очередной элемент e_n на n–ом шаге по какому-то правилу, то можно получить различные варианты так называемых «жадных» разложений (алгоритмов). Но мы остановимся на разложениях по фиксированным системам. Отметим, что обобщениями таких разложений являются введенные соответственно в [3] и [4] разложения по последовательности систем и по последовательности подпространств.

---

[1] Работа выполнена при поддержке гранта НШ МГУ «Современные проблемы фундаментальной математики и механики»

В настоящее время известен целый ряд результатов о сходимости орторекурсивных разложений по норме, заданной скалярным произведением [5–8] (для функциональных систем это L^2–норма). В [5] рассматривалась сходимость и по другим L^p–нормам, а также сходимость почти всюду для систем нормированных характеристических функций промежутков. Авторами получены результаты о сходимости почти всюду орторекурсивных разложений по произвольным функциональным системам. Результаты формулируются в терминах множителей Вейля аналогично случаю ортогональных разложений [5, Гл. 9, § 1]. Была обнаружена существенная разница результатов для орторекурсивных разложений, которые сходятся к разлагаемой функции по норме, и для тех, которые не сходятся по норме к разлагаемой функции

Таким образом, для орторекурсивных разложений, сходящихся по норме к разлагаемой функции, множителем Вейля является последовательность $\lambda_n = \sqrt{n}$. А для расходящихся орторекурсивных разложений положительная числовая последовательность $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ является множителем Вейля являются только при условии сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n}$.

В [6] и [12] изложены результаты о сходимости по норме и почти всюду орторекурсивных разложений с ошибками при вычислении коэффициентов, а в [13] о сходимости почти всюду орторекурсивных разложений по системам сжатий и сдвигов.

Литература

1. Лукашенко Т.П. Рекурсивные разложения, подобные ортогональным / Т.П. Лукашенко // VII Междунар. конф. «Математика. Экономика. Экология. Образование». Международный симпозиум «Ряды Фурье и их приложения». 26 мая – 1 июня 1999 г. : тезисы докладов. — Ростов-на-Дону : РГЭА, 1999. — С. 331.

2. Лукашенко Т.П. Об орторекурсивных разложениях по характеристическим функциям промежутков / Т.П. Лукашенко // Теория функций, ее приложения и смежные вопросы материалы школы-конф., посв. 130-летию со дня рожд. Д.Ф.Егорова. — Казань : Изд-во «Казанск. мат. об-во», 1999. — С. 142–143.

3. Лукашенко Т.П. О рекурсивных разложениях по цепочке систем / Т.П. Лукашенко, В.А. Садовничий // Доклады РАН. — 2009. — Т. 425, № 6. — С. 741–746.

4. Лукашенко Т.П. Орторекурсивные разложения по подпространствам / Т.П. Лукашенко, В.А. Садовничий // Доклады РАН. — 2012. — Т. 445, № 2. — С. 135–138.

5. Лукашенко Т.П. О свойствах орторекурсивных разложений по неортогональным системам / Т.П. Лукашенко // Вестн. Моск. Ун-та. Сер. I. Матем. Механ. — 2001. — № 1. — С. 6–10.

6. Галатенко В.В. Об орторекурсивном разложении с ошибками в вычислении коэффициентов / В.В. Галатенко // Изв. РАН. Сер. матем. — 2005. — Т. 69, № 1. — С. 3–16.

7. Политов А.В. Критерий сходимости орторекурсивных разложений в евклидовых пространствах / А.В. Политов // Матем. заметки. — 2013. — Т. 93, № 4. — С. 637–640.

8. Кудрявцев А.Ю. О сходимости орторекурсивных разложений по неортогональным всплескам / А.Ю. Кудрявцев // Матем. заметки. — 2012. — Т. 92, № 5. — С. 707–720.

9. Кашин Б.С. Ортогональные ряды / Б.С. Кашин, А.А. Саакян. — М. : Изд-во АФЦ, 1999. — 550 с.

10. Галатенко В.В. Об условии сходимости почти всюду орторекурсивных разложений / В.В. Галатенко, Т.П. Лукашенко, В. А. Садовничий // Вестн. Моск. ун-та. Сер. I. Матем. Механ. — 2016. — № 5. — С. 20–25.

11. Galatenko V.V., Lukashenko T. P. and Sadovnichiy V. A. Convergence Almost Everywhere of Orthorecursive Expansions in Functional Systems / V.V. Galatenko, T.P. Lukashenko and V.A. Sadovnichiy // Advances in Dynamical Systems and Control. Studies in Systems, Decision and Control. V. 69. Springer International Publishing Switzerland. 2016. — P. 3–11.

12. Galatenko V.V., Lukashenko T. P. and Sadovnichiy V. A. The Abcolute Stability of Orthorecursive Expansions in Redundant Systems of Subspaces / V.V. Galatenko, T.P. Lukashenko and V.A. Sadovnichiy // Continuous and Distributed Systems II Theory and Applications. Studies in Systems, Decision and Control. V. 30. Springer International Publishing Switzerland. 2015. — P. 3–10.

13. Galatenko V.V. Convergence Almost Everywhere of Orthorecursive Expansions in Systems of Translates and Dilates / V.V. Galatenko, T.P. Lukashenko and V.A. Sadovnichiy // The Fundamentals of Modern Mathematics and Mechanics. Springer International Publishing Switzerland, 2018. — P. 3–11.

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМУМА В ГЛАДКИХ ЗАДАЧАХ С РАВЕНСТВАМИ И НЕРАВЕНСТВАМИ В КОНЕЧНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Э.М. Галеев (Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова)
galeevem@mail.ru

Пусть $f_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \ldots, m$, — функции n переменных, отображающие пространство $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$. Рассмотрим гладкую конечномерную экстремальную задачу с ограничениями типа равенств и неравенств:

$$f_0(x) \to \text{extr}; \qquad \begin{array}{l} f_i(x) \leqslant 0,\ i = 1, \ldots, m', \\ f_i(x) = 0,\ i = m'+1, \ldots, m. \end{array} \tag{P}$$

Теорема. *Пусть функции f_i, $i = 0, \ldots, m$, дважды непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности допустимой точки $\widehat{x}$, для функции Лагранжа $\mathcal{L}(x) = f_0(x) + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x)$ с вектором множителей Лагранжа $\lambda = (1, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ выполняются условия:*

a) стационарности: $\mathcal{L}_x(\widehat{x}) = 0$;

b) дополняющей нежесткости: $\lambda_i f_i(\widehat{x}) = 0$, $i = 1, \ldots, m'$;

c) неотрицательности: $\lambda_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, m'$;

d) положительной определенности матрицы вторых производных функции Лагранжа на пространстве стационарных направлений $\Pi(\widehat{x}) := \{h \in \mathbb{R}^n \mid \lambda_i \langle f_i'(\widehat{x}), h\rangle = 0$, $i = 1, \ldots, m'$, $\langle f_i'(\widehat{x}), h\rangle = 0$, $i = m'+1, \ldots, m\}$:

$$\langle \mathcal{L}_{xx}(\widehat{x})h, h\rangle > 0 \quad \forall\ h \in \Pi,\ h \neq 0.$$

Тогда $\widehat{x} \in \operatorname{locmin} P$ — точка локального минимума.

Если условия c) и d) выполняются в виде:

c) $\lambda_i \leqslant 0,\ i = 1, \ldots, m'$;

d) $\langle \mathcal{L}_{xx}(\widehat{x}, \lambda)h, h\rangle < 0 \quad \forall\ h \in \Pi,\ h \neq 0$,

то $\widehat{x} \in \operatorname{locmax} P$ — точка локального максимума.

Теорема позволяет конструктивно использовать достаточные условия экструмума при исследовании критической точки.

О СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ОДНОГО КЛАССА ВОЗМУЩЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

Г.В. Гаркавенко (Воронеж, ВГПУ)
g.garkavenko@mail.ru

Рассматривается оператор $A - B$. Здесь самосопряженный оператор $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ имеет спектр $\sigma(A) = \cup_{n=1}^{\infty} \sigma_n$, состоящий из множеств $\sigma_n = \{\lambda_n\}$, где λ_n – полупростые собственные значения. Оператор B принадлежит пространству допустимых возмущений для оператора A, которое непрерывно вложено в линейное нормированное пространство операторов подчиненных оператору A. Допустимое пространство возмущений, которому B принадлежит, состоит из операторов $X : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ для которых выполняются условия: $\sup\limits_{m-k=n} ||P_m X P_k|| = M(n) < \infty, m, k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z}$; $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} M^2(n) < \infty$, где $P_k, k \in \mathbb{N}$ ортогональные проекторы Рисса построенными по собственным множествам оператора A. В качестве нормы берётся величина $||X||_* = \sqrt{\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} M^2(n)}$.

Теорема 1. *Если спектр оператора A удовлетворяет условию $dist(\lambda_n, \sigma_n(A) \backslash \lambda_n) \to \infty$ при $n \to \infty$ и существует натуральное число m_0 такое, что $4||\alpha_{m_0}||_{l_2} ||B||_* < 1$. Спектр оператора A представим в виде $\sigma(A) = \sigma'_{m_0} \bigcup (\cup_{n=1}^{\infty} \sigma_n)$, где $\sigma'_{m_0} = \{\lambda_1, ..., \lambda_{m_0}\}$. Тогда спектр оператора $A - B$ представим в виде объединения взаимно непересекающихся множеств $\sigma(A - B) = \widetilde{\sigma}'_{m_0} \bigcup (\cup_{n=1}^{\infty} \widetilde{\sigma}_n)$, обладающих свойством $dist(\widetilde{\sigma}'_{m_0}, \sigma'_{m_0}) \leqslant 4||B||_*$.* Двусторонняя последовательность $\alpha_m : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ определяется равенством $\alpha_m(n) = max(\max\limits_{i>m, 1\leqslant j\leqslant i-1} (|\lambda_i - \lambda_j|^{-1}); \max\limits_{j>m, 1\leqslant i\leqslant j-1} (|\lambda_i - \lambda_j|^{-1})), i - j = n$.

Литература

1. Гаркавенко Г.В. Спектральный анализ возмущенных самосопряженных операторов с дискретным спектром / Г.В. Гаркавенко // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. — Воронеж, 2017. — Т. 5, № 8-1 (34-1). — С. 101–104.

2. Гаркавенко Г.В. Метод подобных операторов в исследовании спектральных свойств разностного оператора с растущим потенциалом / Г.В. Гаркавенко, Н.Б. Ускова // Сибирские электронные математические известия. — 2017. — Т. 14. — С. 673–689.

О СЛУЧАЙНЫХ ТОЧКАХ РАВНОВЕСИЯ[1]

Е.Н. Гетманова (Воронеж, ВГПУ)
ekaterina_ getmanova@bk.ru

В данной работе представлена вероятностная версия теоремы о точке равновесия для двух параметризованных многозначных отображений, удовлетворяющих совместным условиям типа Каристи.

Теорема 1. *Пусть X — сепарабельное банахово пространство; (Y, d) полное сепарабельное метрическое пространство; Ω — локально компактное метрическое пространство с мерой Радона; $F\colon \Omega \times X \to K(Y)$ — каратеодориевское мультиотображение и $G\colon \Omega \times Y \to Cv(X)$ — случайное l-мультиотображение. Пусть $\psi\colon \Omega \times Y \to (-\infty, +\infty]$ — допустимая функция такая, что для каждых $\omega \in \Omega$ и $x \in X$ найдется $f \in F(\omega, x)$ такое, что для любого $y \in Y$ удовлетворяющего*

$$x \in G(\omega, y)$$

выполнено

$$\psi(\omega, y) + d(y, f) \leqslant \psi(\omega, y).$$

Тогда существуют измеримые отображения $x_\star\colon \Omega \to X$ и $y_\star\colon \Omega \to Y$ такие, что

$$\begin{cases} x_\star(\omega) \in G(\omega, y_\star(\omega)), \\ y_\star(\omega) \in F(\omega, x_\star(\omega)) \end{cases}$$

для всех $\omega \in \Omega$.

Литература

1. Борисович Ю.Г. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений / Ю.Г. Борисович, Б.Д. Гельман, А.Д. Мышкис, В.В. Обуховский — М. : Либриком, 2011. — 226 с.

2. Обен Ж.-П. Нелинейный анализ и его экономические приложения / Ж.-П. Обен — М. : Мир, 1988.

3. Caristi J. Fixed point theorems for mappings satisfying inwardness conditions / J. Caristi // Trans. Amer. Math. Soc. 1976. — С. 241–251.

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 10-01-00000).

4. Górniewicz L. Topological fixed point theory of multivalued mappings / L. Górniewicz. — 2nd edition, Topological Fixed Point Theory and Its Applications, 4, Springer, Dordrecht, 2006.

СПЕКТРАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ СО ЗНАКОПЕРЕМЕННОЙ ВЕСОВОЙ ФУНКЦИЕЙ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ВТОРОГО ПОРЯДКА[1]

А.А. Гималтдинова (Уфа, УГНТУ)
aa-gimaltdinova@mail.ru

В работе изучаются задачи 1 – 2

$$X'' + \mu^2 \cdot \operatorname{sgn} x \cdot X = 0, \ \ x \in (-\ell, 0) \cup (0, h), \ \ \ell, h > 0, \ \ \mu^2 \in \mathbb{C},$$

$$X(0+0) = X(0-0), \ \ X'(0+0) = X'(0-0),$$

с граничными условиями первого рода $X(-\ell) = X(h) = 0$ или второго рода $X'(-\ell) = X'(h) = 0$ соответственно.

Собственные значения задачи 1 есть корни трансцендентного уравнения $\operatorname{tg}(\mu h) = -\operatorname{th}(\mu \ell)$, задачи 2 — уравнения $\operatorname{tg}(\mu h) = \operatorname{th}(\mu \ell)$. Получены асимптотические формулы для корней этих уравнений.

Найдена система собственных функций задачи 1.

Для задачи 2 показано, что в случае $h \neq \ell$ система корневых функций состоит только из собственных функций, а в случае $h = \ell$ кроме собственных функций есть одна присоединенная.

Изучен вопрос о полноте и базисности системы корневых функций обеих задач в пространстве $L_2(-\ell, h)$.

Такие спектральные задачи для случая $h = \ell$ возникли в работах [1, 2].

Литература

1. Гималтдинова А.А. Задача Дирихле для уравнения Лаврентьева – Бицадзе с двумя линиями изменения типа в прямоугольной области / А.А. Гималтдинова // Доклады Академии наук. — 2015. — Т. 460, № 3. — С. 260–265.

2. Гималтдинова А.А. Задача Неймана для уравнения Лаврентьева – Бицадзе с двумя линиями изменения типа в прямоугольной области / А.А. Гималтдинова // Доклады Академии наук. — 2016. — Т. 466, № 1. — С. 7–11.

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 17-41-020516).

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ МАТРИЧНОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В МНОГОСЛОЙНОЙ СРЕДЕ ПРИ НАЛИЧИИ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ[1]

Ю.А. Гладышев, В.В. Калманович (Калуга, Калужский государственный университет им. К.Э. Циолковского)
v572264@yandex.ru

Рассмотрим процесс теплопроводности в многослойной неоднородной, возможно, искривленной оболочке, когда в одном из слоев возможен фазовый переход. Предполагая процесс одномерным и направленным по нормали к оболочке, направим ось x по этой нормали. Пусть $x_1, \dots, x_{n+1}$ — координаты слоев, причем x_1 и x_{n+1} – координаты внешних поверхностей. Основная система уравнений, которая определяет температуры $T^{(i)}(x)$ в i-ом слое (нумерация слоев идет по левой координате слоя, номер слоя указан в верхнем индексе в скобках) имеет вид [1]

$$a_2^{(i)} \frac{d}{dx} \left(a_1^{(i)} \frac{dT^{(i)}}{dx} \right) - (m^{(i)})^2 T^{(i)} = 0, i = \overline{1,n} \tag{1}$$

Здесь $a_1^{(i)} = \lambda^{(i)}$, где $\lambda^{(i)}$ — коэффициент теплопроводности i-го слоя, который в общем случае зависит от координаты ч и температуры $T^{(i)}(x)$.

На границах слоев приняты условия согласования типа идеального контакта, состоящие в непрерывности температуры и теплового потока. Далее предполагается, что для всех слоев коэффициенты $a_1^{(i)}, a_2^{(i)}$ не зависят от температуры, за исключением k-го слоя для которого зависимость $\lambda^{(k)}$ от температуры нелинейна и определяется как

$$a_1^{(k)} = \lambda^{(k)}(x) = \begin{cases} \lambda_1^{(k)} x^p, T < T_{\text{ф}}, \\ \lambda_2^{(k)} x^p, T > T_{\text{ф}}, \end{cases} \tag{2}$$
$$a_2^{(k)} = x^{-p}.$$

Здесь $T_{\text{ф}}$ — температура фазового перехода в k-ом слое. Показатель степени p принимает следующие значения: для пластины $p = 0$, для оболочки с осевой симметрией $p = 1$, для случая центральной симметрии $p = 2$.

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и правительства Калужской области (проект № 18-41-400001).

Основным методом построения решения системы является матричный метод, приведенный ранее в ряде статей [2]-[4]. Чтобы охватить единым подходом и случай искривленных оболочек использован аппарат обобщенных степеней Берса [5].

Первоначально проведено решение для одного слоя при заданных внешних температурах T_1, T_2 и $m = 0$. В этом случае задача моделируется двухслойной системой со слоями двух разных фаз.Для определения положения границы фаз $x_ф$ получено простое условие

$$\frac{X_1(x_1, x_ф)}{T_1 - T_ф} = \frac{X_2(x_2, x_ф)}{T_2 - T_ф},$$

где $T_1 < T_ф < T_2$ и $x_1 \leqslant x_ф \leqslant x_2$. Получены и проанализированы результаты для случаев плоской, осесимметричной и центрально симметричной оболочки.

Перейдем к случаю многослойной системы. Основной вопрос — произойдет ли фазовый переход в некотором слое, в котором это связано со свойствами среды этого слоя. Предположим, что это k-й слой. Как и в начальном примере заменим этот слой на два слоя, определенных координатами $x_k, x_ф, x_{k+1}$.Проводя соответствующие расчеты матричным методом, найдем основное условие

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{k-1} X_i(x_i, x_{i+1}) + X_{k_1}(x_k, x_ф)}{T_1 - T_ф} = \frac{\sum\limits_{i=k+1}^{n} X_i(x_{i+1}, x_i) + X_{k_2}(x_ф, x_{k+1})}{T_2 - T_ф}$$

Так как предполагается, что в левой части в сумме $x_i < x_ф$, то все слагаемые отрицательны, и при условии $T_1 < T_ф$ левая часть положительна.

Приведенный метод решения легко может быть перенесен на граничные условия третьего типа, могут быть усложнены условия согласования.

Литература

1. Кудинов В.А. Аналитические решения задач тепломассопереноса и термоупругости для многослойных конструкций / В.А. Кудинов, Э.М. Карташов, В.В. Калашников. — М. : Высшая школа, 2005. — 430 с.

2. Гладышев Ю.А. О возможности приложения аппарата Берса к моделированию процессов тепломассопереноса, обусловленно-

го электронами в планарной многослойной среде / Ю.А. Гладышев, В.В. Калманович, М.А. Степович // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. — 2017. — № 10. — С. 105–110.

3. Гладышев Ю.А. О возможности совместного применения матричного метода и аппарата обобщенных степеней Берса для математического моделирования процесса теплопереноса в объектах, обладающих цилиндрической симметрией / Ю.А. Гладышев, В.В. Калманович, Е.В. Серегина, М.А. Степович // Вопросы атомной науки и техники. Серия: Ядерно-реакторные константы. — 2018. — Вып. 3. — С. 158–167.

4. Калманович В.В. О совместном применении матричного метода и аппарата обобщенных степеней Берса для математического моделирования процесссов тепломассопереноса в полупроводниковых материалах электронной техники / В.В. Калманович, М.А. Степович // Проблемы разработки перспективных микро- и наноэлектронных систем – 2018. Сборник трудов. — М. : ИППМ РАН, 2018. — Вып. III. — С. 194–201.

5. Bers L. On a class of functions defined by partial differential equations / L. Bers, A. Gelbart // Transactions of the American Mathematical Society. — 1944. — Vol. 56. — P. 67–93.

6. Гладышев Ю.А. Метод обобщенных степеней Берса и его приложение в математической физике / Ю.А. Гладышев. — Калуга : КГУ им. К.Э. Циолковского, 2011. — 204 с.

АСИМПТОТИКА САМОСИММЕТРИЧНОГО ЦИКЛА БИЛОКАЛЬНОЙ МОДЕЛИ ХАТЧИНСОНА[1]

С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов
(Ярославль, ЯрГУ; Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова)
glyzin.s@gmail.com, andkolesov@mail.ru, fpo.mgu@mail.ru

Рассматривается система

$$\begin{aligned}\dot{N}_1 &= d(N_2 - N_1) + \lambda[1 - N_1(t-1)]N_1,\\ \dot{N}_2 &= d(N_1 - N_2) + \lambda[1 - N_2(t-1)]N_2,\end{aligned} \qquad (1)$$

моделирующая динамику взаимодействия двух популяций, которые обитают в однородных ареалах, связанных между собой. Здесь N_1

---

[1] Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-29-10055.

и N_2 — плотности численности, $\lambda > 0$ — мальтузианский коэффициент линейного роста, а параметр $d > 0$ характеризует связь между ареалами. Система (1) допускает однородный цикл $(N_1, N_2) = (N_*(t,\lambda), N_*(t,\lambda))$, где $N_*(t,\lambda)$ — периодическое решение уравнения Хатчинсона $\dot{N} = \lambda[1 - N(t-1)]N$. Ранее для всех $\lambda \gg 1$ было установлено существование значения $d = d_*(\lambda)$ такого, что однородный цикл билокальной модели (1) экспоненциально орбитально устойчив (неустойчив) при $d - d_*(\lambda) > 0 (< 0)$. Более того, на основании результатов численного анализа было высказано предположение, что при достаточно больших λ система (1) при $d > d_*(\lambda)$ имеет глобально устойчивый однородный цикл, от которого при уменьшении d и при прохождении его через значение $d = d_*(\lambda)$ ответвляются два устойчивых неоднородных цикла, переходящих друг в друга при замене $(N_1, N_2) \to (N_2, N_1)$. При дальнейшем уменьшении d и при прохождении его через некоторое критическое значение $d_{**}(\lambda)$, $d_{**}(\lambda) < d_*(\lambda)$ упомянутые устойчивые циклы объединяются в один самосимметричный цикл. Этот цикл остается устойчивым при всех $0 < d < d_{**}(\lambda)$. Кроме того, в силу симметрии он допускает представление $(N_1, N_2) = (N_{**}(t,\lambda), N_{**}(t - h(\lambda), \lambda))$, где $h = h(\lambda)$ — некоторый фазовый сдвиг, и имеет период $T = 2h$. При этом функция $N_{**}(t,\lambda)$, $N_{**}(0,\lambda) \equiv 1$ является $2h$-периодическим решением скалярного уравнения $\dot{N} = d(N(t-h) - N) + \lambda[1 - N(t-1)]N$.

В настоящей работе доказывается, что при условиях $d = \lambda e^{-a\lambda}$, $a > 1$, $\lambda \gg 1$ самосимметричный цикл билокальной модели (1) существует и устойчив. Строится его асимптотика.

ЧИСЛЕННОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ КВАЗИУСТОЙЧИВОСТИ АТТРАКТОРОВ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ[1]

В.Е. Горюнов (Ярославль, ЯрГУ)
salkar@ya.ru

Мы рассматриваем задачу численного определения квазиустойчивого поведения моделей динамических систем с запаздыванием, а именно систем из нейродинамики [1]. Под квазиустойчивостью аттрактора подразумевается асимптотическая близость части его мультипликаторов к единичной окружности, при этом остальные

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-29-10055).

мультипликаторы, за исключением единичных, по модулю меньше единицы. В некоторых моделях с помощью асимптотических методов удается доказать существование такого феномена. Но в общем случае для систем дифференциальных уравнений с запаздыванием требуется инструмент численной оценки мультипликаторов, который дают алгоритмы вычисления показателей Ляпунова. Теорема Оселедеца [2], вообще говоря, не позволяет определять показатели Ляпунова для таких систем, но с помощью специальных методов [3] и их модификаций удается вычислять инвариантные характеристики, качественно близкие к искомым.

Литература

1. Преображенская М.М. Релаксационные циклы в модели синаптически взаимодействующих осцилляторов / М.М. Преображенская // Моделирование и анализ информационных систем. — 2017. — Т. 24, № 2. — С. 186–204.

2. Оселедец В.И. Мультипликативная эргодическая теорема. Характеристические показатели Ляпунова динамических систем / В.И. Оселедец // Труды Московского матем. общества. — 1968. — Т. 19. — С. 197–231.

3. Алешин С.В. Оценка инвариантных числовых показателей аттракторов систем дифференциальных уравнений с запаздыванием / С.В. Алешин // Вычислительные технологии в естественных науках : методы суперкомпьютерного моделирования. 1–3 окт. 2014, Россия, Таруса : сб. тр. / под ред. Р.Р. Назирова, Л.Н. Щура. — М. : ИКИ РАН. — 2014. — С. 10–17.

О НЕПРЕРЫВНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ВЕТВИ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ШЕСТОГО ПОРЯДКА

М.Б. Давыдова, А.В. Елфимова,
М.А. Симонова (Воронеж, ВГУ)
alenaanoxina94@yandex.ru

В работе изучается нелинейная граничная задача

$$\begin{cases} -\left(pu'''_{xx\mu}\right)'''_{xx\mu} + \left(ru''_{xx}\right)''_{x\mu} - \left(gu'_x\right)'_\mu + Q'_\mu u = \lambda F(x,u,u'''_{xx\mu}); \\ u(0) = u'_x(0) = u''_{xx}(0) = u(\ell) = u'_x(\ell) = u''_{xx}(\ell) = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Решение (1) мы будем искать в классе E — дважды непрерывно дифференцируемых функций $u(x)$, у которых: $u''_{xx}(x)$ — μ–абсолютно непрерывна на $[0,\ell]$; $pu'''_{xx\mu}(x)$ — дважды непрерывно дифференцируема; $\left(pu'''_{xx\mu}\right)''_{xx}(x)$ — μ–абсолютно непрерывна на $[0;\ell]$. В точках ξ, принадлежащих множеству точек разрыва $\sigma(x)$, уравнение в (1) понимается как равенство $-\Delta\left(pu'''_{xx\mu}\right)''_{xx}(\xi) - \Delta(ru'_x)(\xi) + \Delta\left(gu''_{xx}\right)'_x(\xi) + u(\xi)\Delta Q(\xi) = \lambda F(\xi, u(\xi), \Delta u''_{xx}(\xi))$, где $\Delta u(\xi)$ — полный скачок функции $u(x)$ в точке ξ; $\lambda > 0$ — спектральный параметр. Через Λ обозначим множество положительных значений λ, при каждом из которых (1) имеет хотя бы одно решение. Будем считать действительное число λ собственным значением задачи (1), если при этом λ система (1) имеет нетривиальное решение. Уравнение в (1) задано почти всюду на множестве $\overline{[0;\ell]}_S$ [1]. Будем предполагать, что функции $p(x)$, $r(x)$, $g(x)$ и $Q(x)$ μ-абсолютно непрерывны на $\overline{[0;\ell]}_{S(\mu)}$, $\min p(x) > 0$, $Q(x)$ не убывает, а $F(x,u,v)$ удовлетворяет условиям Каратеодори: 1) $F(x,u,v)$ при почти всех x (относительно μ-меры) определена и непрерывна по u и v; 2) функция $F(x,u,v)$ измерима по x при каждых u и v; 3) $|F(x,u,v)| \leqslant m(x)$, где $m(x)$ — μ-суммируемая функция на $\overline{[0;\ell]}_S$. Будем говорить, что однородное уравнение $-\left(pu'''_{xx\mu}\right)'''_{xx\mu} + \left(ru''_{xx}\right)''_{x\mu} - (gu'_x)'_\mu + Q'_\mu u = 0$ не осциллирует на $[0;\ell]$, если любое его нетривиальное решение имеет не более пяти нулей с учетом кратностей.

Получены достаточные условия существование нетривиальных решений у (1).

Литература

1. Шабров С.А. О необходимом условии минимума одного квадратичного функционала с интегралом Стилтьеса / С.А. Шабров // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика. — 2012. — Т. 12, № 1. — С. 52–55.

2. Шабров С.А. Об одной математической модели малых деформаций стержневой системы с внутренними особенностями / С.А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2013. — № 1. — С. 232–250.

3. Шабров С.А. О скорости роста собственных значений одной спектральной задачи четвертого порядка с производными по мере / С.А. Шабров, Н.И. Бугакова, Е.А. Шайна // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2018. — № 4. — С. 206–214.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ВЫПУКЛЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА, ТЕРМИНАЛЬНАЯ ЧАСТЬ КОТОРОГО ЗАВИСИТ ТОЛЬКО ОТ МЕДЛЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ И ГЛАДКИМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА УПРАВЛЕНИЕ

А.Р. Данилин, А.А. Шабуров (Екатеринбург, ИММ УрО РАН, Уральский федеральный университет)
dar@imm.uran.ru alexandershaburov@mail.ru

Рассматривается задача оптимального управления с интегральным выпуклым критерием качества для одной линейной системы с быстрыми и медленными переменными в классе кусочно–непрерывных управлений с гладкими ограничениями на управление

$$\begin{cases} \dot{x}_\varepsilon = A_{11}x_\varepsilon + A_{12}y_\varepsilon + B_1u, & t\in[0,T], \quad \|u\|\leqslant 1,\\ \varepsilon\dot{y}_\varepsilon = A_{21}x_\varepsilon + A_{22}y_\varepsilon + B_2u, & x_\varepsilon(0)=x^0, \quad y_\varepsilon(0)=y^0,\\ J(u) := \varphi(x_\varepsilon(T)) + \int\limits_0^T \|u(t)\|^2\,dt \to \min, & \end{cases}$$

где $x\in\mathbb{R}^n$, $y\in\mathbb{R}^m$, $u\in\mathbb{R}^r$; A_{ij}, B_i, $i,j=1,2$ — постоянные матрицы соответствующей размерности, а $\varphi(\cdot)$ – непрерывно дифференцируемая на $\mathbb{R}^n$ строго выпуклая и кофинитная функция в смысле выпуклого анализа. В общем случае для такой задачи принцип максимума Понтрягина является необходимым и достаточным условием оптимальности и существует единственный вектор l_ε, определяющий оптимальное управление по формуле

$$u_\varepsilon(T-t) = \frac{C_\varepsilon^*(t)l_\varepsilon}{S\left(\|C_\varepsilon^*(t)l_\varepsilon\|\right)},$$

где

$$C_\varepsilon^*(t)l_\varepsilon := e^{A_0t}B_0 + A_{12}A_{22}^{-1}e^{A_{22}t}B_2 + O(\varepsilon), \quad \varepsilon\to 0,$$

$$A_0 = A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}, \quad B_0 = B_1 - A_{12}A_{22}^{-1}B_2,$$

$$S(\xi) := \begin{cases} 2, & 0\leqslant\xi\leqslant 2,\\ \xi, & \xi>2, \end{cases}$$

Главной отличительной особенностью задачи от рассмотренных ранее является наличие матрицы A_{21} в матрице системы $\mathcal{A}$. Доказано, что в случае конечного числа точек смены вида управления можно построить асимптотику начального вектора сопряженного состояния l_ε, который определяет вид оптимального управления. Показано, что асимптотика имеет степенной характер.

Литература

1. Васильева А.Б. Сингулярные возмущения в задачах оптимального управления / А.Б. Васильева, М.Г. Дмитриев // Математический анализ. Итоги науки и техники. — Москва : «ВИНИТИ». — 1982. — Т. 20. — С. 3–77.

2. Данилин А.Р. О задаче управления точкой малой массы в среде без сопротивления / А.Р. Данилин, О.О. Коврижных // Докл. РАН. — 2013. — Т. 451, вып. 6. — С. 612–614.

3. Данилин А.Р. Асимптотика оптимального значения функционала качества в линейной задаче оптимального управления в регулярном случае / А.Р. Данилин, Ю.В. Парышева // Тр. ИММ УрО РАН. — 2007. — Т. 13, вып. 2. — С. 55–65.

4. Калинин А.И. Асимптотический метод оптимизации линейных сингулярно возмущенных систем с многомерными управлениями / А.И. Калинин, К.В. Семенов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 2004. — Т. 44, вып. 3. — С. 432–443.

5. Понтрягин Л.С. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. — М. : Физматгиз, 1961. — 391 с.

6. Шабуров А.А. Асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенной задачи оптимального управления с интегральным выпуклым критерием качества, терминальная часть которого зависит только от медленных переменных / А.А. Шабуров // Тр. ИММ УрО РАН. — 2018. — Т. 24, вып. 2. — С. 280–289.

7. Шабуров А.А. Асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенной задачи оптимального управления с интегральным выпуклым критерием качества и гладкими геометрическими ограничениями на управление / А.А. Шабуров // Изв. ИМИ УдГУ. — Т. 50 — С. 110–120.

ДВУСТОРОННИЕ ОЦЕНКИ ТИПА ФЕЙЕРА[1]

В.И. Данченко, Д.Я. Данченко (Владимир, ВлГУ)
vdanch2012@yandex.ru

Для неотрицательного многочлена

$$T_n(t) = a_0 + \sum_{\mu=1}^{n} \tau_\mu(t), \quad \tau_\mu(t) := a_\mu \cos \mu t + b_\mu \sin \mu t, \qquad T_n \not\equiv 0,$$

неравенства Фейера имеют вид

$$\sqrt{a_\mu^2 + b_\mu^2} \leqslant \omega\, a_0 < 2\, a_0, \qquad \omega := 2\cos\frac{\pi}{s+1}, \tag{1}$$

где $\mu = 1, 2, \ldots$, $n = s\mu - 1$. Эти неравенства и их различные модификации хорошо известны по многим экстремальным задачам для неотрицательных многочленов, см., например, работы С. Б. Стечкина, В. В. Арестова, А. С. Белова. При $\mu = 1$ ($s \geqslant 2$) оценки (1) получены Фейером (1915). При $\mu > 1$ оценки получены Эгервари и Сассом (1928), С. Б. Гашков (2005) значительно упростил их доказательство. Очевидно, неравенства (1) равносильны неравенству $|\tau_\mu(t)| \leqslant a_0\omega$. Однако точные оценки сумм нескольких гармоник τ_{μ_j} с заданными номерами $\mu_1 < \ldots < \mu_m$ неотрицательного многочлена имеют принципиально иной вид:

$$a_0\omega_1 \leqslant \sum_{j=1}^{m} \tau_{\mu_j}(t) \leqslant a_0\omega_2,$$

где $\omega_1 < 0 < \omega_2$, причем $-\omega_1 \neq \omega_2$. Для получения такого типа оценок разработан алгоритм, опирающийся на методы работы [1]. Приведем примеры точных двусторонних оценок при $n = 20$.

$$-2.18588\ldots a_0 \leqslant \tau_1(t) + \tau_2(t) \leqslant 3.90353\ldots a_0$$

$$-2.46974\ldots a_0 \leqslant \tau_1(t) + \tau_2(t) + \tau_3(t) \leqslant 5.74472\ldots a_0$$

$$-2.72215\ldots a_0 \leqslant \tau_1(t) + \tau_2(t) + \tau_3(t) + \tau_4(t) \leqslant 7.48354\ldots a_0$$

Литература

1. Danchenko V.I. Extraction of pairs of harmonics from trigonometric polynomials by phase-amplitude operators /

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России (задание No 1.574.2016/1.4) и РФФИ (проект No 18-01-00744).

V.I. Danchenko, D.Ya. Danchenko // Journal of Mathematical Sciences. — 2018. — Vol. 232, No. 3. — P. 322–337.

УТОЧНЕНИЕ НЕРАВЕНСТВА ФЕЙЕРА НА ОДНОМ ПОДКЛАССЕ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ[1]

В.И. Данченко, Д.Я. Данченко (Владимир, ВлГУ)
vdanch2012@yandex.ru

Классическое неравенство Фейера для неотрицательного многочлена

$$T_n(t) = a_0 + \sum_{\mu=1}^{n} \tau_\mu(t), \quad \tau_\mu(t) := a_\mu \cos \mu t + b_\mu \sin \mu t, \qquad a_0 > 0,$$

имеет вид

$$\|\tau_1\| \leqslant \alpha_n := 2a_0 \cos \frac{\pi}{n+2}, \quad \|\cdot\| = \|\cdot\|_{L_\infty[-\pi,\pi]}. \tag{1}$$

Неравенство (1) точное: при каждом натуральном n существует неотрицательный многочлен $T_n^* \not\equiv 0$, на котором достигается равенство. Неравенство (1) хорошо известно по многим экстремальным задачам для неотрицательных многочленов.

В работе [1] для неотрицательного многочлена T_n ($a_0 > 0$) получено точное неравенство для двух гармоник:

$$\tau_1(t) + \tau_n(t) \leqslant 2a_0 \qquad \forall t.$$

Опираясь на него, можно получить следующую оценку

$$\|\tau_1\| \leqslant \beta_n := (2a_0 - \|\tau_n\|) \cos^{-1} \frac{\pi}{n}.$$

Легко проверить, что эта оценка точнее (1) при условии

$$a_0 \leqslant \frac{1}{2} \frac{\|\tau_n\|}{1 - \cos \frac{\pi}{n} \cdot \cos \frac{\pi}{n+2}}.$$

Неотрицательные многочлены, для которых это условие выполняется, существуют, например, $T_n(t) = 2 + \cos t + \cos nt$, $n \geqslant 10$. В этом примере $\beta_n/\alpha_n < 0.9$.

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России (задание No 1.574.2016/1.4) и РФФИ (проект No 18-01-00744).

Литература

1. Danchenko V.I. Extraction of pairs of harmonics from trigonometric polynomials by phase-amplitude operators / V.I. Danchenko, D.Ya. Danchenko // Journal of Mathematical Sciences. — 2018. — Vol. 232, No. 3. — P. 322–337.

О РЕГУЛЯРНЫХ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ПОЛИНОМАХ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРАХ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ[1]

Е. Е. Дикарев (Воронеж, ВГУ)
egor.dikarev@gmail.com

Проведённому исследованию существенно способствовало появление статьи Э. Мухамадиева, А. Н. Наимова, А. Х. Сатторова [1], в которой были получены необходимые и достаточные условия обратимости в пространстве непрерывных ограниченных функций дифференциальных операторов, которые строились по определённому классу полиномов. В данном исследовании изучаются спектральные свойства дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами, определённых на подпространствах непрерывных ограниченных функций. Вводится класс регулярных на бесконечности полиномов, с помощью которых определяются рассматриваемые дифференциальные операторы. Так, полиномы, определяющие эллиптические операторы [2], являются регулярными на бесконечности. Определение операторов и исследование их спектральных свойств существенно опираются на спектральную теорию функций и спектральную теорию банаховых модулей [3]. Получены необходимые и достаточные условия обратимости дифференциальных операторов, построенных по регулярным на бесконечности полиномам, описан спектр таких операторов, а также свойства их ядер и образов. Также приводятся условия компактности резольвенты рассматриваемых дифференциальных операторов.

Литература

1. Мухамадиев Э. Аналог теоремы Боля для одного класса линейных дифференциальных уравнений в частных производных / Э. Мухамадиев, А. Н. Наимов, А. Х. Сатторов // Уфимск. матем. журн. — 2017. — Т. 9, № 1. — С. 75–88.

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-31-00354).

2. Мизохата С. Теория уравнений с частными производными / С. Мизохата. — М. : Мир, 1977. — 504 с.

3. Баскаков А. Г. Гармонический анализ в банаховых модулях и спектральная теория линейных операторов / А. Г. Баскаков. — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2016. — 152 с.

НЕРАВЕНСТВА ТИПА С.М. НИКОЛЬСКОГО ДЛЯ НАИПРОСТЕЙШИХ ДРОБЕЙ

А.Е. Додонов (Владимир, ВлГУ)
art-dodonov@mail.ru

Наипростейшей дробью (н.д.) порядка $n \in \mathbb{N}$ от комплексного переменного z называется рациональная функция вида

$$\rho_n(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z - z_k}, \qquad z_k \in \mathbb{C}.$$

Первое неравенство типа С.М. Никольского для н.д. было получено в 1994 году В.И. Данченко в [1]. Оно имеет вид

$$\|\rho_n\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \leqslant \beta_p \cdot \|\rho_n\|^q_{L_p(\mathbb{R})}, \qquad \beta_p := \frac{2p}{\sin^q(\pi/p)}, \qquad p > 1, \qquad (1)$$

где $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Используя тот же метод, что и в [1], но проводя выкладки более тщательно, удалось уточнить неравенство (1):

$$\|\rho_n\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \leqslant 2^{1-q}\beta_p \cdot \|\rho_n\|^q_{L_p(\mathbb{R})}. \qquad (2)$$

Так, при $p = 2$ мажоранта в (2) в 2 раза меньше мажоранты в (1).

Отметим, что с помощью равномерной оценки (2) методами работы [2] (см. теорему 2 и замечание к ней) можно получить более общее неравенство типа С.М. Никольского:

$$\|\rho_n\|^q_{L_p(\mathbb{R})} \leqslant A(p, r)\|\rho_n\|^s_{L_r(\mathbb{R})}, \quad 1 < r < p \leqslant \infty, \quad r^{-1} + s^{-1} = 1.$$

Литература

1. Данченко В.И. Оценки расстояний от полюсов логарифмических производных многочленов до прямых и окружностей / В.И. Данченко // Матем. сб. — 1994. — Т. 185, №8. — С. 63–80.

2. Данченко В.И. Оценки L_p-норм наипростейших дробей / В.И. Данченко, А.Е. Додонов // Изв. вузов. Матем. — 2014. — №6. — С. 9–19.

НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ СХОДИМОСТИ РЯДОВ НАИПРОСТЕЙШИХ ДРОБЕЙ В $L_p(\mathbb{R})$

А.Е. Додонов (Владимир, ВлГУ)
art-dodonov@mail.ru

Получено (см. также [1], [2]) необходимое условие сходимости в $L_p = L_p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$, бесконечной наипростейшей дроби

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z - z_k}, \qquad z_k = x_k + iy_k, \quad y_k \neq 0. \tag{1}$$

Теорема 1. *Если при $1 < p < \infty$ и $\varepsilon > 0$ бесконечная наипростейшая дробь (1) сходится к некоторой функции ρ_∞ с конечной L_p-нормой, то*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|z_k|^{1/q} \ln^{(1+\varepsilon)/q}(|z_k| + 1)} < \frac{A}{\varepsilon^{1/q}},$$

где $p^{-1} + q^{-1} = 1$, $A = A(p, \|\rho_\infty\|_{L_p})$.

При $2 \leqslant p < 3$ существенно усилить теорему 1 нельзя. Именно, существует такая бесконечная наипростейшая дробь (1) с конечной L_p-нормой, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|z_k|^{1/q} \ln^{1/p-\delta}(|z_k| + 1)} = \infty, \qquad \delta > 0.$$

Литература

1. Додонов А.Е. О сходимости рядов наипростейших дробей в $L_p(\mathbb{R})$ / А.Е. Додонов // Пробл. мат. ан. — 2015. — Т. 82. — С. 83–87.

2. Додонов А.Е. О сходимости рядов наипростейших дробей в $L_p(\mathbb{R})$ / А.Е. Додонов // Теория функций, ее приложения и смежные вопросы : материалы XII Международной Казанской летней научной школы-конференции. — Казань : Казанское математическое общество, 2015. — С. 178–180.

ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗРЕШИМОСТИ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ ФОЙГТА[1]

А.Н. Долгих (Воронеж, ВГУ)
alpine445@gmail.com

В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n, n = 2,3$ с локально-липшицевой границей $\partial\Omega$ на промежутке времени $[0,T]$, $0 < T < \infty$ рассматривается начально-краевая задача для модели движения сжимаемой жидкости Фойгта:

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t} + \rho\sum_{i=1}^{n} v_i\frac{\partial v}{\partial x_i} - \nu\Delta v - \varkappa\frac{\partial\Delta v}{\partial t} - \nabla\mathrm{div}\, v - \nabla\mathrm{div}\,\frac{\partial v}{\partial t} + \nabla p = \rho f;$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\rho v) = 0; \quad \rho|_{t=0} = \rho_0,\ v|_{t=0} = v_0,\ v|_{\partial\Omega\times[0,T]} = 0. \qquad (1)$$

Реологическое соотношение для рассматриваемой модели движения жидкости Фойгта было получено экспериментальным путём (см. [1]) при исследовании слабо концентрированных водных полимерных растворов (полиэтиленоксида, полиакриламида и гуаровой смолы). Основным результатом является следующая теорема:

Теорема 1. *Пусть* $f \in L_2(0,T;L_2(\Omega)^n), v_0 \in W_0^{1,2}(\Omega)^n, \rho_0 \in L_\infty(\Omega), 0 < m < \rho_0 < M < \infty$. *Тогда существует слабое решение* $v \in W = \{u : u \in C([0,T], W_0^{1,2}(\Omega)^n), u' \in L_2(0,T;W_0^{1,2}(\Omega)^n)\}$, $\rho \in E = \{\psi : \psi \in L_\infty(0,T;L_\infty(\Omega)), \psi' \in L_2(0,T;W^{-2,2}(\Omega))\}$ *начально-краевой задачи (1).*

Доказательство проводится с использованием идей и методов монографий [2,3], а также аппроксимационно-топологического подхода к исследованию задач гидродинамики.

Литература

1. Павловский В. А. К вопросу о теоретическом описании слабых водных растворов полимеров / В. А. Павловский // ДАН СССР. – 1971. – Т. 200, вып. 4. – С. 809-812.

2. Plotnikov P. Compressible Navier-Stokes Equations. Theory and Shape Optimization / P. Plotnikov, J. Sokolowski. – Springer: Birkhauser Basel, 2012. – 464 p.

3. Feireisl E. Dynamics of Viscous Compressible Fluids / E. Feireisl. — Oxford : Oxford University Press, 2003. — 212 p.

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (проект 14.Z50.31.0037).

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ МОДЕЛИ ОСКОЛКОВА-ПАВЛОВСКОГО[1]

А.Н. Долгих, А.С. Устюжанинова, М.В. Турбин
(Воронеж, ВГУ)
mrmike@mail.ru

Рассматривается задача оптимального управления движением жидкости с обратной связью для модели Осколкова-Павловского:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \nu\Delta v + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \varkappa\frac{\partial \Delta v}{\partial t} - \varkappa\sum_{k=1}^{n} v_k \frac{\partial \Delta v}{\partial x_k} + \nabla p = f \in \Psi(v),$$

$$\operatorname{div} v = 0,\ v|_{t=0} = a,\ v|_{\partial\Omega\times[0,T]} = 0. \qquad (1)$$

Определение 1. *Пусть* $a \in V^2$. *Слабое решение задачи (1) — пара функций* $(v, f), v \in W = \left\{u : u \in L_\infty(0,T;V^2), u' \in L_2(0,T;V^1)\right\}, f \in L_2(0,T;V^0)$, *которая для всех* $\varphi \in V^1$ *и для почти всех* $t \in (0,T)$ *удовлетворяет тождеству*

$$\int_\Omega \frac{\partial v}{\partial t}\varphi dx + \nu\int_\Omega \nabla v : \nabla\varphi dx - \sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx +$$

$$+\varkappa\int_\Omega \nabla\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right) : \nabla\varphi dx + \varkappa\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega v_i \Delta v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx = \int_\Omega f\varphi dx,$$

условию обратной связи $f \in \Psi(v)$ *и начальному условию* $v(0) = a$.

Предполагается, что мультиотображение $\Psi : W \multimap L_2(0,T;V^0)$ определено на W, имеет непустые, компактные, выпуклые значения; полунепрерывно сверху; компактно; глобально ограничено и слабо замкнуто.

Обозначим через $\Sigma \subset W \times L_2(0,T;V^0)$ множество всех слабых решений рассматриваемой задачи (1). Рассмотрим произвольный ограниченный снизу, слабо замкнутый функционал качества $\Phi : \Sigma \to \mathbb{R}$. Основным результатом является следующая теорема:

Теорема 1. *Пусть* $a \in V^2$. *Для любых определённых выше* Ψ *и* Φ *задача оптимального управления движением жидкости*

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (проект 14.Z50.31.0037).

с обратной связью для модели Осколкова-Павловского (1) имеет хотя бы одно слабое решение (v_*, f_*) *такое, что* $\Phi(v_*, f_*) = \inf\limits_{(v,f)\in\Sigma} \Phi(v, f)$.

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЗОНАЛЬНОГО ЭЛЕКТРОФОРЕЗА С ПЕРЕОДИЧЕСКИМИ НАЧАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ[1]

Т.Ф. Долгих (Ростов-на-Дону, ЮФУ)
dolgikh@sfedu.ru

Процесс переноса вещества под действием электрического поля в бездиффузионном приближении, как правило, описывается системой квазилинейных гиперболических уравнений в частных производных первого порядка. В частности, такие уравнения описывают зональный электрофорез — метод разделения смеси на индивидуальные компоненты. Оказалось, что при некоторых значениях параметров переноса тип уравнений становится эллиптическим.

В данной работе рассматривается случай системы из двух уравнений, которая всегда приводится к инвариантам Римана. В начальный момент времени известны концентрации отдельных компонент. В гиперболическом случае решение задачи проводилось с помощью метода конечных объемов и метода годографа, базирующегося на наличии законов сохранения. Как оказалось, метод годографа формально применим и в случае уравнений эллиптического типа.

В качестве примера для задачи электрофореза рассмотрены пространственно-периодические начальные данные, которые соответствуют возмущению постоянного решения. Результаты вычислений показывают, что с течением времени пространственно периодическое возмущение исчезает. Приведен сравнительный анализ полученных результатов с ранее проведёнными исследованиями процесса зонального электрофореза.

Литература

1. Жуков М. Ю. Метод годографа для решения гиперболических и эллиптических квазилинейных уравнений / М. Ю. Жуков,

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке базовой части технического задания 1.5169.2017/8.9 Министерства образования и науки РФ, ЮФУ.

Е. В. Ширяева, Т. Ф. Долгих. — Ростов н/Д : Изд. ЮФУ, 2015. — 126 с.

2. Жуков М. Ю. Математическое моделирование процесса седиментации примеси в потоке жидкосcти / М. Ю. Жуков, Е. В. Ширяева. — Ростов-на-Дону : Изд. ЮФУ, 2016. — 208 с.

ПЛОТНОСТЬ СУММ СДВИГОВ ОДНОЙ ФУНКЦИИ В ПРОСТРАНСТВАХ ХАРДИ [1]

Н.А. Дюжина (Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова)
natasha17954@yandex.ru

Пусть $1 \leqslant p < \infty$. Функция F, аналитическая в полуплоскости $\Pi_+ = \{z \in \mathbb{C} : \ \mathrm{Im}\, z > 0\}$, принадлежит пространству $H_p(\Pi_+)$, если

$$\|F\|^p_{H_p(\Pi_+)} = \sup_{y>0} \int_{\mathbb{R}} |F(x+iy)|^p dx < \infty.$$

Функции из пространства $H_p(\Pi_+)$ можно доопределить почти всюду на $\mathbb{R}$, причем $\|F\|_{H_p(\Pi_+)} = \|F\|_{L_p(\mathbb{R})}$.

Функция F, аналитическая в Π_+, принадлежит пространству $AC_0(\Pi_+)$ с нормой $\|F\|_{AC_0} = \max_{z\in\overline{\Pi}_+} |F(z)| = \max_{x\in\mathbb{R}} |F(x)|$, если F непрерывна в $\overline{\Pi}_+$, а также

$$\lim_{z\to\infty,\ z\in\overline{\Pi}_+} F(z) = 0.$$

Следующее утверждение отвечает на один из вопросов, поставленных в работе [1].

Теорема. *Существует функция* $f : \overline{\Pi}_+ \to \mathbb{C}$*, для которой суммы действительных сдвигов*

$$\sum_{k=1}^{n} f(z - a_k), \quad a_k \in \mathbb{R}, \ \ n \in \mathbb{N},$$

плотны во всех пространствах $H_p(\Pi_+)$ *при* $2 \leqslant p < \infty$*, а также в пространстве* $AC_0(\Pi_+)$*.*

Литература

1. Borodin P.A. Convergence to zero of exponential sums with positive integer coefficients and approximation by sums of shifts of a

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-0333).

single function on the line /P.A. Borodin, S.V. Konyagin // Analysis Mathematica. — 2018. — 44:2. — P. 163–183.

ПРОБЛЕМЫ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ В ШКОЛЕ В КОНТЕКСТЕ ОБРАЗОВАННОСТИ СОВРЕМЕННОЙ МОЛОДЕЖИ

И.А. Елецких, Г.Г. Ельчанинова, Т.Е. Рыманова
(Елец, ЕГУ им. И.А. Бунина)
yeletskikh.irina@yandex.ru, eltchaninova-gg@mail.ru, barkarelez@mail.ru

В настоящее время российское государство переживает непростой период, связанный с изменением геополитической ситуации, внутренними проблемами экономического и технологического характера, морально-этическим состоянием российского общества.

Проблемы, с которыми столкнулась наша страна, заставляют пересмотреть образовательную политику и разработать новую стратегическую линию, которая сегодня становится составной частью национальной безопасности. В этой связи необходимо рассмотреть некоторые проблемные аспекты математического образования и четко обозначить возможные риски.

Отметим, что исторически в российском национальном сознании получение образования традиционно ассоциировалось с определенным уровнем образованности молодого человека. Обобщение разных точек зрения позволяет охарактеризовать последнее не только как результат обучения, но и как степень культурности человека, уровень усвоения им историко-культурного наследия предшествующих поколений [1]. К сожалению, сегодня основные нормативные документы, регламентирующие жизнь школы, не нацеливают на повышение уровня образованности современной молодежи, делают это заботой родителей. В данном контексте особая роль принадлежит математике: в процессе ее изучения молодой человек знакомится со значимыми для человечества научными открытиями, незримо соприкасается с историей нашей цивилизации.

На фоне перечисленных выше проблем, сегодня особенно актуальным является вопрос о всеобщем качественном школьном математическом образовании.

Литература

1. Саввина О.А. Признаки кризиса отечественной методики преподавания математики / О.А. Саввина // Математика в школе. — 2017.— № 2. — С. 3–8.

ОГРАНИЧЕННОСТЬ НОРМ ОПЕРАТОРОВ КЛАССА S_2 НА ОСНОВЕ ОБОБЩЕННОГО ЯДРА ДЖЕКСОНА

Е.М. Ершова (Тверь, ТвГУ)
Ershova.EM@tversu.ru

Обобщенное ядро Джексона имеет вид

$$K_n(t) = \left(\frac{\sin \frac{nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^{2l}, \quad l = 1, 2, \ldots$$

Рассмотрим оператор класса S_2 на основе данного ядра, имеющий вид (см. [1])

$$L_n^{[2]}(f, x) = \frac{1}{\Delta_n^{[2]}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \left(\frac{\sin \frac{nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^{2l} (\cos t - \cos \alpha_n)\, dt, \qquad (1)$$

где $0 < \alpha_n < \pi$ и $\Delta_n^{[2]} = \int\limits_{-\pi}^{\pi} K_n(t)(\cos t - \cos \alpha_n)\, dt$ — нормирующий множитель.

Лемма. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} n\sqrt{1-\cos\alpha_n} = \frac{A}{\sqrt{2}}$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty} n\alpha_n = A$.

Теорема. *Если существуют конечные пределы*

$$\lim_{n\to\infty} n\alpha_n = A \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^{2l-3}}{\Delta_n^{[2]}} = B,$$

то норма оператора (1) ограничена.

В частности, при $l = 4$ и $\cos\alpha_n = \frac{2n^4-2n^2-3}{2(n^4+n^2+1)}$ имеем:

$$\lim_{n\to\infty} n\sqrt{1-\cos\alpha_n} = \sqrt{2}; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^5}{\Delta_n^{[2]}} = \frac{315}{394\pi}.$$

Таким образом, условия леммы и теоремы выполняются, и норма соотетствующего оператора ограничена.

Литература

1. Ершова Е.М. Оптимальные операторы классов S_2 и S_4 и их асимптотические свойства / Е.М. Ершова // Применение функционального анализа в теории приближений : сб. — Тверь : ТвГУ, 2002. — С. 69–76.

ВОССТАНОВЛЕНИЕ РАЗРЫВОВ ПОТЕНЦИАЛА В ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ[1]

Л.С. Ефремова (Саратов, СГУ)
liubov.efremova@gmail.com

Пусть $\Lambda_\nu = \{\lambda_n^{(\nu)}\}$, $\nu = 1, 2$ — спектры краевых задач L_ν:

$$-y'' + q(x)y + \int_0^x M(x,t)y(t)\,dt = \lambda y, \qquad y(0) = y^{(\nu-1)}(\pi) = 0, \quad (1)$$

где вещественнозначная функция $q(x)$ (*потенциал*) представима в виде

$$q(x) = q_1(x) + \sum_{x<a_j} h_j,$$

$q_1(x) \in C^1[0,\pi]$, $M(x,t) \in C^1(T)$, $T = \{(x,t) : 0 \leqslant t \leqslant x \leqslant \pi\}$.

В работе [1] исследовалась *обратная задача* восстановления потенциала $q(x)$ по спектрам Λ_ν, $\nu = 1, 2$ при условии, что функция $M(x,t)$ известна априори. Известно, что важным этапом конструктивного решения такой задачи является выбор "модельной"задачи с "близким"к искомому потенциалом $\tilde{q}(x)$, что делает актуальной задачу предварительного нахождения параметров $\{a_j, h_j\}_{j=1}^N$ разрывов потенциала.

Определим последовательность $\{\lambda_n\}_{n=0}^\infty$ следующим образом: $\lambda_{2n+1} := \lambda_n^{(2)}$, $n = 0, 1, \ldots$, $\lambda_{2n} := \lambda_n^{(1)}$, $n = 1, 2, \ldots$. Известно [1], что существует $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\lambda_n - n^2/4\right) =: A$. Введем в рассмотрение функцию:

$$p_N(x) := \frac{2\pi i}{N} \sum_{n=N+1}^{2N} n c_n \exp(inx),$$

где $c_n := \lambda_n - n^2/4 - A$.

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 17-11-01193).

Теорема 1. *При* $x \neq a_j$, $j = \overline{1, N}$,

$$\lim_{N\to\infty} p_N(x) = 0; \ \lim_{N\to\infty} p_N(a_j) = h_j.$$

Литература

1. Курышова Ю.В. Обратная спектральная задача для интегродифференциальных операторов / Ю.В. Курышова // Матем. заметки. — 2007. — Т. 81, № 6. — С. 855—866.

ПСИХОДИДАКТИЧЕСКИЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ В ВУЗЕ

Л.В. Жук (Елец, ЕГУ им. И.А. Бунина)
krasnikovalarisa@yandex.ru

Наметившаяся тенденция к трансформации системы отечественного высшего образования выражается в переходе от предметно-центрической модели подготовки выпускников, ориентированной на овладение знаниями, умениями, навыками в рамках заданной квалификационной характеристики, к сущностной модели, в основе которой лежат компетентностный подход и психодидактические закономерности развития личности [1].

В сущностной модели обучения акцент смещается на формирование профессиональной компетентности — совокупности социально-значимых качеств выпускника вуза, позволяющих применять знания в нестандартных ситуациях, выполнять широкий набор функций в условиях реальной трудовой деятельности. Важнейшими из этих качеств являются способности к поиску информации, критическому анализу, осмыслению, пониманию содержания учебного материала, к самостоятельному и творческому мышлению.

Особую актуальность обращение к сущностной модели обучения приобретает в области высшего математического образования ввиду того, что усвоение знаний здесь идет преимущественно через диалектическое восхождение от абстрактного к конкретному. В связи с этим возрастает значение психолого-дидактического подхода к конструированию процесса обучения математике в вузе.

Исследование направлено на решение проблемы реализации концепции социокультурно-ориентированного обучения математике, в русле которой обеспечиваются важнейшие психодидактические закономерности процесса обучения — понимание, усвоение

и применение [2]. Представлены элементы технологии социокультурного обучения геометрии будущих бакалавров педагогического образования, ориентированной на формирование мотивационного, пространственного и логического компонентов социокультурной коммуникации.

Понимание представлено как одна из функций мышления, состоящая в раскрытии существенного в предметах и явлениях, осознании связей и отношений, что обеспечивается передачей значения или смысла математической информации посредством предметно-символьных систем.

Усвоение предполагает овладение действиями по установлению нового значения предмета в процессе объективации условий осуществления этих действий в виде образца, плана. Необходимым условием эффективности усвоения является полнота ориентировочной основы действия, подлежащего формированию.

Развитие способности применения содержательного материала осуществляется посредством формирования и совершенствования умений на репродуктивном, продуктивном и продуктивно-творческом уровнях.

Содержащиеся в исследовании материалы могут быть внедрены в практику работы вузовских преподавателей геометрии, а также учителей профильных математических классов.

Литература

1. Земляков А.Н. Психодидактические аспекты углубленного изучения математики в старших классах общеобразовательной средней школы / А.Н. Земляков // Учебно-методическая газета «Математика». «Первое сентября». — 2005. — № 6. — С. 17–21.

2. Подаева Н.Г. Обновление содержания школьного математического образования: социокультурный подход / Н.Г. Подаева, М.В. Подаев. — СПб. : «Лань». — 2014. — 224 с.

ПЕРВАЯ НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С СИНГУЛЯРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

Н.В. Зайцева (Казань, КФУ)
n.v.zaiceva@yandex.ru

В прямоугольной области $D = \{(x,t)|\, 0 < x < l, 0 < t < T\}$ координатной плоскости Oxt, где $l, T > 0$ — заданные действитель-

---

ные числа исследована начально-граничная задача: найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую условиям:

$$u_{tt} - u_{xx} - \frac{k}{x} u_x = 0, \quad k \neq 0, \quad (x,t) \in D,$$

$$u(x,t) \in C(\overline{D}) \cap C^2(D), \quad x^k u_x(x,t) \in C(\overline{D}),$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l,$$

$$u(l,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

$$u(0,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad k < 1,$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$ — заданные достаточно гладкие функции, удовлетворяющие условиям $\varphi(l) = \psi(l) = 0$ и $\varphi(0) = \psi(0) = 0$ при $k < 1$.

Методом интегральных тождеств доказана

Теорема единственности решения. *Если существует решение задачи, то оно единственно.*

Решение построено в виде ряда Фурье–Бесселя. Методом спектрального анализа [1, 2] доказана теорема существования решения поставленной задачи. Доказана

Теорема устойчивости. *Для решения задачи справедлива оценка* $||u(x,t)|| \leqslant C(||\varphi(x)|| + ||\psi(x)||)$, *где* $||f(x)||^2 = \int\limits_0^l \rho(x)|f(x)|^2 dx$, $\rho(x) = x^k$.

Литература

1. Zaitseva N.V. Keldysh type problem for B-hyperbolic equation with integral boundary value condition of the first kind / N.V. Zaitseva // Lobachevskii J. of Mathematics. — 2017. — V. 38, № 1. — P. 162–169.

2. Сабитов К.Б. Начальная задача для B-гиперболического уравнения с интегральным условием второго рода / К.Б. Сабитов, Н.В. Зайцева // Дифференц. уравнения. — 2018. — Т. 54, № 1. — С. 123–135.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ В ЗАДАЧЕ О ДВИЖЕНИИ ВЯЗКОУПРУГОГО ТЕЛА

Д.А. Закора (Симферополь, КФУ)
dmitry.zkr@gmail.com

Задача о малых движениях синхронно-изотропного вязкоупругого тела, закрепленного на границе ограниченной области, может быть записана в виде следующей задачи Коши для интегро-дифференциального уравнения второго порядка в некотором гильбертовом пространстве $\mathbf{H}$:

$$\frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2} = -\alpha_0 A\mathbf{u} + \sum_{l=1}^{m} \int\limits_0^t e^{-b_l(t-s)} \alpha_{-l} A\mathbf{u}(s)\, ds + \mathbf{f}(t),$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}^0, \quad \mathbf{u}'(0) = \mathbf{u}^1.$$

Здесь A — самосопряженный положительно определенный оператор, $A^{-1} \in \mathfrak{S}_q(\mathbf{H})$ при некотором $q > 0$, $\alpha_{-l} > 0$ $(l = \overline{0,m})$, $b_l > 0$ $(l = \overline{1,m})$, $\alpha_0 - \sum_{l=1}^m \alpha_{-l} b_l^{-1} > 0$, $\mathbf{f}(t)$ — заданная функция. Рассматриваемая задача представляет собой некоторый частный случай задачи о движении вязкоупругого тела. Спектральный анализ последней задачи проведен в [1].

По системе корневых элементов операторного пучка, ассоциированного с приведенным интегро-дифференциальным уравнением, специальным образом построена система $\{\xi_k^{(p)}\}_{p=\overline{1,m+2},k\in\mathbb{N}}$ элементов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} := \oplus_{l=1}^{m+2}\mathbf{H}$. Доказано, что построенная система образует p-базис пространства $\mathcal{H}$ при $p \geqslant 2q$. С использованием построенного базиса найдено представление для решения исходной задачи Коши.

Литература

1. Zakora D.A. Spectral analysis of a viscoelastic problem/ D.A. Zakora // Computational Mathematics and Mathematical Physics — 2018. — Vol. 58, No. 11. — P. 1761–1774.

О ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЯХ С КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ ТИПА SWEEPING ПРОЦЕССА[1]

М.Б. Зверева, М.И. Каменский (Воронеж, ВГУ)
margz@rambler.ru, mikhailkamenskii@mail.ru

В докладе предполагается рассмотреть несколько типов начально-краевых задач для гиперболических уравнений с нелинейными условиями. Например, будет рассмотрена модель колебаний системы струн, расположенной вдоль геометрического графа-звезда с упругой опорой в узле. Мы предполагаем, что движение струн на концах ограничено сосредоточенными втулками, которые также могут двигаться в перпендикулярном к плоскости графа направлении. Математическая модель такой задачи имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad 0 < x < l, 0 < t < T(i = 1, 2, ...n) \\ u_i(x,0) = \varphi_i(x), \\ \dfrac{\partial u_i}{\partial t}(x,0) = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial u_i}{\partial x}(0,t) = \gamma u(0,t), \\ u(0,t) = u_1(0,t) = u_2(0,t) = ...u_n(0,t), \\ u_i(l,t) \in C_i(t), \\ -\dfrac{\partial u_i}{\partial x}(l,t) \in N_{C_i(t)}(u_i(l,t)). \end{cases} \tag{1}$$

Здесь множество $N_{C_i(t)}(u_i(l,t))$ — нормальный конус к $C_i(t)$ в точке $u_i(l,t)$. Движение втулок задается формулами $C_i(t) = [-h_i, h_i] + \xi_i(t)$.

Теорема. *Предположим, что функции $\xi_i(t)$ удовлетворяют условию Липшица для всех $t \geqslant 0$, а функции $\varphi_i(x)$ удовлетворяют условию Липшица для всех $x \in [0,l]$. Тогда модель (1) является корректной, то есть решение (1) существует, единственно и непрерывно зависит от начальных данных.*

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках проектной части государственного задания (проект № 1.3464.2017/ ПЧ.), гранта РФФИ (проект № 17-51-52022 МНТ-а.)

АЛЬФА-МОДЕЛЬ КЕЛЬВИНА-ФОЙГТА[1]

А.В. Звягин (Воронеж, ВГУ)
zvyagin.a@mail.ru

В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, рассматривается следующая начально–краевая задача (см. [1]–[3]):

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \nu \Delta v - \varkappa \frac{\partial \Delta v}{\partial t} - 2\varkappa \mathrm{Div}\big(v_i \frac{\partial \mathcal{E}(v)}{\partial x_i}\big) + \nabla p = f, \quad (1)$$

$$\mathrm{div}\, v(t,x) = 0, \quad u = (I - \alpha^2 \Delta)^{-1} v, \quad v|_{\partial\Omega} = 0, \quad v|_{t=0} = v_0. \quad (2)$$

Здесь, $v = (v_1(t,x), \ldots, v_n(t,x))$ — скорость движения частицы жидкости, u — функция модифицированной скорости движения частицы жидкости, $p = p(t,x)$ — функция давления, $f = f(t,x)$ — функция плотности внешних сил. Через $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_{ij}(v))$, $\mathcal{E}_{ij}(v) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$, $i, j = 1, \ldots, n$, обозначается тензор скоростей деформации, $\varkappa > 0$ – время ретардации (запаздывания), ν – вязкость жидкости, $\alpha > 0$ — скалярный параметр.

Введём пространство $E_1 = \{v : v \in L_\infty(0,T; V^1), v' \in L_2(0,T; V^{-1})\}$, в котором будет доказана разрешимость изучаемой задачи.

Теорема 1. *Пусть $f \in L_2(0,T; V^{-1})$, $a \in V^1$. Тогда начально-краевая задача (1) – (2) имеет хотя бы одно слабое решение $v \in E_1$.*

Литература

1. Звягин А.В. Слабая разрешимость термовязкоупругой модели Кельвина-Фойгта / А.В. Звягин // Известия ВУЗов. Математика. — 2018. — №. 3. — С. 91–95.

2. Звягин А.В. Задача оптимального управления с обратной связью для математической модели движения слабо концентрированных водных полимерных растворов с объективной производной / А.В. Звягин // Сибирский математический журнал. — 2013. — Т. 54., №. 4. — С. 807–825.

3. Zvyagin A.V. Solvability of the stationary mathematical model of one non-Newtonian fluid motion with the objective derivative / A.V. Zvyagin // Fixed point theory. — 2014. — V. 15., I. 2. — P. 623–634.

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для государственной поддержки молодых российских ученых (грант МК-2213.2018.1, соглашение 075-02-2018-339).

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ДЕСКРИПТОРНОГО УРАВНЕНИЯ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

С.П. Зубова, Е.В. Раецкая (Воронеж, ВГУ)
spzubova@mail.ru, raetskaya@inbox.ru

Решается задача

$$A\frac{dx}{dt} = Bx(t), \quad x(0) = x^0, \tag{1}$$

где A — замкнутый линейный оператор: $E_1 \to E_2$; E_1, E_2 — банаховы пространства; $\overline{domA} = E_1$; $B \in L(E_1, E_2)$; $t \in [0, T]$, $T \leqslant \infty$; $x^0 \in E_1$.

Решение задачи (1) — это $x(t) \in C^1[[0,T] \to E_1]$, удовлетворяющее (1) $\forall t \in [0, T]$.

Оператор A необратим, уравнение (1) называется дифференциально-алгебраическим, алгебро-дифференциальным, дескрипторным.

Как правило, единственность решения задачи (1) связывают со свойством регулярности операторного пучка $A - \lambda B$ (регулярности пары (A, B)) (Крейн С.Г.,Федоров В.Е., Свиридюк Г.А., Бояринцев Ю.Е., Чистяков В.Ф., Щеглова А.А., Kunkel P., Mehrmann V. и др).

Действительно, в случае конечномерного оператора A с квадратной матрицей, в случае фредгольмова оператора A с нулевым индексом æ (æ $= \dim$ Ker $A - \dim$ Coker$A$), с оператором A, имеющим число 0 нормальным собственным числом, решение задачи (1) существует в некотором подпространстве и единственно в том и только том случае, когда пара (A, B) регулярная [1].

Если же A — фредгольмов с ненулевым конечным индексом, то операторный пучок $A - \lambda B$ необратим. Теперь решение задачи (1) существует в некотором подпространстве и единственно тогда и только тогда, когда Ker $(A - \lambda B) = \{0\}, \forall \lambda \in \dot{U}(0)$ [2].

Здесь рассматривается оператор A с произвольным индексом.

Назовём A фредгольмовым с произвольным индексом æ ($A - \Phi_{æ}$, æ $\leqslant \infty$), если E_1, E_2 разлагаются в прямые суммы подпространств:

$$E_1 = \mathrm{Coim}A \dot{+} \mathrm{Ker}A, \quad E_2 = \mathrm{Im}A \dot{+} \mathrm{Coker}A,$$

где dim Ker $A \leqslant \infty$, dim Coker $A \leqslant \infty$ и сужение $\widetilde{A}$ на Coim A обратимо.

Задача (1) решается методом каскадной декомпозиции [1,2], в результате чего возникают операторы A_i, $i = 1, 2, \ldots$. Предполагается, что $A_i - \Phi_{æ}$, $æ \leqslant \infty$.

Пусть $\exists p \in N$ такое, что A_p — сюръекция. Сюръективность A_p эквивалентна условию Ker $(A - \lambda B) = \{0\}, \forall \lambda \in \dot{U}(0)$. Строится некоторое подпространство $M \in E_1$.

Теорема 1. *В вышеназванных предположениях решение* $x(t)$ *задачи* (1) *существует в том и только том случае, когда* $x^0 \in M$. *Оно единственно и принадлежит M.*

Если $\forall i \in N$ операторы A_i необратимы, (что эквивалентно тому, что Ker $(A - \lambda B) \neq \{0\}, \forall \lambda \in \dot{U}(0)$, то строится некоторое подпространство $\widetilde{M}$.

Теорема 2. *В случае Ker* $(A - \lambda B) \neq \{0\}, \forall \lambda \in \dot{U}(0)$ *решение задачи* (1) *существует в том и только том случае, когда* $x^0 \in \widetilde{M}$. *Оно принадлежит* $\widetilde{M}$ *и неединственно.*

В обоих случаях выводятся формулы для $x(t)$.

Литература

1. Зубова С.П. Решение задачи Коши для двух дифференциально-алгебраических уравнений с фредгольмовым оператором / С.П. Зубова // Дифференциальные уравнения. — 2005. — Т. 41, № 10. — С. 1410–1412.

2. Зубова С.П. Решение однородной задачи Коши для уравнения с нетеровым оператором при производной / С.П. Зубова // Доклады АН. — 2009. — Т. 428, № 4. — С. 444–446.

О РЕШЕНИИ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ[1]

М.Ю. Игнатьев (Саратов, СГУ)
ignatievmu@info.sgu.ru

Пусть Λ — спектр краевой задачи L:

$$(D^{\alpha} + DMJ^{2-\alpha})y = \lambda y, \qquad D^{\alpha-1}y(0) - D^{\alpha-1}y(1) = 0, \qquad (1)$$

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 17-11-01193).

где $\alpha \in (1,2)$, $D := d/dx$, D^α, J^α — операторы дробного интегро-дифференцирования Римана–Лиувилля, M — интегральный оператор вида:

$$Mf(x) = \int_0^x M(x-t,t)f(t)\,dt, \quad M(\eta,\xi) = N(\eta)p(\xi), \tag{2}$$

$p, N \in C[0,1]$, $p(x) > 0$ для всех $x \in [0,1]$.

В настоящей работе изучается *обратная задача* восстановления функции N по спектру Λ при условии, что функция p известна априори. Обозначим через $\tilde{\Lambda}$ спектр краевой задачи $\tilde{L}$ вида (1), но с другим оператором $\tilde{M}$ вида (2). Справедлива следующая теорема единственности.

Теорема 1. *Если $\tilde{\Lambda} = \Lambda$ и $\tilde{p} = p$, то $\tilde{N} = N$. Иными словами, задание спектра задачи (1), при априори известной функции p, однозначно определяет функцию N.*

Используя методы, развитые в работах [1], [2] можно также получить конструктивную процедуру решения рассматриваемой обратной задачи.

Литература

1. Buterin S.A. On the Reconstruction of a Convolution Perturbation of the Sturm–Liouville Operator from the Spectrum / S.A. Buterin // Differential Equations. — 2010. — V. 50, no. 1. — P. 150-–154.

2. Ignatiev M. On an inverse spectral problem for one integro-differential operator of fractional order / M. Ignatiev // J. Inverse Ill-Posed Probl. (2018). https://doi.org/10.1515/jiip-2017-0121.

О ДРОБНЫХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЯХ ТИПА СВЕРТКИ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

М. Илолов (Душанбе, Таджикистан,
Академия наук Республики Таджикистан)
ilolov.mamadsho@gmail.com

В работе представлены основы теории дробных линейных интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра типа свертки в банаховом пространстве. Установлено, что существование дробного резольвентного оператора для таких уравнений равносильно корректности постановки начальной задачи для них. В рамках этого подхода доказана теорема типа Хилле-Иосида.

Начальная задача для интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра первого порядка подробно изучена в работах [1-3]. В работах [4-6] при различных предположениях относительно A и $B(t)$ рассматривались уравнения дробного порядка.

Пусть X банахово пространство с нормой $\| \cdot \|$.

Рассматривается начальная задача

$$ {}^cD_t^\alpha U(t) = Au(t) + \int_0^t B(t-s)u(s)ds + f(t),\ u(0) = U_0, \qquad (1) $$

где ${}^cD_t^\alpha U(t)$ — дробная производная Капуто, $0 < \alpha < 1$, A — замкнутый линейный оператор плотно определенный в X, $\{B(t)\}_{t \geqslant 0}$ семейство линейных замкнутых операторов таких, что $D(B(t)) \supset D(A)$ для всех $t \geqslant 0$, функции $B(t)x$ сильно измеримые для $x \in D(A)$, и существует скалярная функция в $L^1_{loc}(R_+)$ такая, что

$$ \|B(t)x\| \leqslant b(t)(\|x\| + \|Ax\|) $$

для всех $x \in D(A)$, и для почти всех $t \geqslant 0, f \in C(R_+, X)$ и $u_0 \in X$.

Определение 1. *Семейство линейных ограниченных операторов* $\{S_\alpha(t)\}_t \geqslant 0, 0 < \alpha < 1$, *называется дробным резольвентным оператором для (1) если*

(S1) Для всех $x \in X, S_\alpha(t)x \in C(R_+, X), S_\alpha(0) = I$

(S2) $S_\alpha(t)D(A) \subset D(A)$ для всех $t \geqslant 0$ для $x \in D(A), AS_\alpha(t)x$ непрерывна и $S(t)x$ непрерывно дифференцируема на R_+

(S3) Для всех $x \in D(A)$ и $t \geqslant 0$ выполняются дробные резольвентные уравнения

$$ {}^cD_t^\alpha S_\alpha(t)x = AS_\alpha(t)x + \int_0^t B(t-s)S_\alpha(s)xds, \qquad (2) $$

$$ {}^cD_t^\alpha S_\alpha(t)x = S_\alpha(t)Ax + \int_0^t S_\alpha(t-s)B(s)xds, \qquad (3) $$

(S4) Выполняется

$$ \int_0^{t+s} \frac{S_\alpha(\tau)xd\tau}{(t+s-\tau)^\alpha} - \int_0^t \frac{S_\alpha(\tau)xd\tau}{(t+s-\tau)^\alpha} - \int_0^S \frac{S_\alpha(\tau)xd\tau}{(t+s-\tau)^\alpha} = $$

$$ = \alpha \int_0^t \int_0^S \frac{S_\alpha(\tau_1)S_\alpha(\tau_2)_d\tau_1 d\tau_2}{(t+s-\tau_1-\tau_2)^{1+\alpha}} \qquad (4) $$

где интегралы определены в сильной операторной топологии.

Установлены следующие результаты.

Теорема 1. *Существует не более одного дробного резольвентного оператора для (1).*

Теорема 2. *Пусть (1) допускает дробного резольвентного оператора* $S_\alpha(t)$ *и пусть* $u_0 \in X$ *и* $f \in C(J, X)$, *где* $J = [0, a]$. *Тогда, если* $u(t)$ *является решением задачи (1) на J, то*

$$u(t) = S_\alpha(t)U_0 + \int_0^t S_\alpha(t-\tau)f(s)ds \tag{5}$$

для всех $t \in J$.

Решение $u(t)$ интегрального уравнения (5) называется обобщенным решением задачи (1).

Из теоремы 2 получим следующее утверждение.

Следствие 1. *Пусть (1) допускает дробного резольвентного оператора. Тогда, задача (1) корректно поставлена в обобщенном смысле.*

Возникает вопрос о том, для каких начальных значений u_0 и функций f обобщенное решение является решением задачи (1).

Имеет место

Теорема 3. *Предположим что,* $S_\alpha(t)$ *дробный резольвентный оператор задачи (1). Пусть* $u_0 \in D(A)$ *и* $A \in C(Y, X) \bigcap L^2(J, X)$ *или* $f \in W^{1,1}(J, X)$.

Тогда решение $u(t)$ *уравнения (5) является решением задачи (1).*

Следующий результат содержит утверждение о существовании дробного резольвентного оператора для (1) и корректности однородного уравнения

$$^cD_t^\alpha u(t) = Au(t) + \int_0^t B(t-s)u(s)ds \tag{6}$$

в смысле С.Г. Крейна [7].

Теорема 4. *Задача (1)допускает дробный резольвентный оператор* $S_\alpha(t)$ *тогда и только тогда,когда уравнение (6) корректно поставлено.*

Литература

1. Da Prato G. Linear integro-differential equations in Banach spaces / G. Da Prato, M. Ianelli // — Rend.Sem.Mat.Univ. Padova — 1980. — V. 62. — pp. 207–219.

2. Grimmer R. Resolvent operators for integral equations in a Banach space / R. Grimmer // Trans.Am. Math.Soc. — 1982. — V. 273. — pp. 333–349.

3. Grimmer R. On linear Volterra equations in Banach spaces / R. Grimmer, G. Pruss // Comp.and Math. with Appls. — 1983. — V. 11, N 1-3. — pp. 189–205.

4. Peng Yigen A novel characteristic of solution operator for the fractional abstract Cauchy problem // Yigen Peng, Kexue Li // J.Math. Anal. Appl. — 2012. — V. 385. — pp. 786–796.

5. Илолов М. Дробные эволюционные уравнения и динамическая память / М. Илолов // ДАН РТ. — 2013. — Т. 56, № 8. — С. 591–597.

6. El-Borai M.M. On some fractional evolution equations / M.M. El-Borai, El-Nadia El-Said, E.G. El-Akabawy // Comput.Math.Appl. — 2010. — V. 59. — pp. 1352–1355.

7. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / С.Г. Крейн. — М. : Наука — 1967. — 401 с.

ОБ УСЛОВИЯХ ОБРАТИМОСТИ РАЗНОСТНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Л.Ю. Кабанцова (Воронеж, ВГУ)
dlju@yandex.ru

Пусть $\mathcal{X}$ – комплексное банахово пространство. Рассмотрим разностный оператор второго порядка $\mathfrak{D} \in \operatorname{End} l^p$ вида

$$(\mathfrak{D}x)(n) = x(n+2) + B_1 x(n+1) + B_2 x(n), \quad n \in \mathbb{Z},\ x \in l^p, \qquad (1)$$

действующий в банаховом пространстве $l^p = l^p(\mathbb{Z}, \mathcal{X}), p \in [1, \infty]$, двусторонних последовательностей векторов из комплексного пространства $\mathcal{X}$ суммируемых со степенью $p \in [1, \infty)$ и ограниченных последовательностей, если $p = \infty$.

Всюду предполагается, что операторы $B_1, B_2 \in \operatorname{End} \mathcal{X}$ и для спектра $\sigma(H)$ пучка H ($H : \mathbb{C} \to \operatorname{End} \mathcal{X}$, $H(\lambda) = \lambda^2 I + \lambda B_1 + B_2$, $\lambda \in \mathbb{C}$) выполнено условие

$$\sigma(H) \cap \mathbb{T} \neq \mathbb{T}, \quad \mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\} \qquad (2)$$

В работе выводится обратимость разностных операторов второго порядка (1) из более простых свойств: таких как равномерная

инъективность, сюрьективность и фредгольмовость. Для дифференциальных операторов второго порядка аналогичное исследование было проведено в статье [1]. Основными результатами являются следующие три теоремы:

Теорема 1. *Если разностный оператор* $\mathfrak{D} : l^p \to l^p$, $p \in [1, \infty]$, *равномерно инъективный, то он обратим.*

Теорема 2. *Если разностный оператор* $\mathfrak{D} : l^p \to l^p$, $p \in [1, \infty]$, *сюръективен, то он обратим.*

Теорема 3. *Если разностный оператор* $\mathfrak{D} : l^p \to l^p$, $p \in [1, \infty]$, *фредгольмов, то он обратим.*

Замечание. Если не выполнено условие (2) на спектр $\sigma(H)$ пучка H, то можно привести пример обратимого слева, но не обратимого разностного оператора.

Литература

1. Баскаков А. Г. Условия обратимости дифференциальных операторов второго порядка в пространстве непрерывных ограниченных функций / А. Г. Баскаков, Л. Ю. Кабанцова, Т. И. Смагина // Дифференциальные уравнения. — 2018. — Т. 54, № 3 — С. 292-301.

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ И ПЕРЕМЕННЫМИ ПРЕДЕЛАМИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

А.С. Калитвин (Липецк,
ЛГПУ им. П.П. Семенова-Тян-Шанского)
kalitvinas@mail.ru

В пространстве $C(D)$ непрерывных на квадрате функций изучаются следующие операторы с частными интегралами:

$$
\begin{gathered}
(V_i x)(t,s) = \int_a^t l(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau + \int_a^s m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma + (Ax)(t,s),\\
(\tilde{V}_i x)(t,s) = \int_a^s l(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau + \int_a^t m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma + (Ax)(t,s),\\
(W_i x)(t,s) = \int_a^t l(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau + \int_a^t m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma + (Ax)(t,s),\\
(\tilde{W}_i x)(t,s) = \int_a^s l(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau + \int_a^s m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma + (Ax)(t,s),
\end{gathered}
$$

$(i = 1, \ldots, 6)$, где

$$(Ax)(t,s) = \int_a^u \int_a^v n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\sigma d\tau,$$

$(t, s) \in D = [a, b] \times [a, b]$, $l : G = D \times [a, b] \to R$, $m : G \to R$ и $n : D \times D \to R$ — заданные функции из $C(L^1([a, b]))$ и из $C(L^1(D))$ соответственно, интегралы понимаются в смысле Лебега, $(u, v) = (t, s)$ при $i = 1$, $(u, v) = (t, t)$ при $i = 2$, $(u, v) = (s, s)$ при $i = 3$, $(u, v) = (s, t)$ при $i = 4$, $(u, v) = (t, b)$ при $i = 5$, $(u, v) = (b, s)$ при $i = 6$.

В докладе описываются спектр и существенные спектры в смысле Густавссона-Вайдмана, Като, Вольфа, Шехтера, Браудера, предельный и дефектный спектры [1,2] рассматриваемых в $C(D)$ операторов $V_i, \tilde{V}_i, W_i, \tilde{W}_i$, устанавливается существенное различие спектральных свойств операторов рассматриваемых классов. Представляемые в докладе результаты показывают принципиальное отличие операторов $\tilde{V}_i, W_i, \tilde{W}_i$ от операторов V_i Вольтерра с частными интегралами.

Литература

1. Appell J.M. Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations / J.M. Appell, A.S. Kalitvin, P.P. Zabrejko. — New York : Marcel Dekker, 2000. — 560 p.p.

2. Калитвин А.С. Линейные операторы с частными интегралами / А.С. Калитвин. — Воронеж : ЦЧКИ, 2000. — 252 с.

О ФРЕДГОЛЬМОВОСТИ МАТРИЧНЫХ ОПЕРАТОРОВ ТИПА РОМАНОВСКОГО

А.С. Калитвин, Н.И. Трусова (Липецк,
ЛГПУ им. П.П. Семенова-Тян-Шанского)
kalitvinas@mail.ru, trusova.nat@gmail.com

Через L_{ij}, M_{ij}, L и M обозначим операторы, определяемые равенствами

$$(L_{ij}x_j)(t, s) = \int_a^b l_{ij}(t, s, \tau)x_j(\tau, s)d\tau,$$

$$(M_{ij}x_j)(t, s) = \int_a^b m_{ij}(t, s, \sigma)x_j(t, \sigma)d\sigma, i, j = 1, \ldots, n,$$

$L = (L_{ij})_{i,j=1}^n$, $M = (M_{ij})_{i,j=1}^n$, где $t, s, \tau, \sigma \in [a, b]$, функции l_{ij}, m_{ij} измеримы по совокупности переменных, а интегралы понимаются в смысле Лебега.

Пусть $D = [a, b] \times [a, b]$, $C^{(1)}(D)$ - пространство непрерывно дифференцируемых на D функций, $C^{(1),n}(D)$ - пространство вектор-функций $x(t, s) = (x_1(t, s), \ldots, x_n(t, s))$, где $x_j \in C^{(1)}(D)$ $(j = 1, \ldots, n)$.

Обозначим через Π оператор перестановки переменных у функции $x(t, s)$, т.е. $\Pi : x(t, s) \to x(s, t)$.

Будем называть ограниченный линейный оператор A в банаховом пространстве X обратимым (фредгольмовым) оператором, если оператор $I - A$ обратим (фредгольмов, т.е. имеет замкнутое множество значений и нулевой индекс).

Теорема 1. *Пусть l_{ij}, m_{ij} $(i, j = 1, \ldots, n)$ — непрерывно дифференцируемые функции. Тогда в $C^{(1),n}(D)$ фредгольмовость оператора $(L_{ij} + M_{ij}\Pi)_{i,j=1}^{n}$ равносильна фредгольмовости оператора $I - L$.*

Литература

1. Калитвин А.С. Интегральные уравнения типа Романовского с частными интегралами / А.С. Калитвин. — Липецк : ЛГПУ, 2014. — 196 с.

2. Калитвин А.С. Системы интегральных уравнений Романовского с частными интегралами / А.С. Калитвин, В.А. Калитвин, Н.И. Трусова // Научные ведомости Белгородского государственного ун-та. Математика. Физика. — 2016. — № 6 (227), вып. 42. — С. 45–49.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ БАРБАШИНА (ИДУБ) С ЧАСТНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В.А. Калитвин (Липецк,
ЛГПУ им. П.П. Семенова-Тян-Шанского)
kalitvin@mail.ru

В данной заметке рассматривается ИДУБ

$$\frac{\partial^2 x(t, s)}{\partial t^2} = l(t, s)\frac{\partial x(t, s)}{\partial t} + \int_c^d m(t, s, \sigma)\frac{\partial x(t, \sigma)}{\partial t} d\sigma +$$

$$+ c(t, s)x(t, s) + \int_c^d n(t, s, \sigma)x(t, \sigma)d\sigma + f(t, s) \tag{1}$$

с начальными условиями: $x(a, s) = \varphi(s), x'_t(a, s) = \psi(s)$.

Предполагается, что $t \in J$, где $J = [a, b]$ или $J = [a, +\infty)$, $s \in [c, d]$, функции l, l'_t, m, m'_t, c, f, n, φ, ψ непрерывны, а решением ИДУБ (1) с заданными начальными условиями считается непрерывная на $J \times [c, d]$ вместе с $x''_{tt}(t, s)$ функция $x(t, s)$, удовлетворяющая ИДУБ (1) и начальным условиям.

Данная задача для ИДУБ (1) эквивалентна уравнению

$$x(t,s)=\int_a^t p(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau+\int_a^t\int_c^d q(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma+r(t,s), \tag{2}$$

если под решением уравнения (2) понимается непрерывная вместе с $x'_t(t, s)$ функция $x(t, s)$.

ИДУБ (1) назовем устойчивым (асимптотически устойчивым), если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из неравенства $\|f\| \leqslant \delta$ следует неравенство $\|x\| \leqslant \epsilon$ (и, кроме того, из условия $f(t, s) \to 0$ при $t \to \infty$ следует условие $x(t, s) \to 0$ при $t \to \infty$).

С использованием резольвенты уравнения (2) [1], приводятся условия устойчивости и асимптотической устойчивости ИДУБ (1).

Литература

1. Калитвин А.С. Интегральные уравнения Вольтерра и Вольтерра-Фредгольма с частными интегралами / А.С. Калитвин, В.А. Калитвин. — Липецк : ЛГПУ, 2013. — 177 с.

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ПРИМЕНЕНИЯ МАТРИЧНОГО МЕТОДА И МЕТОДА КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НЕОСНОВНЫХ НОСИТЕЛЕЙ ЗАРЯДА В МНОГОСЛОЙНОЙ ПЛАНАРНОЙ СТРУКТУРЕ[1]

В.В. Калманович*, Е.В. Серегина, М.А. Степович*****
(*, ***Калуга, КГУ им. К.Э. Циолковского,
** Москва–Калуга, МГТУ им. Н.Э. Баумана, Калужский филиал)
evfs@yandex.ru, v572264@yandex.ru, m.stepovich@rambler.ru

Рассмотрены два различных подхода, позволяющие проводить количественные расчёты в многослойных объектах. Для моделирования процесса теплопереноса в объектах, обладающих сдвиговой,

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и правительства Калужской области (проект № 18–41–400001).

цилиндрической или сферической симметрией, использован матричный метод, сводящийся к последовательному умножению функциональных матриц, компоненты которых в каждой точке определяются физическими и геометрическими параметрами текущего слоя. Общность использования метода достигается применением аппарата обобщенных степеней Берса [1, 2]. Полученные результаты [3–5] показали, что такой подход может позволить сравнительно несложно проводить расчёты в случае объектов, обладающих планарной или цилиндрической симметрией, в т.ч. и при наличии зависимостей параметров материалов от координат. Возможности использования такого подхода для аналитического построения решений для неоднородного стационарного уравнения задачи тепломассопереноса рассмотрены нами для решения первой краевой задачи и задачи третьего типа. Также рассматривается возможность использования такого подхода для численного моделирования за счет искусственного разбиения материала на большое число слоев. Проведено сравнения результатов расчётов с использованием матричных методов с результатами расчётов методом конечных разностей. Модельные расчёты выполнены для параметров многослойных объектов, характерных для материалов полупроводниковой микро– и наноэлектроники.

Литература

1. Bers L. On a class of functions defined by partial differential equations / L. Bers, A. Gelbart // Transactions of the American Mathematical Society. — 1944. — Vol. 56. — P. 67–93.

2. Гладышев Ю.А. Метод обобщенных степеней Берса и его приложение в математической физике / Ю.А. Гладышев. — Калуга : КГУ им. К.Э. Циолковского, 2011. — 204 с.

3. Гладышев Ю.А. О возможности приложения аппарата Берса к моделированию процессов тепломассопереноса, обусловленного электронами в планарной многослойной среде /Ю.А. Гладышев, В.В. Калманович, М.А. Степович // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. — 2017. — № 10. — С. 105–110.

4. Гладышев Ю.А. О возможности совместного применения матричного метода и аппарата обобщенных степеней Берса для математического моделирования процесса теплопереноса в объектах, обладающих цилиндрической симметрией / Ю.А. Гладышев, В.В. Калманович, Е.В. Серегина, М.А. Степович // Вопросы атом-

ной науки и техники. Серия : Ядерно-реакторные константы. — 2018. — Вып. 3. — С. 158–167.

5. Калманович В.В. О совместном применении матричного метода и аппарата обобщённых степеней Берса для математического моделирования процессов тепломассопереноса в полупроводниковых материалах электронной техники / В.В. Калманович, М.А. Степович.// Проблемы разработки перспективных микро– и наноэлектронных систем–2018 : сборник трудов / под общ. ред. академика РАН А.Л. Стемпковского. — М. : ИППМ РАН, 2018. — Вып. III. — С. 194–201.

О ГРАНИЧНЫХ И НАЧАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ РЕШЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ, ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ НА ГРАНИЦЕ ОБЛАСТИ

Т.В. Капицына (Москва, НИУ «МЭИ»)
KapitsynaTV@mpei.ru

Пусть Q^T — цилиндр $Q(0,T)$, где Q — ограниченная область n-мерного пространства R_n, $n \geqslant 2$, граница которой ∂Q — $(n-1)$-мерная замкнутая поверхность без края класса $C^{1+\lambda}$, $0 < \lambda < 1$.

Рассмотрим в области Q^T линейное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij} u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i u_{x_i} + au = f(x,t) \tag{1}$$

с вещественными коэффициентами

$$a_{ij} = a_{ji} \in C^1(\bar{Q}^T), \quad i,j = 1,2,\ldots,n,$$
$$a_i \in C(\bar{Q}^T), \quad f(x,t) \in L_2(Q^T, r^2),$$

где r — расстояние от точки $x \in Q$ до границы ∂Q области Q.

Будем говорить, что функция $u(x,t) \in W^{1,0}_{2,loc}(Q^T)$ принимает граничное значение

$$u\big|_{\partial Q \times (0,T)} = \varphi, \quad \varphi \in L_2(\partial Q \times (0,T))$$

в смысле L_2', если для любой точки $x_0 \in \partial Q$ существует окрестность $B(x_0) \in \delta(x_0)$, что для любого $T' \in [T/2;T)$

$$\lim_{\delta \to +0} \int\limits_{\delta}^{T'} \int\limits_{B(x_0)} |u(x_{\delta,x_0}(x),t) - \varphi(x,t)|^2 ds dt = 0. \tag{2}$$

Будем также говорить, что принадлежащая $W^{1,0}_{2,loc}(Q^T)$ функция $u(x,t)$ удовлетворяет начальному условию

$$u\Big|_{t=0} = u_0(x),$$

где $u_0(x) \in L_2(Q, r)$ в смысле L_2 с весом $r(x)$, если

$$\lim_{\delta \to +0} \int\limits_{Q_\delta} |u(x,\delta) - u_0(x)|^2 r(x)dx = 0. \tag{3}$$

Теорема. *Для того, чтобы обобщенное из* $W^{1,0}_{2,loc}(Q^T)$ *решение уравнения* (1) *имело предел в среднем на границе* $\partial Q \times (0,T)$ *и предел при* $t \to 0$*, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из двух условий:*

1) $\sup\limits_{\delta \in (0,\delta_0/2]} \left[\int\limits_{\delta}^{T'} \int\limits_{\partial Q_\delta} u^2 ds dt + \int\limits_{Q_\delta} u^2(x,\delta) r(x) dx \right] \leqslant C$, *где* C *не зависит от* T'*;*

2) $\int\limits_{Q} u^2(x,T') r(x) dx + \int\limits_{\delta}^{T'} \int\limits_{Q} \sum\limits_{i,j=1}^{\infty} a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} r(x) dx dt \leqslant C$, *где* C *не зависит от* T'*.*

Литература

1. Гущин А.К. О граничных значениях L_p, $p > 1$ решений эллиптических уравнений второго порядка в областях с гладкой границей / А.К. Гущин, В.П. Михайлов // Математический сборник. — 1979. — Т. 108(150). — С. 3–21.

2. Петрушко И.М. О граничных и начальных условиях $L_p, p > 1$ решений параболических уравнений / И.М. Петрушко // Математический сборник. — 1984. — Т. 125(167), № 4(12). — С. 489–521.

3. Ладыженская О.А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О.А. Ладыженская, В.А. Солонников, Н.Н. Уральцева. — М. : Наука, 1967. — 736 с.

4. Петрушко И.М. О первой смешанной задаче в L_p, $p > 1$ для вырождающихся параболических уравнений / И.М. Петрушко, Т.В. Капицына // Вестник МЭИ. — 2011. — № 6. — С. 143–154.

К ВОПРОСУ О ГОЛОМОРФНОЙ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ СИНГУЛЯРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

В.И. Качалов (Москва, НИУ «МЭИ»)
vikachalov@rambler.ru

Одним из направлений развития метода регуляризации С.А. Ломова [1] является подход, связанный с голоморфной регуляризацией сингулярных возмущений и позволяющий получать решения сингулярно возмущенных начальных и краевых задач в виде сходящихся в обычном смысле рядов по степеням малого параметра [2, 4]. При этом весьма важным является вопрос о продолжаемости таких решений, чтобы соответствующие утверждения носили глобальный характер.

Пусть $\Psi(\eta)$ — целая функция, а функция $\varphi(t)$ является аналитической на отрезке $[0,T]$, причем $\varphi(0) = 0$ и $\varphi'(t) < 0 \; \forall t \in [0,T]$. Дадим определение введенному С.А. Ломовым понятия существенно особого многообразия [2], предполагая вещественнозначность всех функций, участвующих в построениях.

Определение 1. Множество

$$\mathfrak{M}_{\Psi}^{\varphi} = \left\{ q: \; q = \Psi\left(\frac{\varphi(t)}{\varepsilon}\right), \quad t \in [0,T], \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0) \right\}$$

называется существенно особым многообразием, порождаемым функциями Ψ и φ в точке $\varepsilon = 0$.

Рассмотрим на отрезке $[0,T]$ тихоновскую систему с одной медленной и одной быстрой переменной [3]

$$\left\{ \begin{array}{l} y = f(t,y,w), \\ \varepsilon w' = g(t,y,w), \end{array} \right. \tag{1}$$

с краевыми условиями $y(0,\varepsilon) = y(T,\varepsilon) = 0$.

Условие (α): функции $f(t,y,w)$ и $g(t,y,w)$ аналитичны на замкнутой ограниченной области $\overline{\Omega}_{tyw}$, причем $g(t,y,w) \neq 0$ для $\forall (t,y,w) \in \Omega_{tyw}$ и обращается в ноль на поверхности Λ, ограничивающей эту область.

Далее, пусть начальная задача $y' = f(t,y,\widehat{w}(t,y))$, $y(0) = 0$, где $\widehat{w}(t,y)$ — корень уравнения $g(t,y,w) = 0$, имеет решение $\overline{y}(t)$, аналитическое на всем отрезке $[0,T]$. Назовем это **условием (β)**.

Определение 2. Решение $(y(t,\varepsilon), w(t,\varepsilon))$ задачи (1) называется псевдоголоморфным в точке $\varepsilon = 0$ на отрезке $[0,T]$, если существуют функции $Y(t,\eta,\varepsilon)$ и $W(t,\eta,\varepsilon)$, аналитические по третьей переменной в точке $\varepsilon = 0$, при каждом $t \in [0,T]$ и каждом η из некоторого неограниченного множества $\mathfrak{N}$, такие, что $\forall t \in [0,T]$

$$\begin{cases} y(t,\varepsilon) = Y(t,\varphi(t)/\varepsilon,\varepsilon), \\ w(t,\varepsilon) = W(t,\varphi(t)/\varepsilon,\varepsilon) \end{cases}$$

для некоторой аналитической на отрезке $[0,T]$ функции $\varphi(t)$.

Теорема. *Пусть функции $\Psi(\eta)$ и $\varphi(t)$ таковы, что существенно особое многообразие $\mathfrak{M}_\Psi^\varphi = (a_0, \Psi(0)]$, где a_0 — асимптотическое значение целой функции $\Psi(\eta)$. Тогда, если выполнены условия (α), (β) и уравнение*

$$\varphi'(t) \int\limits_{\widetilde{w}_0}^{w} \frac{dw_1}{g(t,\overline{y}(t),w_1)} = \frac{\varphi(t)}{\varepsilon}$$

имеет решение вида $w = W_0(t,\Psi(\varphi(t)/\varepsilon),\widetilde{w}_0)$, такое, что функция $W_0(t,q,\widetilde{w}_0)$ является ограниченной и аналитической в области $[0,T]\times\mathfrak{M}_\Psi^\varphi$, при каждом $\widetilde{w}_0$ из некоторого отрезка, то краевая задача (1) имеет псевдоголоморфное в точке $\varepsilon = 0$ решение.

Литература

1. Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений / С.А. Ломов. — М. : Наука, 1981. — 400 с.

2. Ломов С.А. Основы математической теории пограничного слоя / С.А. Ломов, И.С. Ломов. — М. : Изд-во МГУ, 2011. — 456 с.

3. Васильева А.Б. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных задач / А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов. — М. : Наука, 1973. — 272 с.

4. Качалов В.И. Теорема Тихонова о предельном переходе и псевдоголоморфные решения сингулярно возмущенных задач / В.И. Качалов // Доклады РАН. — 2014. — Т. 458, № 6. — С. 630–632.

5. Качалов В.И. Об одном методе решения сингулярно возмущенных систем тихоновского типа / В.И. Качалов // Известия вузов. Математика. — 2018. — № 6. — С. 25–30.

ИССЛЕДОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ МНОГОФАЗНЫХ ЗАТОПЛЕННЫХ СТРУЙНЫХ ТЕЧЕНИЙ[1]

С.Р. Кильдибаева (Стерлитамак, СФ БашГУ)
freya.13@mail.ru

Исследование течения многофазных затопленных струй связано с техногенными авариями, возникающими при глубоководной разработке нефтяных залежей. Примером такой аварии является разлив нефти на платформе Deepwater Horizon в Мексиканском заливе в 2010 году. За 152 дня в залив попало более 5 миллионов баррелей нефти. Этот случай доказал, что технологии, доступные на сегодняшний день не позволяют быстро и качественно устранить утечку. В связи с этим увеличивается интерес исследователей к моделированию устройств для сбора углеводородов при их разливе. Один из способов ликвидации утечки - установка устройства в форме купола, который крепится над местом разлива и позволяет осуществлять сбор углеводородов, поступающих из поврежденной скважины [1].

Для прогнозирования поведения углеводородов, поступающих из скважины, и успешной установки купола, необходимо исследование затопленных струй с учетом анализа изменения траектории, температуры, скорости, концентрации веществ, входящих в состав струи. Для моделирования течения струи используется интегральный Лагранжевый метод контрольного объема [2]. В данной работе рассмотренная ранее модель дополнена соотношениями, учитывающими соленость окружающей воды, а также гидратообразование, расширение и диссоциацию газовых пузырьков

Литература

1. Гималтдинов И.К. К теории накопления углеводородов в куполе, применяемом для ликвидации техногенного разлива на дне океана / И.К. Гималтдинов, С.Р. Кильдибаева // Инженерно- физический журнал. — 2018. — № 1. — С. 260–265.

2. Гималтдинов И.К. Модель затопленной струи с учетом двух предельных схем гидратообразования / И.К. Гималтдинов, С.Р. Кильдибаева // Теплофизика и аэромеханика. — 2018. — № 1. — С. 79–88.

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-31-00264 мол а).

ЗАДАЧА С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ВТОРОГО РОДА ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В.А. Киричек (Самара, Самарский университет)
vitalya29@gmail.com

В докладе будут представлены некоторые результаты исследования нелокальной задачи с интегральными условиями для гиперболического уравнения

$$u_{tt} - (a(x,t)u_x)_x + cu = f. \tag{1}$$

Задача заключается в следующем: найти в области Q_T решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным данным

$$u(x,0) = \varphi(x), \ u_t(x,0) = \psi(x) \tag{2}$$

и интегральным условиям

$$u(0,t) + \int\limits_0^l K_1(x)udx = 0, \quad u(l,t) + \int\limits_0^l K_2(x)udx = 0. \tag{3}$$

К настоящему времени имеется значительное число работ, посвященных исследованию нелокальных задач с интегральными условиями для гиперболических уравнений. Учитывая полученные в них результаты, можно утверждать, что выбор метода обоснования разрешимости нелокальной задачи зависит от вида интегральных условий [1]. В нашем случае нелокальные условия являются интегральными условиями второго рода. Так как внеинтегральные слагаемые, входящие в эти условия, представляют собой след решения, то эффективным в этом случае является метод сведения нелокальной задачи к классической начально-краевой задаче для нагруженного уравнения [2]. Реализация этого метода для одномерного уравнения имеет свои особенности, о чем и планируется рассказать в докладе.

Литература

1. Пулькина Л.С. Задачи с неклассическими условиями для гиперболических уравнений / Л.С. Пулькина. — Самара : Издательство «Самарский университет». — 2012. — 194 с.

---

2. Кожанов А.И. О разрешимости краевых задач с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений / А.И. Кожанов, Л.С. Пулькина // Дифференц. уравнения — 2006. — Т. 42, вып. 9. — С. 1166–1179.

ДВОЙСТВЕННОСТЬ И НЕРАВЕНСТВО МИНКОВСКОГО В ПРОСТРАНСТВАХ С НЕСИММЕТРИЧНОЙ НОРМОЙ[1]

А.И. Козко (Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова)
prozerpi@yahoo.co.uk

Несимметричные нормы изучались в работах Е.П. Долженко, Е.А. Севастьянова [1], А.И. Козко [2-4], А.-Р.К. Рамазанова, Б.М. Ибрагимовой [5], В.Ф. Бабенко и многих других. Ссылки на литературу см. в работах [6-8]. В этих работах рассматривались различные вопросы теории приближения в пространствах с несимметричной нормой и знакочувствительным весом. Одно из важнейших наблюдений состояло в том, что односторонние приближения являются частным случаем несимметричных приближений со знакочувствительными весами.

Определим, как обычно, норму функции $f(x)$ в пространстве $L_p(T) = L_p[-\pi;\pi]$, $p \in [1;+\infty]$ следующим образом:

$$\|f\|_p = \|f\|_{L_p(T)} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_T |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Для $p_1, p_2 \in [1;+\infty]$ определим

$$\|f\|_{\chi_E,\mathbf{p}} = \|f^+(\cdot)\chi_E(\cdot)\|_{p_1} + \|f^-(\cdot)\chi_E(\cdot)\|_{p_2},$$

где χ_E — характеристическая функция измеримого множества E, $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$, $f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$.

Для измеримого множества E, $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$ класс измеримых по Лебегу на T функций f, для которых $\|f\|_{\chi_E,\mathbf{p}} < +\infty$, обозначим $L_{\chi_E,\mathbf{p}}(T)$. Таким образом, $L_{\chi_E,\mathbf{p}}(T)$ — пространство-конус (из включения $f \in L_{\chi_E,\mathbf{p}}(T)$ вообще говоря не следует, что $-f \in L_{\chi_E,\mathbf{p}}(T)$).

В работе исследуются аналоги двойственности и неравенства Минковского в пространствах с несимметричной нормой и со знакочувствительным весом. В частности, для аналога двойственности получен следующий результат:

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00295).

Теорема 1. *Пусть* $1 \leqslant p_1, p_2 \leqslant +\infty$, p_1', p_2' *сопряженные с* p_1, p_2 *соответственно, т.е.* $\frac{1}{p_1'}+\frac{1}{p_1} = 1$, $\frac{1}{p_2'}+\frac{1}{p_2} = 1$, $\boldsymbol{p}' = (p_1', p_2')$, $f \in L_{\chi_E,\mathbf{p}}$, $E \subseteq [-\pi;\pi]$ *— измеримое множество. Тогда справедливо*

$$E_n(f)_{\chi_E,\mathbf{p}} := \inf_{t_n \in T_n} \|f - t_n\|_{\chi_E,\mathbf{p}} =$$

$$= \sup_{\substack{g\cdot\chi_E \perp T_n,\ g \in L_{\chi_E,\mathbf{p}'} \\ \max\left\{\|g^+\|_{\chi_E,p_1'}, \|g^-\|_{\chi_E,p_2'}\right\} \leqslant 1}} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\chi_E(x)\,dx.$$

Литература

1. Долженко Е.П. Аппроксимации со знакочувствительным весом (теоремы существования и единственности) / Е.П. Долженко, Севастьянов Е.А. // Изв. РАН. Сер. : Матем. — 1998. — Т. 62, вып. 6. — С. 59–102.

2. Козко А.И. Аналоги неравенств Джексона–Никольского для тригонометрических полиномов в пространствах с несимметричной нормой / А.И. Козко // // Математические заметки. — 1997. — Т. 61, вып. 5. — С. 687–699.

3. Козко А.И. Дробные производные и неравенства для тригонометрических полиномов в пространствах с несимметричной нормой / А.И. Козко // Изв. РАН. Сер. : Матем. — 1998. — Т. 62, вып. 6. — С. 125–142.

4. Козко А.И. Многомерные неравенства разных метрик в пространствах с несимметричной нормой / А.И. Козко // Матем. сб. — 1998. — Т. 189, вып. 9. — С. 85–106.

5. Рамазанов А.-Р.К. Несимметричный интегральный модуль непрерывности и аналог первой теоремы Джексона / А.-Р.К. Рамазанов, Б.М. Ибрагимова // Вестник ДГУ. — 2010. — Вып. 6. — С. 51–54.

6. Козко А.И. Полнота ортогональных систем в несимметричных пространствах со знакочувствительным весом / А.И. Козко // Современная математика и ее приложения. — 2005. — Т. 24. — С. 135–147.

7. *Козко А.И.* О порядке наилучшего приближения в пространствах с несимметричной нормой и знакочувствительным весом на классах дифференцируемых функций / А.И. Козко // Изв. РАН. Сер. матем. — 2002. — Т. 66, вып. 1. — С. 103–132.

8. Cobzaş S. Functional analysis in asymmetric normed spaces / S. Cobzaş // Basel: Birkhäuser/Springer, 2013. — 219 p.

О РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ ДВОЙНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ С РЕДКО МЕНЯЮЩИМИСЯ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В.С. Колесников (Иваново, ИГЭУ)
vskoles@mail.ru

Рассматриваются двойные ряды вида $\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} a_{kl}\sin kx \sin ly$, $\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} a_{kl}\sin kx \cos ly$, $\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} a_{kl}\cos kx \cos ly$, с редко меняющимися коэффициентами, то есть

$$a_{kl} = a_{n_i m_j} \ \text{ для } \ n_{i-1} < k \leqslant n_i, \ m_{j-1} < l \leqslant m_j, \ i = 1, 2, \ldots,$$

$$j = 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

где последовательности натуральных чисел $\{n_i\}$ и $\{m_j\}$ лакунарны.

Теорема 1. *Если последовательность* $\{a_{kl}\}$ *удовлетворяет условию (1), то ряд* $\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} a_{kl}\sin kx \sin ly$ *равномерно сходится по Принсгейму тогда и только тогда, когда* $kla_{kl} \to 0$ *при* $k + l \to \infty$.

Теорема 2. *Если последовательность* $\{a_{kl}\}$ *удовлетворяет условию (1) и ряд* $\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} a_{kl}\sin kx$ *равномерно сходится по Принсгейму, то ряд* $\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} a_{kl}\sin kx \cos ly$ *равномерно сходится по Принсгейму тогда и только тогда, когда* $kla_{kl} \to 0$ *при* $k + l \to \infty$.

Теорема 3. *Если последовательность* $\{a_{kl}\}$ *удовлетворяет условию (1) и ряд* $\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} a_{kl}$ *сходится по Принсгейму, то ряд* $\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} a_{kl}\cos kx \cos ly$ *равномерно сходится по Принсгейму тогда и только тогда, когда* $kla_{kl} \to 0$ *при* $k + l \to \infty$.

Одномерный случай тригонометрических рядов по синусам (и по косинусам) с редко меняющимися коэффициентами рассмотрен С.А.Теляковским в [1].

Литература

1. Теляковский С.А. О равномерной сходимости тригонометрических рядов с редко меняющимися коэффициентами / С.А. Теляковский // Математические заметки. — 2001. — Т. 70, вып. 4. — С. 613–620.

НАХОЖДЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ МУЛЬТИПЛИКАТИВНО ВОЗМУЩЕННОГО СЛУЧАЙНЫМ ШУМОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

М.А. Коновалова (Воронеж, ВГУ)
thereallmariya@gmail.com

Рассмотрим задачу Коши для мультипликативно возмущенного дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon(t)Ax + f(t),$$

$$x(t_0) = x_0,$$

где $\varepsilon(t,\omega),\ f(t,\omega)$ — случайные процессы, заданные гауссовым характеристическим функционалом [1, стр. 30]:

$$\begin{aligned}\psi(u,v) = \exp[i\int\limits_T (a_1(s)u(s) + \langle a_2(s), v(s)\rangle)ds-\\ -\frac{1}{2}\int\limits_T\int\limits_T b_{11}(s_1,s_2)u(s_1)u(s_2)ds_1ds_2-\\ -\int\limits_T\int\limits_T \langle b_{12}(s_1,s_2)u(s_1), v(s_2)\rangle ds_1ds_2-\\ \frac{1}{2}\int\limits_T\int\limits_T \langle b_{22}(s_1,s_2)v(s_1), v(s_2)\rangle ds_1ds_2],\end{aligned}$$

x — искомая векторная функция со значениями в n–мерном пространстве, A — заданная матрица, x_0 — случайный вектор, $\langle\rangle$ — знак скалярного произведения, a_1, a_2, b_{11} заданные скалярные функции, b_{12} — заданная векторная функция, b_{22} — заданная матричная функция.

Получена формула для нахождения математического ожидания решения задачи

$$M(x(t)) = \exp\left[\int\limits_{t_0}^{t} a_1(s)Ads + \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{t} b_{11}(s_1,s_2)A^2ds_1ds_2\right] M(x_0)+$$

$$\int\limits_{t_0}^{t} \exp[\int\limits_{s}^{t} a_1(\tau)Ad\tau + \frac{1}{2}\int\limits_{s}^{t}\int\limits_{s}^{t} b_{11}(s_1,s_2)A^2ds_1ds_2](a_2(s)+$$

$$\int\limits_{s}^{t} Ab_{12}(s_1,s_2)ds_1)ds.$$

Здесь $a_1(t) = M(\varepsilon(t))$, $a_2(t) = M(f(t))$ — математическое ожидание векторного случайного процесса f и $b_{12}(s_1, s) = M(\varepsilon(s_1 f(s)) - M(\varepsilon(s_1))M(f(s))$. Для скалярного уравнения результат получен ранее Тихоновым В.И. [2].

Литература

1. Задорожний В.Г. Методы вариационного анализа / В.Г. Задорожний. — М.–Ижевск : НИЦ «Регулярная и стохастическая динамика», 2006. — 316 с.

2. Тихонов В.И. Стохастическая радиотехника / В.И. Тихонов. — М. : Сов. радио, 1966. — 678 с.

О ВОССТАНОВЛЕНИИ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ВЕКТОРА ПО ЛИНЕЙНЫМ ИЗМЕРЕНИЯМ И ПОКРЫТИИ ПОДПРОСТРАНСТВАМИ[1]

С.В. Конягин (Москва, МИАН)
konyagin@mi.ras.ru

Всюду в докладе $1 \leqslant l \leqslant m < d$. Мы говорим, что вектор $x \in \mathbb{R}^d$ является l-разреженным, если он имеет не более l ненулевых координат. Пусть задана $m \times d$ матрица A. Рассматривается задача восстановления l-разреженного вектора $x \in \mathbb{R}^d$ по вектору $y = Ax \in \mathbb{R}^m$. Эта задача является важной частью теории, называемой в русскоязычной литературе теорией сжатых измерений

---

[1] Работа выполнена при поддержке гранта Правительства Российской Федерации (проект № 14.W03.31.0031).

(«Compressed Sensing» или «Compressive Sampling»), и имеет как теоретический интерес, так и практические приложения. Легко видеть, что l-разреженный вектор $x \in \mathbb{R}^d$ однозначно восстанавливается по вектору $y = Ax \in \mathbb{R}^m$, если $d \geqslant 2l$ и любая подматрица, образованная $2l$ столбцами матрицы A, имеет ранг $2l$.

Фукшанский, Ниделл и Судаков [1] рассматривают задачу восстановления разреженных целочисленных векторов. При этом естественно возникает вопрос о существовании целочисленной матрицы A, удовлетворяющей определенным ограничениям на коэффициенты, такой, что любые $s = 2l$ ее столбцов линейно независимы. В [1] эта задача рассматривается при $s = m$. При этом матрица должна удовлетворять условию $|A| = k$ (или $|A| \leqslant k$), где k — натуральное число, а $|A|$ есть максимум абсолютных величин элементов матрицы A.

Через $\mathcal{A}_{m,d}$ мы обозначаем множество целочисленных $m \times d$ матриц A таких, что любая $m \times m$ подматрица A невырождена. В [1] получен ряд результатов о том, при каких m, d, k существует матрица $A \in \mathcal{A}_{m,d}$, $|A| = k$. Некоторые из этих результатов усилены в [2]. Ниже представлен новый результат о существовании таких матриц. Отметим, что в отличие от [1] и [2] в процессе доказательства указывается способ явного построения искомой матрицы A.

Для $k \geqslant 1$ и $m \geqslant 2$ через $p = p(k, m)$ мы обозначаем максимальное простое число p, удовлетворяющее неравенству

$$p \leqslant \max((k+1)^{m/(m-1)}, 2k+1).$$

Теорема 1. *Пусть $k \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$ и $m < p(k, m)$. Тогда существует матрица $A \in \mathcal{A}_{m,p}$ такая, что $|A| = k$.*

Отметим, что $p(k, m) > k$. Поэтому теорема 1 применима, если $m \leqslant k$. Для фиксированного m и $k \to \infty$ мы имеем $p(k, m) \sim k^{m/(m-1)}$ и из [2] следует, что максимальное d, для которого существует матрица $A \in \mathcal{A}_{m,d}$, $|A| = k$, имеет порядок $k^{m/(m-1)}$.

Опишем кратко построение искомой матрицы $A \in \mathcal{A}_{m,p}$. Через $a_{i,j}$, $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant p$, мы будем обозначать элемент в пересечении i-ой строки и j-ого столбца матрицы A. Возьмем $a_{i,1} = k$ при $1 \leqslant i \leqslant m$. Для $1 \leqslant i \leqslant m$, $2 \leqslant j \leqslant p$ положим

$$a_{i,j} \equiv b_j j^{i-1} (\mathrm{mod} p),$$

где целые числа $b_2, \ldots, b_p$ не делятся на p. Мы показываем, что $A \in \mathcal{A}_{m,p}$ и при этом числа b_j и $a_{i,j}$ можно выбрать так, что $|a_{i,j}| \leqslant k$.

Балко, Цибулко и Валтр [3] рассматривали следующую задачу. Пусть $2 \leqslant s \leqslant m$ и K — компактное тело в $\mathbb{R}^m$. Как много нужно линейных подпространств для того, чтобы покрыть ими $K \cap \mathbb{Z}^m$? В частности, в случае

$$K = \{x \in \mathbb{R}^m : \|x\|_\infty \leqslant k\}, \quad s = m,$$

для минимального числа M таких гиперподпространств они показали, что

$$k^{m/(m-1)-o(1)} \leqslant M \leqslant C_m k^{m/(m-1)}.$$

Из теоремы 1 вытекает следующее уточнение нижней оценки при $k \geqslant m$:

$$M \geqslant p(k,m)/(m-1) \gg k^{m/(m-1)}/m.$$

Литература

1. Fukshansky L. An algebraic perspective on integer sparse recovery / L. Fukshansky, D. Needell, and B. Sudakov // ArXiv:1801.01256v1.

2. Конягин С.В. О восстановлении целочисленного вектора по линейным измерениям / С.В. Конягин // Матем. заметки — 2018. — Т. 194, вып. 6. — С. 863–871.

3. Balko M. Covering lattice points by subspaces and counting point-hyperplane incidences / M. Balko, J. Cibulko, and P. Valtr // ArXiv:1703.04767.

О МАЛЫХ ДВИЖЕНИЯХ ГИДРОСИСТЕМЫ «ВЯЗКОУПРУГАЯ ЖИДКОСТЬ–БАРОТРОПНЫЙ ГАЗ», ЗАПОЛНЯЮЩИХ НЕПОДВИЖНЫЙ СОСУД[1]

Н.Д. Копачевский (Симферополь, КФУ)
kopachevsky@list.ru

В работе изучается проблема малых движений гидросистемы, состоящей из вязкоупругой жидкости обобщённой модели Олдройта (см., например, [1], [2]) и баротропного газа, находящегося над жидкостью. Жидкость и газ целиком заполняют неподвижный сосуд и находятся в поле сил тяжести, так что граница раздела между ними горизонтальна. В процессе малых колебаний гидросистемы

---

[1] Работа выполнена при частичной поддержке гранта Российского научного фонда (16-11-10125, выполняемого в Воронежском госуниверситете).

учитывается действие гравитационного поля с постоянным ускорением, а также малого поля внешних сил, наложенных на него.

С помощью применения операторного подхода проблема приведена к задаче Коши для дифференциально-операторного уравнения в некотором гильбертовом пространстве. На этой основе доказана теорема о корректной разрешимости проблемы на произвольном конечном отрезке времени. В случае нормальных колебаний гидросистемы сформулирована спектральная задача для оператор-функции, обобщающей как известный операторный пучок С.Г. Крейна (вязкая жидкость в частично заполненном сосуде), так и спектральную задачу о нормальных колебаниях вязкоупругой жидкости, полностью заполняющей неподвижный сосуд (см. [3]). Подробное исследование свойств решений спектральной задачи планируется провести в другой работе.

Литература

1. Eirich F.R. Rheology. Theory and Applications /F.R.Eirich. — New York : Academic Press, 1956. — 761p.

2. Милославский А.И. Спектр малых колебаний вязкоупругой жидкости в открытом сосуде / А.И. Милославский // Успехи матем. наук. — 1989. — Т. 44, № 4.

3. Azizov T.Ya. Evolution and Spectral Problems Related to Small Motions of Viscoelastic Fluid / T.Ya. Azizov, N.D. Kopachevskii, L.D.Orlova // Proceedings of the St.-Petersburg Math. Society.Vol.VI.AMS Translations(2) — 2000. — Vol.199. — P. 1–24.

О МАЛЫХ ДВИЖЕНИЯХ ГИДРОСИСТЕМЫ ИЗ ТРЁХ НЕСМЕШИВАЮЩИХСЯ ЖИДКОСТЕЙ, ЗАПОЛНЯЮЩИХ НЕПОДВИЖНЫЙ СОСУД[1]

Н.Д. Копачевский, Е.В. Сёмкина (Симферополь, КФУ)
kopachevsky@list.ru

В этой работе изучается задача о малых движениях системы из трёх тяжёлых несмешивающихся однородных жидкостей, полностью заполняющих неподвижный сосуд. При этом нижняя жидкость считается вязкоупругой и удовлетворяет обобщённой модели Олдройта (см., например, [1]), а остальные две — идеальными. Случай, когда сосуд полностью заполнен системой из двух жидкостей,

---

[1] Работа выполнена при частичной поддержке гранта Российского научного фонда (16-11-10125, выполняемого в Воронежском госуниверситете).

одна из которых является вязкоупругой, а другая — идеальной, рассмотрен в работе [2]. Вариант, когда неподвижный сосуд заполнен системой из двух вязкоупругих жидкостей, изучен в [3], а случай полного заполнения сосуда одной вязкоупругой жидкостью — в [4].

Методы, развитые в упомянутых работах авторов, посвящённых исследованию проблем малых движений и нормальных колебаний систем вязкоупругих и идеальных жидкостей, позволяют получить результаты о разрешимости начально-краевой задачи для исследуемой проблемы.

Литература

1. Eirich F.R. Rheology. Theory and Applications /F.R.Eirich. — New York : Academic Press, 1956. — 761p.

2. Копачевский Н.Д. О малых движениях гидросистемы «вязкоупругая жидкость-идеальная жидкость», заполняющей неподвижный сосуд /Н.Д. Копачевский, Е.В. Сёмкина // Динамические системы. — 2017. — Т. 7(35), № 3. — С. 207–228.

3. Копачевский Н.Д. О малых движениях системы из двух вязкоупругих жидкостей, заполняющих неподвижный сосуд/ Н.Д. Копачевский // Динамические системы. — 2017. — Т. 7(35), № 1-2. — С. 109–145.

4. Azizov T.Ya. Evolution and Spectral Problems Related to Small Motions of Viscoelastic Fluid / T.Ya. Azizov, N.D. Kopachevskii, L.D.Orlova // Proceedings of the St.-Petersburg Math. Society.Vol.VI.AMS Translations(2) — 2000. — Vol. 199. — P. 1–24.

О ПЕРВОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С УПРАВЛЯЕМЫМИ СТАРШИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

М.С. Коржавина, В.И. Сумин (Нижний Новгород, ННГУ)

maryasha_f@mail.ru, v_ sumin@mail.ru

В теории оптимального управления важную роль играют условия *устойчивости* (по возмущению управления) *существования глобальных решений* (УСГР) управляемых краевых задач (см., например, [1] - [3]; история вопроса кратко описана в [3]). Условиям УСГР первой начально-краевой задачи для полулинейных параболических уравнений при фиксированной главной части с управле-

---

нием в правой части посвящены публикации [4], [1, гл.2, §5], [5], [6], с управлением в начальном условии — [7]; случай управляемых гладких старших коэффициентов рассматривался в [8], [9]. Ниже такие условия формулируются в случае управляемых измеримых старших коэффициентов.

Пусть: заданы числа $T > 0$, $d_1 > 0$, $d_2 > 0$ $(d_1 \leqslant d_2)$ и ограниченная односвязная область $Q \subset \mathbf{R}^n$ $(\partial Q \in C_2)$; элементы Q обозначаем $x = \left\{x^1, \ldots, x^n\right\}$; $\Pi_\sigma \equiv Q \times (0, \sigma), \sigma \in (0, T); \Pi \equiv \Pi_T$; D — некоторое множество элементов пространства $L_\infty(\Pi)$. Будем использовать обозначения [10] функциональных пространств. Рассмотрим начально-краевую задачу

$$\mathbf{L}[y] \equiv y'_t - \sum_{i,j=1}^{n} \left(c_{ij}\left(x,t\right) y'_{x^j}\right)'_{x^i} + \sum_{j=1}^{n} \left(b_j\left(x,t\right) y'_{x^j}\right) =$$

$$= g\left(\left\{x,t\right\}, y\left(x,t\right)\right), \ \ \left\{x,t\right\} \in \Pi; \tag{1}$$

$$y\left(x,0\right) = 0, \ \ x \in Q; \quad \ y\left(x,t\right) = 0, \ \ x \in \partial Q, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{2}$$

где c_{ij} — управления, $1 \leqslant i,j \leqslant n$; коэффициенты b_j, $1 \leqslant j \leqslant n$, и функция $g\left(\left\{x,t\right\}, y\right) : \Pi \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ заданы. Предполагаем, что коэффициенты b_j, $1 \leqslant j \leqslant n$, принадлежат $L_\infty(\Pi)$, а функции g и g'_y непрерывны по y, измеримы по $\{x,t\}$ и ограничены на любом ограниченном множестве. Множество $\mathbf{D}$ допустимых управлений $\mathbf{c} \equiv \{c_{ij}, 1 \leqslant i,j \leqslant n\}$ состоит из всех тех наборов, для каждого из которых $c_{ij} \in D$, $1 \leqslant i,j \leqslant n$, и выполняется условие равномерной параболичности: $d_1 \left|\xi\right|^2 \leqslant \sum\limits_{i,j=1}^{n} c_{ij}(x,t)\xi^i\xi^j \leqslant d_2 \left|\xi\right|^2, \quad \{x,t\} \in \Pi,$

$\xi \in \mathbf{R}^n$. Чтобы определить понятие решения задачи (1)-(2), рассмотрим вспомогательную начально-краевую задачу для уравнения

$$\mathbf{L}\left[y\right] = z\left(x,t\right), \ \ \left\{x,t\right\} \in \Pi \tag{3}$$

с условиями (2). Для любых $y \in V_2^{1,0}(\Pi)$, $\eta \in W_2^{1,1}(\Pi)$, $z \in L_\infty(\Pi)$, $\xi \in [0,T]$ положим: $J[y(.), \eta(.), z(.), \xi] \equiv \int\limits_Q y(x,\xi)\eta(x,\xi)dx +$

$$+ \int\limits_0^\xi dt \int\limits_Q \left\{ -y\eta'_t + \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} y'_{x^j} \eta'_{x^i} + \sum_{j=1}^{n} b_j y'_{x^j} \eta - \eta z \right\} dx.$$

Следуя [10, гл.3], функцию $y(.)$ из $\overset{\circ}{V}{}_2^{1,0}(\Pi_\sigma)$, $0 < \sigma \leqslant T$, назовем решением задачи (2)-(3) на цилиндре Π_σ, отвечающим управлению $\mathbf{c} \in \mathbf{D}$, если она ограничена на Π_σ и для почти каждого $\xi \in [0, \sigma]$ удовлетворяет интегральному тождеству: $J[y(.), \eta(.), z(.), \xi] = 0$, $\eta \in \overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}(\Pi_\sigma)$. Для любых $\mathbf{c} \in \mathbf{D}$ и $z \in L_\infty(\Pi)$, задача (2)-(3) имеет единственное ограниченное обобщенное класса $\overset{o}{V}{}_2^{1,0}(\Pi)$ решение на цилиндре Π [10, гл.3]. Оператор, ставящий в соответствие функции z это решение при данном $\mathbf{c}$, обозначим $A_\mathbf{c}$:

$$y(x,t) = A_\mathbf{c}[z](x,t), \ \{x,t\} \in \Pi, \ z \in L_\infty(\Pi). \tag{4}$$

Из результатов [10, гл.3, теоремы 2.1, 4.2, 7.1, 8.1], [1, гл.2, §5] следует, что при любом $\mathbf{c} \in \mathbf{D}$ оператор $A_\mathbf{c}$ — это линейный ограниченный оператор в $L_\infty(\Pi)$; он квазинильпотентен. Этот оператор вольтерров в том смысле, что для любого Π_σ сужение $A[z]|_{\Pi_\sigma}$ не зависит от значений $z|_{\Pi \setminus \Pi_\sigma}$ (здесь используется многомерное обобщение [1] известного определения А.Н. Тихонова функционального оператора типа Вольтерра).

Решением задачи (1)-(2) на цилиндре Π_σ, $0 < \sigma \leqslant T$, отвечающим набору $\mathbf{c} \in \mathbf{D}$, назовем функцию $y(\cdot)$, являющуюся при данном $\mathbf{c}$ и $z(x,t) \equiv g(\{x,t\}, y(x,t)), \{x,t\} \in \Pi_\sigma$, ограниченным обобщенным класса $\overset{o}{V}{}_2^{1,0}(\Pi_\sigma)$ решением задачи (2)-(3) на Π_σ. На любом Π_σ, $0 < \sigma \leqslant T$, набору $\mathbf{c} \in \mathbf{D}$ не может отвечать более одного такого решения. Пусть Ω — та часть $\mathbf{D}$, каждому элементу $\mathbf{c}$ которой отвечает единственное глобальное (то есть на Π) решение $y_\mathbf{c}(\cdot)$ задачи (1)-(2).

Формула (4), которую можно назвать формулой обращения главной части задачи (1)-(2), устанавливает взаимнооднозначное соответствие между классом $L_\infty(\Pi)$ функций $z(x,t)$, $\{x,t\} \in \Pi$, и классом удовлетворяющих условиям (2) функций $y(x,t)$, $\{x,t\} \in \Pi$, пространства $\overset{o}{V}{}_2^{1,0}(\Pi)$. Поэтому задача (1)-(2) эквивалентна рассматриваемому над $L_\infty(\Pi)$ вольтеррову функциональному уравнению

$$z(x,t) = g(\{x,t\}, A_\mathbf{c}[z](x,t)), \ \{x,t\} \in \Pi, \ z \in L_\infty(\Pi). \tag{5}$$

Для $\mathbf{c} \in \mathbf{D}$, $\mathbf{c_0} \in \Omega$ положим $r(\mathbf{c}, \mathbf{c_0}) \equiv \|A_\mathbf{c} - A_\mathbf{c_0}\|_{L_\infty(\Pi) \to L_\infty(\Pi)}$. Вольтеррова функциональная переформулировка (5) задачи (1)-(2) позволяет методами [1]-[4] доказать следующую теорему УСГР.

Теорема. *Для любого* $\mathbf{c_0} \in \Omega$ *существуют числа* $\delta > 0$ *и* $C > 0$ *такие, что, если для некоторого* $\mathbf{c} \in \mathbf{D}$ *выполняется неравенство* $r(\mathbf{c}, \mathbf{c_0}) < \delta$, *то* $\mathbf{c} \in \Omega$, *при этом* $\|y_{\mathbf{c}} - y_{\mathbf{c_0}}\|_{V_2^{1,0}(\Pi)} \leqslant Cr(\mathbf{c}, \mathbf{c_0})$.

Пусть теперь коэффициенты левой части (1) достаточно гладкие, например, c_{ij}, b_j, $(c_{ij})'_{x^i}$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, принадлежат пространству $\mathcal{H}^{\alpha,\alpha/2}(\overline{\Pi})$ при некотором $\alpha \in (0,1)$. Из результатов [1, гл.2, §5], [4], [10, гл.4]) следует, что тогда оператор $A_{\mathbf{c}}$ интегральный:

$$A_{\mathbf{c}}[z](x,t) = \int_0^t d\tau \int_Q G_{\mathbf{c}}(\{x,t\}, \{s,\tau\}) z(s,\tau)\, ds, \ \ \{x,t\} \in \Pi,$$

где $G_{\mathbf{c}}$ — функция Грина задачи (2)-(3). Он является оператором типа потенциала, так как функция $G_{\mathbf{c}}$ представима в виде

$$G_{\mathbf{c}}(\{x,t\}, \{s,\tau\}) = \Gamma_{\mathbf{c}}(\{x,t\}, \{s,\tau\}) \left((t-\tau)^2 + |\, x - s\,|^2\right)^{-\frac{n}{2}},$$

$\{x,t\} \in \Pi, \{s,\tau\} \in \Pi$, причем $\Gamma_{\mathbf{c}}$ ограничена по модулю величиной, зависящей лишь от d_1, d_2, α и $d_3 \equiv \max\left\{\|b_j\|_{C(\Pi)} : 1 \leqslant j \leqslant n\right\}$.

Литература

1. Сумин В. И. Функциональные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами. Ч.1 / В.И. Сумин. — Н. Новгород : Изд-во ННГУ, 1992. — 112 с.

2. Сумин В.И. К проблеме сингулярности распределенных управляемых систем. I / В.И. Сумин. // Вестник ННГУ. Математическое моделирование и оптимальное управление. — 1999. — Вып. 2(21). — С. 145–155.

3. Сумин В.И. Проблема устойчивости существования глобальных решений управляемых краевых задач и вольтерровы функциональные уравнения / В.И. Сумин. // Вестник ННГУ. Математика. — 2003. — Вып. 1. — С. 91–107.

4. Сумин В.И. Об устойчивости существования глобального решения первой краевой задачи для управляемого параболического уравнения / В.И. Сумин. // Дифференц. уравнения. — 1986. — Т. 22, № 9. — С. 1587–1595.

5. Сумин В.И. Условия устойчивости существования глобальных решений управляемых краевых задач для нелинейных параболических уравнений / В.И. Сумин. // Вестник Тамбовского университета. Естественные и технические науки. — 2000. — Т. 5, Вып. 4. — С. 493–495.

6. Сумин В.И. Условия сохранения глобальной разрешимости начально-краевой задачи для нелинейного управляемого параболического уравнения / В.И. Сумин, М.С. Филюшкина // Современные методы теории функций и смежные проблемы : материалы Воронеж. зимн. мат. школы. — Воронеж : Изд. дом ВГУ, 2017. — С. 187–189.

7. Коржавина М.С. О краевой задаче для нелинейного параболического уравнения с управлением в начальном условии / М.С. Коржавина, В.И. Сумин // Современные методы теории краевых задач : материалы Междунар. конф. «Понтрягинские чтения–XXIX», посвящ. 90-летию В.А. Ильина. — М.: Изд-во МАКС-Пресс, 2018. — С. 129–131.

8. Сумин В.И. Условия сохранения глобальной разрешимости начально-краевой задачи для нелинейного параболического уравнения с управляемой главной частью / В.И. Сумин, М.С. Филюшкина // Современные методы теории краевых задач : материалы Воронеж. весен. мат. школы «Понтрягинские чтения XXVIII». — Воронеж : Изд. дом ВГУ, 2017. — С. 158–160.

9. Коржавина М.С. О начально-краевой задаче для полулинейного параболического уравнения с управляемой главной частью / М.С. Коржавина, В.И. Сумин // Вестник Тамбовского Университета. Естественные и технические науки. — 2018. — Т. 23, № 122. — С. 317–324.

10. Ладыженская О.А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О.А. Ладыженская, В.А. Солонников, Н.Н. Уральцева — М. : Наука, 1967. — 736 с.

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОРОДНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ // С ЗАКРЕПЛЕННЫМИ КОНЦАМИ

В.В. Корнев, А.П. Хромов (Саратов, СГУ)
KornevVV@info.sgu.ru, KhromovAP@info.sgu.ru

Рассмотрим задачу:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u(x,t),\ x \in [0,1],\ t \in [0,\infty), \tag{1}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \tag{2}$$

$$u(x,0)=\varphi(x)\,,u'_t(x,0)=0, \tag{3}$$

где $q(x)$, $\varphi(x)$ комплекснозначны, причем $q(x)\in L[0,1]$. В [1] (см. также [2]) представлен ряд, полученный путем многократного применения процедуры ускорения сходимости рядов с использованием рекомендаций А.Н. Крылова, применяемым к формальному решению по методу Фурье смешанной задачи (1)–(3). Опишем эту процедуру. Пусть $u(x,t)$ классическое решение задачи (1)–(3) с условием $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}\in L[Q_T]$ при любом $T>0$, где $Q_T=\{x,t|x,t\in[0,1]\times[0,T]\}$. Тогда $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ абсолютно непрерывны и $\varphi(0)=\varphi(1)=0$. Возьмем ряд формального решения из [3] задачи (1)–(3) в случае $q(x)=0$. Сумма его есть $a_0(x,t)=\frac{1}{2}[\widetilde{\varphi}(x-t)+\widetilde{\varphi}(x+t)]$, где $\widetilde{\varphi}(x)$ нечетное 2–периодическое продолжение $\varphi(x)$ на всю ось, и она является классическим решением задачи (1)–(3) при $q(x)=0$. Теперь $u_1(x,t)=u(x,t)-a_0(x,t)$ есть решение задачи:

$$\frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2}-q(x)u_1(x,t)-q(x)a_0(x,t), \tag{4}$$

$$u_1(0,t)=u_1(1,t)=0, \tag{5}$$

$$u_1(x,0)=u'_{1t}(x,0)=0. \tag{6}$$

Применив теперь процедуру ускорения сходимости формального решения по методу Фурье к задаче (4)–(6) получим, что функция

$$a_1(x,t)=-\frac{1}{2}\int_0^t d\tau\int_{x-t-\tau}^{x+t-\tau}q(\eta)a_0(\eta,\tau)d\eta, \tag{7}$$

где $q(x)$ теперь четное 2–периодическое продолжение $q(x)$ с $[0,1]$ на всю ось, есть классическое решение задачи (4)–(6) при $q(x)\equiv 0$. Функция $u_2(x,t)=u_1(x,t)-a_1(x,t)$ является решением задачи (4)–(6) для $u_2(x,t)$ вместо $u_1(x,t)$ и $a_1(x,t)$ вместо $a_0(x,t)$. Продолжая этот процесс до бесконечности, получаем, что $u_{n+1}(x,t)=u_n(x,t)-a_n(x,t)$ есть решение (4)–(6) для $u_{n+1}(x,t)$ вместо $u_1(x,t)$ и $a_n(x,t)$ вместо $a_0(x,t)$. При этом $a_n(x,t)$ выражается по формуле (7), где вместо $a_0(\eta,\tau)$ надо теперь брать $a_{n-1}(\eta,\tau)$. В итоге приходим к ряду $A(x,t)=\sum\limits_{0}^{\infty}a_n(x,t)$.

Замечание. *Ряд $A(x,t)$ получается из формулы (7). Он не связан со смешанной задачей и его можно получить, исходя из $\varphi(x)\in L[0,1]$. В этом случае имеет место*

Лемма 1. *Пусть T произвольное положительное число, m наименьшее натуральное число, такое, что $T \leqslant m$. Тогда*

$$\|a_n(x,t)\|_{C[Q_T]} \leqslant M_1 \left(\frac{M_2}{2}\right)^{n-1} \frac{T^{n-1}}{(n-1)!} \ \ (n = 1, 2, \ldots),$$

где $M_1 = \|a_1(x,t)\|_{C[Q_T]}$, $M_2 = (2m+1)\|q\|_1$ ($\|.\|_1$ — норма в $L[0,1]$). Кроме того, $M_1 \leqslant c_T\|\varphi\|_1$ и c_T не зависит от $\varphi(x) \in L[0,1]$.

Тем самым ряд $A(x,t)$ сходится абсолютно и равномерно в любой ограниченной области из $(-\infty,\infty) \times [0,\infty)$ для любой $\varphi(x) \in L[0,1]$. □

Теперь мы приспособим ряд $A(x,t)$ к получению классического решения задачи (1)–(3).

Лемма 2. *При вышеприведенных условиях на $\varphi(x)$ для классического решения, $a_n(x,t)$ при $n \geqslant 1$ непрерывна и непрерывно дифференцируема по x и $t \in (-\infty,\infty) \times [0,\infty)$, $a'_{n,x}(x,t)$ ($a'_{n,t}(x,t)$) абсолютно непрерывны по x (по t), удовлетворяются условия (5),(6) для $a_n(x,t)$ вместо $u_1(x,t)$ и почти всюду по $x, t \in (-\infty,\infty) \times [0,\infty)$*

$$\frac{\partial^2 a_n(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 a_n(x,t)}{\partial x^2} - q(x)a_{n-1}(x,t), \tag{8}$$

причем (8) имеет место при всех x, t, где конечны

$$\frac{d}{d\xi}\int_0^\xi q(\tau)d\tau, \quad \frac{d}{d\xi}\int_0^\xi |q(\tau)|d\tau,$$

при $\xi = x, x+t, x-t$.

Лемма 3. *При условиях леммы 2 функция $A(x,t)$ непрерывна и непрерывно дифференцируема по $x, t \in (-\infty,\infty) \times [0,\infty)$, причем*

$$\frac{\partial A(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial a_0(x,t)}{\partial t} - \frac{1}{2}[\int_x^{x+t} q(\xi)A(\xi, x+t-\xi)d\xi +$$

$$+\int_{x-t}^{x} q(\xi)A(\xi, \xi-x+t)d\xi], \tag{9}$$

$$\frac{\partial A(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial a_0(x,t)}{\partial x} - \frac{1}{2}[\int_x^{x+t} q(\xi)A(\xi, x+t-\xi)d\xi -$$

$$-\int_{x-t}^{x} q(\xi)A(\xi, \xi-x+t)d\xi], \tag{10}$$

Лемма 4. *При условиях леммы 2 и фиксированном x, $\frac{\partial}{\partial t}A(x,t)$ абсолютно непрерывна по t, причем почти всюду по t*

$$\frac{\partial^2 A(x,t)}{\partial t^2} = -\frac{1}{2}[q(x+t)A(x+t,0) + q(x-t)A(x-t,0)+$$

$$+\int_x^{x+t} q(\eta)A'_t(\eta, x+t-\eta)d\eta + \int_{x-t}^{x} q(\eta)A'_t(\eta, \eta-x+t)d\eta]. \quad (11)$$

Аналогичный факт имеет место при фиксированном t для $\frac{\partial}{\partial x}A(x,t)$

На основании леммы 2–4 получаем

Теорема 1. *Классическое решение задачи (1)–(3) при условии $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \in L[Q_T]$ при любом $T > 0$ существует, тогда и только тогда, когда $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ абсолютно непрерывны и $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ и это решение определяется формулой $u(x,t) = A(x,t)$. При этом уравнение (1) выполняется при тех x и t, что и в леммах и еще, когда конечны $\widetilde{\varphi}''(\xi)$ при $\xi = x+t$, $x-t$.*

Этот результат усиливает аналогичный из [4]. Ряд $A(x,t)$ является аналогом формулы Даламбера для классического решения при $q(x) = 0$. Наконец, учитывая приведенное выше замечание, получаем

Теорема 2. *Если $\varphi(x) \in L[0,1]$ и $A(x,t)$ из замечания, $u_{1h}(x,t)$ есть классическое решение задачи (1)–(3) с $\varphi_h(x)$ вместо $\varphi(x)$ и $\lim\limits_{h\to 0} \|\varphi_h - \varphi\|_1 = 0$, то и*

$$\lim_{h\to 0} \|u_{1h}(x,t) - A(x,t)\|_{L[Q_T]} = 0,$$

т.е., $A(x,t)$ при $\varphi(x) \in L[0,1]$ есть обобщенное решение задачи (1)–(3).

Литература

1. Корнев В.В. Об обобщенном формальном решении по методу Фурье смешанной задачи для неоднородного волнового уравнения / В.В. Корнев, А.П. Хромов // Современные проблемы теории функций и их приложений : материалы 19 Международной Саратовской зимней школы, посвященной 90–летию акад. П.Л. Ульянова. — Саратов, 2018. — С. 156–159.

2. Корнев В.В. О классическом и обобщенном решении смешанной задачи для волнового уравнения / В.В. Корнев, А.П. Хромов // Современ. методы теории краевых задач : материалы Международной конференции «Понтрягинские чтения – XXIX», посвящ.

90–летию акад. В.А. Ильина. — Москва : Изд-во МАКС-Пресс. — 2018. — С. 132–133.

3. Бурлуцкая М.Ш. Резольвентный подход в методе Фурье / М.Ш. Бурлуцкая, А.П. Хромов // ДАН. — 2014. — Т. 458, № 2. — С. 138–140.

4. Хромов А.П. О сходимости формального решения по методу Фурье волнового уравнения с суммируемым потенциалом / А.П. Хромов // Журн. выч. матем. и матем. физики. — 2016. — Т. 56, № 2. — С. 1795–1809.

АСИМПТОТИКИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ГОЛОМОРФНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ОКРЕСТНОСТИ БЕСКОНЕЧНОСТИ

М.В. Коровина, В.Ю. Смирнов (Москва, МГУ; МАИ)
betelgeuser@yandex.ru, vl-smirnov@mail.ru

Работа посвящена построению асимптотик решений обыкновенных дифференциальных уравнения с голоморфными коэффициентами в окрестности бесконечности. А именно, рассматриваются обыкновенные дифференциальные уравнения с голоморфными коэффициентами

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n u(x) + a_{n-1}(x)\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1} u(x) + ... + \\ + a_i(x)\left(\frac{d}{dx}\right)^i u(x) + ... + a_0(x)\,u(x) = 0. \quad (1)$$

Здесь коэффициенты $a_i(x)$ регулярны на бесконечности, это означает, что существует такая внешность круга $|x| > a$, что функции $a_i(x)$, $i = 0, 1, ..., n-1$ разлагаются в ней в сходящиеся степенные ряды $a_i(x) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \frac{b_i^j}{x^j}$.

Целью нашего исследования является построение асимптотики решения уравнения (1) при $x \to \infty$. Эта задача является частным случаям общей задачи о построении асимптотик решений линейных дифференциальных уравнений с иррегулярными особенностями в окрестности особой точки. Для регулярных особенностей эта задача является решенной, и, как известно, асимптотики в окрестности

регулярных особых точек являются конормальными. Случай бесконечно удаленной особой точки является примером иррегулярной особенности. Эта задача сводится к задаче о построении асимптотики решения в окрестности нуля для линейных дифференциальных уравнений с особенностью типа клюва 2-го порядка. Задача о построении асимптотик решений обыкновенных дифференциальных уравнений с голоморфными коэффициентами является классической задачей аналитической теории линейных дифференциальных уравнений. Одной из первых работ, посвященной этой задаче, является книга Thome [1], там построены асимптотики для частного случая этой задачи, а именно для случая когда основной символ $H_0(p)$ оператора $\hat{H}$ равный $H_0(p) = H\left(0, p\right)$ имеет простые корни.

Далее этот частный случай для систем линейных дифференциальных уравнений рассматривается, например, в таких классических книгах как [2], [3], [4] и многих других работах. В этих работах построены асимптотические разложения решений для этого случая. Они были получены в виде произведений соответствующих экспонент на расходящиеся степенные ряды, а именно

$$u = \sum_{i=1}^{n} e^{\alpha_i/r} r^{\sigma_i} \sum_{k=0}^{\infty} a_i^k r^k, \tag{2}$$

где α_i, $i = 1, ..., n$ — корни полинома $H_0\left(p\right)$ и σ_j и a_i^k — некоторые комплексные числа. Однако вопрос об интерпретации полученных расходящихся рядов был оставлен открытым, иными словами, метод суммирования этих расходящихся рядов отсутствует. Такие асимптотики в дальнейшем получили названия ВКБ-асимптотик [5].

В конце 80-х годов прошлого века был получен аппарат, пригодный для суммирования подобных рядов, основанный на преобразовании Лапласа-Бореля и понятии ресургентной функции, впервые введенном французским математиком Ж. Экалем [6].

Аппарат для интерпретации и построения асимптотических разложений вида (2), основанный на преобразовании Лапласа-Бореля, называется *ресургентным анализом.* Обратное преобразование Бореля при этом дает регулярный способ суммирования рядов (2). Однако, при этом необходимо доказать бесконечную продолжимость решений исследуемых уравнений. Доказательство этого факта, как правило, представляло большую трудность при применении ресургентного анализа к построению асимптотик решений дифференциальных уравнений. Для уравнений с вырождениями доказательство бесконечной продолжимости получено в работах В. Шаталова и М. Коровиной [7], [8]. Этот результат позволяет применять методы ресургентного анализа к построению асимптотик решений линейных дифференциальных уравнений с голоморфными коэффициентами.

Благодаря этому результату в работах [7], [9] были построены равномерные асимптотики решений для случая, когда корни старшего символа $H_0\left(p\right) = H\left(0, p\right)$ имеют первый порядок.

Однако, методы, которые использовались для построения асимптотик решений в случае, когда основной символ имел простые корни, оказались неприменимыми в случае кратных корней, кроме случая уравнений второго порядка. Для решения проблемы кратных корней в последние годы был создан метод повторного квантования [10]. Этот метод применяется в том случае, когда интегро-дифференциальное уравнение в двойственном пространстве не решается методом последовательных приближений и сводится, в свою очередь, к уравнению с вырождениями типа клюва. С помощью этого метода в настоящее время решен ряд задач для уравнений с вырождениями в случае кратных корней.

Задача (1) путем замены $x = \frac{1}{r}$ сводится к уравнению с вырождением типа клюва второго порядка в нуле.

Здесь мы сформулируем теорему для случая, когда основной символ дифференциального оператора имеет один корень. Без ограничения общности будем считать, что этот корень находится в нуле. В этом случае $a_i\left(x\right) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{b_i^j}{x^j}$. Перепишем уравнение (1) в виде

$$\begin{gathered}\left(-r^2 \tfrac{d}{dr}\right)^n u + b_0 r^m \left(-r^2 \tfrac{d}{dr}\right)^k u + b_1 r^{m+1} \left(-r^2 \tfrac{d}{dr}\right)^{k-1} u + \\ + b_2 r^{m+2} \left(-r^2 \tfrac{d}{dr}\right)^{k-2} u + \ldots + b_{k+1} r^{m+k} u + \\ + \sum_{i=1}^{m} r^i \sum_{j=h_i}^{n-1} b_j^i \left(-r^2 \tfrac{d}{dr}\right)^j u + r^{h+1} \sum_{i=0}^{n-1} a_i\left(r\right) \left(-r^2 \tfrac{d}{dr}\right)^i u = 0.\end{gathered}$$

Здесь $i + h_i > m + k$, через b_i, b_j^i обозначены соответствующие числа, $a_i\left(r\right)$ — голоморфные функции. Число $h = m + k$ называется индексом сингулярности уравнения (1). Пусть выполнено неравенство

$$h_i + i - h > \left(m - i\right) \frac{n - k - m}{m}. \tag{3}$$

Тогда верна

Теорема. *Асимптотика решения уравнения (1) в окрестности бесконечности имеет вид*

$$u(x) \approx \sum_{j=1}^{n-k} \exp\left(\sum_{i=1}^{n-k-m} \alpha_i^j x^{\frac{i}{n-k}}\right) x^{-\frac{\sigma_i}{n-k}} \sum_{l}^{\infty} A_l^j x^{-\frac{l}{n-k}} + \\ + \sum_{j=0}^{k_0} \left(\ln\frac{1}{x}\right)^j x^{\alpha_j} \sum_{i=0}^{\infty} b_i^j x^{-i}, \quad (4)$$

где α_{n-k-m}^j, $j = 1, ..., n-k$ *корни полинома* $p^{n-k} + \left(\frac{n-k}{n-k-m}\right)^{n-k} a_0$, *а* $A_l^j.\sigma_i, b_i^j$, k_0 *и* α_i^j, $j = 1, ..., n-k-1$ *некоторые числа.*

Назовем асимптотики типа (4) обобщенными ВКБ-асимптотиками. От ВКБ-асимптотик они отличаются тем, что степени x в показателе экспоненты, вообще говоря, не являются целыми.

Можно показать, что если неравенство (3) не выполнено, то решение задачи (1) также представимо в виде обобщенной ВКБ-асимптотики.

Литература

1. Thome L.W.Zur. Theorie der linearen differentialgelichungen / L. W.Zur. Thome. — (German), 1872.

2. Олвер Ф. Асимптотика и специальные функции / пер. с англ. под ред. А. П. Прудникова. – М. : Наука, 1990. — 528 с.

3. Чезари Л. Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений / Л. Чезари. — М.: Мир, 1964. — 477 с.

4. Коддингтон Э.А. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений / Э.А. Коддингтон, Н. Левинсон. — М. : Иностранная литература, 1958. — 475 с.

5. Sternin B. Borel-Laplace Transform and Asymptotic Theory. Introduction to Resurgent Analysis / B. Sternin, V. Shatalov. — CRC Press, 1996.

6. Ecalle J. Cinq applications des fonctions résurgentes / J. Ecalle // Prepub. Math. d'Orsay. — 1984. — 110 p.

7. Коровина М.В. Дифференциальные уравнения с вырождением и ресургентный анализ / М.В. Коровина, В.Е. Шаталов // Дифференциальные уравнения. — 2010. — Т. 46, № 9. — С. 1259–1277.

8. Коровина М.В. Существование ресургентного решения для уравнений с вырождением высших порядков / М.В. Коровина // Дифференциальные уравнения. — 2011. — Т. 47, № 3. — С. 349–357.

9. Коровина М.В. Асимптотики решений уравнений с высшими вырождениями / М.В. Коровина // Доклады Академии наук. — 2011. — Т. 437, № 3. — С. 302–304.

10. Коровина М.В. Метод повторного квантования и его применения к построению асимптотик решений уравнений с вырождением / М.В. Коровина // Дифференциальные уравнения. — 2012. — Т. 48, № 5. — С. 710–722.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ С НЕЛОКАЛЬНЫМ УСРЕДНЕНИЕМ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Г.М. Королев (Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова)
korolevgm95@mail.ru

Рассматриваем многомерную нелокальную задачу для уравнения теплопроводности

$$\begin{cases} u_t = \Delta u, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \qquad 0 < t \leqslant T, \\ u(x,0) + u(x,T) = \varphi(x). \end{cases} \tag{1}$$

Функцию $\varphi \in C(\mathbb{R}^n)$ и число $T > 0$ считаем заданными. Нелокальное условие выражает усреднение функции $u(x,t)$ по ее значениям в начальный и финальный моменты времени.

Решением задачи (1) будем называть функцию

$$u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (0,T]) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0,T]), \tag{2}$$

удовлетворяющую соотношениям (1).

Задача, подобная (1), в ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^n$ изучалась ранее в работе [1]. Затем, в [2], рассматривались более общие нелокальные задачи, но только для одномерного уравнения теплопроводности. В работах [3]–[5] подробно исследована задача теплопроводности в $\mathbb{R}^n$ с нелокальным усреднением интегрального вида. Схема исследования [3]–[5] сейчас переносится на многомерную задачу (1). Наши результаты в одномерном случае представлены в [6].

При изучении вопроса единственности решения рассматриваем однородную задачу

$$\begin{cases} u_t = \Delta u, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \qquad 0 < t \leqslant T, \\ u(x,0) + u(x,T) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Справедлив следующий результат.

Теорема 1. *Пусть функция* $u = u(x,t)$ *удовлетворяет условию* (2) *и является решением однородной нелокальной задачи* (3). *Введем характеристику*

$$M(r) = \max_{0\leqslant t\leqslant T}\max_{|x|\leqslant r}|u(x,t)|, \quad r > 0. \tag{4}$$

Пусть

$$M(r) = o\left(r^{-(n-1)/2}\exp\left(\sqrt{\frac{\pi}{2T}}\,r\right)\right), \quad r \to +\infty. \tag{5}$$

Тогда $u(x,t) \equiv 0$ *в* $\mathbb{R}^n \times [0,T]$.

Тем самым, оценка (5) с характеристикой (4) определяет класс единственности для решений неоднородной задачи (1). Такие решения выражаются формулой Пуассона

$$u(x,t)|_{0<t\leqslant T} = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right)u_0(y)\,dy \tag{6}$$

через начальное состояние $u_0(x) \equiv u(x,0)$. Само начальное состояние $u_0(x)$ для неоднородной задачи (1) можно найти по формуле

$$u_0(x) = \varphi(x) - \int\limits_{\mathbb{R}^n} g_T(x-y)\,\varphi(y)\,dy, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{7}$$

Формула (7) устанавливается при помощи преобразования Фурье. Здесь $g_T(x)$ — функция Грина для задачи (1), имеющая вид

$$g_T(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{\exp(|\xi|^2\,T)+1}\exp(i\xi\,x)\,d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{8}$$

Для оценки поведения функции Грина на бесконечности получено ее разложение в специальный ряд по функциям Ханкеля.

Теорема 2. *Для функции* $g_T(x)$*, определенной формулой* (8), *справедливо разложение в ряд*

$$g_T(x) = \frac{(\pi|x|)^{-\nu}}{2T}\sum_{k=0}^{\infty}\operatorname{Im}\left(\left(\frac{z_k}{2}\right)^{\nu} H_\nu^{(1)}(z_k|x|)\right), \tag{9}$$

сходящийся при $|x| \neq 0$. *Здесь* $H_\nu^{(1)}$ *– первая функция Ханкеля индекса* $\nu = (n-2)/2$, *при этом*

$$z_k \equiv \sqrt{\frac{(2k+1)\pi}{2T}}\,(1+i), \quad k \in \mathbb{N} \cap \{0\}. \tag{10}$$

Используя разложение (9) и стандартную асимптотику функции Ханкеля

$$H_\nu^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,\exp\left(iz - \frac{\pi i}{4}\,(2\nu+1)\right)\left(1 + O(|z|^{-1})\right), \quad |z| \to \infty,$$

действующую на луче $\arg z = \pi/4$, можно получать оценки функции (8) на бесконечности. Так, например, в одномерном случае ($n = 1$) при $|x| \to \infty$ и $T = 1$ справедливо соотношение

$$g_1(x) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\exp\left(-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,|x|\right)\left[\cos\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,|x| + \frac{\pi}{4}\right) + o(1)\right] \tag{11}$$

с главным слагаемым, отвечающим числу z_0 из формулы (10).

При помощи подобных оценок в общем многомерном случае (при $n \geqslant 1$), возможно, удастся обосновать разрешимость нелокальной задачи (1) в классах функций экспоненциального роста, близких к классам (5).

Выражаю благодарность И. В. Тихонову за конструктивные замечания и полезные рекомендации при подготовке данной работы.

Литература

1. Вабищевич П.Н. Нелокальные параболические задачи и обратная задача теплопроводности / П.Н. Вабищевич // Дифференц. уравнения, 1981. — Т. 17, № 7. — С. 1193–1199.

2. Кангужин Б.Е. О единственности решения нелокальной по времени задачи для уравнения теплопроводности / Б.Е. Кангужин // Неклассические уравнения математической физики: труды семинара, посвященного 60-летию профессора В.Н. Врагова / под ред. А.И. Кожанова. — Новосибирск : Изд-во Инт-та математики, 2005. — С. 130–132.

3. Попов А.Ю. Экспоненциальные классы единственности в задачах теплопроводности / А.Ю. Попов, И.В. Тихонов // Доклады РАН, 2003. — Т. 389, № 4. — С. 465–467.

4. Попов А.Ю. Классы единственности в нелокальной по времени задаче для уравнения теплопроводности и комплексные собственные функции оператора Лапласа / А.Ю. Попов, И.В. Тихонов // Дифференц. уравнения. — 2004. — Т. 40, № 3. — С. 396–405.

5. Попов А.Ю. Экспоненциальные классы разрешимости в задаче теплопроводности с нелокальным условием среднего по времени / А.Ю. Попов, И.В. Тихонов // Матем. сборник. — 2005. — Т. 196, № 9. — С. 71–102.

6. Королев Г.М. Специальная нелокальная задача для одномерного уравнения теплопроводности / Г.М. Королев // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования «Герценовские чтения–2018» : материалы научной конференции, 9–13 апреля 2018 г. — СПб. : Изд. РГПУ им. А. И. Герцена, 2018. — С. 96–100.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛИВОНСКОЙ ВОЙНЫ: ИСТОРИЧЕСКИЙ И ГИПОТЕТИЧЕСКИЙ СЦЕНАРИИ[1]

В.А. Короткий*, **М.А. Степович**** (*Ярославль, ЯВВУ ПВО,
**Калуга, КГУ им. К.Э. Циолковского)
vkorotkii@yandex.ru, m.stepovich@rambler.ru

На основе подхода Осипова-Ланчестера описания военных конфликтов [1–6] построена математическая модель Ливонской войны 1558-1583 годов, хорошо описывающая основные этапы войны:

$$\begin{cases} dx/dt = -x\,(t) - y\,(t) + 100 + 300t, x(0) = 100, \\ dy/dt = -x\,(t) - ty\,(t) + 150 - 100t, y(0) = 250. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь t — время, x — ресурсы Ливонского союза, y — ресурсы Русского царства. Два первых слагаемых в правой части системы дифференциальных уравнений (1) описывают потери от действий противника и собственных просчётов; следующие два члена моделируют динамику роста (убыли) ресурсов, привлекаемых для военных действий. Это могут быть собственные средства или помощь союзников. Отметим, что начальные ресурсы Русского царства превосходили объединённые ресурсы Ливонского союза оценочно в 2,5 раза.

---

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и правительства Калужской области (проект № 18–41–400001).

Наряду с историческим сценарием рассмотрен гипотетический сценарий (при тех же начальных условиях):

$$\begin{cases} dx/dt = -x\left(t\right) - y\left(t\right) + 100 + 150t, x(0) = 100, \\ dy/dt = -ty\left(t\right) - x\left(t\right) + 150, y(0) = 250. \end{cases} \tag{2}$$

Здесь предполагается, что Ивану Грозному удалось найти эффективные решения по устранению внутренних разногласий (обращение в ноль последнего члена системы (1)) и провести удачную дипломатическую атаку на Ливонский союз (в 2 раза уменьшить коэффициент внешних дотаций). При этом "системные"проблемы, связанные с личностью самого царя, являются неустранимыми, поэтому слагаемое $-ty(t)$ не изменяется.

Результаты математического моделирования показывают, что при таком сценарии Русское царство могло бы одержать уверенную победу за более короткий срок.

Обсуждаются возможности использования предлагаемого подхода при обработке информационных потоков (открытых и закрытых) с целью получения преимущества во время ведения боевых действий в настоящем и будущем [7–9].

Литература

1. Осипов М.П. Влияние численности сражающихся сторон на их потери / М.П. Осипов // Военный сборник. — 1915. — № 6. — С. 59–74.

2. Осипов М.П. Влияние численности сражающихся сторон на их потери / М.П. Осипов // Военный сборник. — 1915. — № 7. — С. 25–36.

3. Осипов М.П. Влияние численности сражающихся сторон на их потери / М.П. Осипов // Военный сборник. — 1915. — № 8. — С. 31–40.

4. Осипов М.П. Влияние численности сражающихся сторон на их потери / М.П. Осипов // Военный сборник. — 1915. — № 9. — С. 25–37.

5. Осипов М.П. Дополнение к статье «Влияние численности сражающихся сторон на их потери» / М.П. Осипов // Военный сборник. — 1915. — № 10. — С. 93–96.

6. Lanchester F.W. Aircraft in Warfare: The Dawn of the Fourth Arm / F.W. Lanchester. — London: Constable and Co, 1916. — 288 p.

7. Короткий В.А. Математическое моделирование военного конфликта в Сирийской Арабской Республике / В.А. Короткий

// Научные труды Калужского государственного университета им. К.Э. Циолковского. Естественные науки. — 2017. — С. 122–130.

8. Короткий В.А. Математические методы выявления скрытых факторов в моделях современных войн / В.А. Короткий // Электронные информационные системы. — 2018. — № 1(16), март. — С. 98–109.

9. Короткий В.А. Современные аспекты математического моделирования военных операций по Осипову-Ланчестеру: pro и contra / В.А. Короткий, М.А. Степович // Научные труды Калужского государственного университета им. К.Э. Циолковского. Естественные науки. — 2018. — С. 191–197.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ПОГРУЖЕНИЯ СВАИ

Д.В. Костин, Т.И. Костина, С.Д. Бабошин
(Воронеж, ВГУ, ВГТУ)
dvk605@mail.ru, tata_sti@rambler.ru

В приложениях к строительной тематике, в частности к установке свайного фундамента, для моделирования процессов погружения свай, используется уравнение [1]: $R = F_{\text{ВС}}+F_{\text{Т}}+F_{\text{ЛС}}+F_{\text{БС}}$, где $R = m\ddot{x}$ - равнодействующая сила, m — масса погружающей установки вместе со сваей, x — глубина погружения сваи, $F_{\text{ВС}}$ — сила создаваемая погружающей установкой, $F_{\text{Т}} = mg$ — сила тяжести, g — ускорение свободного падения, $F_{\text{ЛС}} = S_{\text{пс}}h_i$ — сила лобового сопротивления, $S_{\text{пс}}$ — площадь поперечного сечения сваи, $h_i(x(t), \rho)$ — удельное лобовое сопротивление, ρ - тип грунта, $F_{\text{БС}} = Px(t)f_i$ — сила бокового сопротивления, представляющая собой произведение периметра сваи P, глубины погружения $x(t)$ и удельной силы бокового сопротивления f_i, зависящей от типа грунта. Таким образом, получается следующие дифференциальное уравнение второго порядка:

$$m\ddot{x} = F_{\text{ВС}} + mg + S_{\text{пс}}h_i(x(t), \rho) + Px(t)f_i.$$

Решение данного уравнения позволяет определить время и глубину погружения в зависимости от типа погружающей установки, габаритов сваи и типа грунта.

В настоящем докладе будет представлен алгоритм численного решения данной задачи методом Эйлера, в случаи полигармо-

---

нической вынуждающей силы, заданный многочленом Максвелла-Фейера [2]. Предложенная математическая модель описывает процесс работы *оптимального*, в смысле коэффициента асимметрии, импульсного погружателя.

Литература

1. Цейтлин М.Г. Вибрационная техника и технология в свайных и буровых работах / М.Г. Цейтлин, В.В. Верстов, Г.Г. Азбелев. — Л. : Стройиздат, 1987. — 262 с.

2. Костин В.А. Многочлены Максвелла-Фейера и оптимизация полигармонических импульсов / В.А. Костин, Д.В. Костин, Ю.И. Сапронов // ДАН. — 2012. — Т. 445, №3. — С. 271–273.

ОТОБРАЖЕНИЯ ИЗ МНОГООБРАЗИЯ В НЕКОММУТАТИВНУЮ АЛГЕБРУ

М.Н. Крейн (Липецк, ЛГПУ)
travkin@lipetsk.ru

Дополнено утверждение теоремы 1, опубликованной автором в [2]. Использованные обозначения и формулировка теоремы 1 следующие.

Пусть K — нормированная алгебра, в общем случае некоммутативная, над полем k, содержащем поле действительных чисел $\mathbb{R}$, с открытым множеством обратимых элементов (например, операторная алгебра), M — хаусдорфово топологическое пространство, $\mathcal{F} = C_K(M)$ — алгебра непрерывных функций из M в K с поточечно определенными операциями, которая также некоммутативна, если некоммутативна K, $|\mathcal{F}|$ — множество k-гомоморфизмов из $\mathcal{F}$ в K с базой топологии $\{f^{-1}(V) \mid V \subset K$ — открыто, $f \in |\mathcal{F}|\}$, $\theta :\ M \to |\mathcal{F}|$ — отображение, задаваемое формулой $[\theta(p)](f) = f(p)$.

Теорема 1. *Пусть M — конечномерное многообразие. Тогда 1) θ инъективно; 2) всякий гомоморфизм из $|\mathcal{F}|$, переводящий действительные функции в действительные элементы из K, представляется в виде суммы $\theta(p)$ для некоторого $p \in M$ и отображения β, все значения которого необратимы в K.*

Если в этих обозначениях вместо K и k берется поле действительных чисел, и M — конечномерное многообразие, θ оказывается взаимно однозначным отображением, даже гомеоморфизмом. Это является одним из основополагающих фактов diffiety-теории, и соответствующая теорема имеется в [1].

Теорема 2. *В условиях теоремы 1 точка p определена единственно.*

Литература

1. Неструев Джет. Гладкие многообразия и наблюдаемые / Джет Неструев. — М. : МЦНМО, 2000. — 300 с.

2. Крейн М.Н. Об отображениях в некоммутативные алгебры / М.Н. Крейн // Материалы Международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа С.Г.Крейна – 2014». — Воронеж : ИПЦ «Научная книга». — 2014. — С. 179–182.

РАЗБИЕНИЕ КОМПЛЕКСНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ НА ОТНОСИТЕЛЬНО МАЛЫЕ ГРУППЫ [1]

О.А. Кривошеева (Уфа, БашГУ)
kriolesya2006@yandex.ru

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность различных комплексных чисел λ_k и их кратностей n_k, $|\lambda_{k+1}| \geqslant |\lambda_k|$, $k \geqslant 1$, и $|\lambda_k| \to \infty$, $k \to \infty$. Выясняются условия, при которых последовательность Λ можно разбить на так называемые относительно малые группы, которые в некотором смысле отделены друг от друга. Необходимость подобного разбиения возникает при исследовании задач представления функций из инвариантных подпространств посредством рядов экспоненциальных многочленов (см., например, [1],[2]).

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $U = \{U_m\}_{m=1}^{\infty}$ — разбиение последовательности $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ на группы U_m, $m \geqslant 1$. Перенумеруем члены Λ. Точки λ_k, попавшие в группу U_m, будем обозначать $\lambda_{m,l}$, а их кратности — $n_{m,l}$. Первый индекс совпадает с номером группы, а второй индекс меняется в пределах от 1 до M_m, где M_m — число точек λ_k, попавших в группу U_m. Положим еще $N_m = \sum_{l=1}^{M_m} n_{m,l}$. Будем считать, что $|\lambda_{m+1,1}| \geqslant |\lambda_{m,1}|$, $m \geqslant 1$. Пусть Λ разбита на группы $U = \{U_m\}_{m=1}^{\infty}$, где $U_m = \{\lambda_{m,\nu}\}_{\nu=1}^{M_m}$. Будем также говорить, что группы U_m относительно малы, если

$$\lim_{m\to\infty} \max_{1\leqslant j,l\leqslant M_m} \frac{|\lambda_{m,j} - \lambda_{m,l}|}{|\lambda_{m,1}|} = 0.$$

и $N(\Lambda, U) = \lim_{m\to\infty} \frac{N_m}{|\lambda_{m,1}|} = 0$.

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-31-00029).

Положим

$$q_\Lambda(z,w,\delta)=\prod_{\lambda_{k,\nu}\in B(\lambda_{m,l},\delta|\lambda_{m,l}|),k\neq m}\left(\frac{z-\lambda_{k,\nu}}{3\delta|\lambda_{k,\nu}|}\right)^{n_{k,\nu}}, \quad m\geqslant 1$$

где $B(z,r)$ — открытый круг с центром в точке z и радиуса $r>0$. Если круг $B(\lambda_{m,l},\delta|\lambda_{m,l}|)$ не содержит точек $\lambda_{k,\nu}$, $k\neq m$, то считаем, что $q^{m,l}_{\Lambda,U}(z,\delta)\equiv 1$. Для разбиения U определим групповой индекс конденсации А.С. Кривошеева ([1])

$$S_\Lambda(U)=\lim_{\delta\to 0}S_\Lambda(U,\delta),\quad S_\Lambda(U,\delta)=\varliminf_{m\to\infty}\min_{1\leqslant l\leqslant M_m}\frac{\ln|q^{m,l}_{\Lambda,U}(\lambda_{m,l},\delta)|}{|\lambda_{m,l}|}.$$

Пусть $\Lambda=\{\lambda_k,n_k\}$ и $\alpha>\delta>0$. Рассмотрим функцию

$$q^1_\Lambda(z,w,\alpha,\delta)=\prod_{\lambda_s\in B(w,\alpha|w|)\setminus B(w,\delta|w|)}\left(\frac{z-\lambda_k}{3\alpha|\lambda_k|}\right)^{n_k}.$$

Если кольцо $B(\lambda_k,\alpha|\lambda_k|)\setminus B(\lambda_k,\delta|\lambda_k|)$ не содержит точек λ_s, то полагаем $q^k_\Lambda\equiv 1$. Определим индекс концентрации А.С. Кривошеева ([2]) последовательности Λ:

$$S^1_\Lambda=\lim_{\alpha\to 0}S^1_\Lambda(\alpha),\quad S^1_\Lambda(\alpha)=\lim_{\delta\to 0}S^1_\Lambda(\alpha,\delta),$$

$$S^1_\Lambda(\alpha,\delta)=\varliminf_{|w|\to\infty}\frac{\ln|q^1_\Lambda(w,w,\alpha,\delta)|}{|w|}.$$

Теорема. *Пусть $\Lambda=\{\lambda_k,n_k\}$. Верны следующие утверждения:*

1) Если $U=\{U_m\}$ — разбиение Λ на относительно малые группы, то $S^1_\Lambda\geqslant 2S_\Lambda(U)$.

2) Если $S^1_\Lambda>-\infty$, то существует разбиение U на относительно малые группы такое, что $S_\Lambda(U)\geqslant 3S^1_\Lambda$.

Литература

1. Кривошеев А.С. Базис в инвариантном подпространстве аналитических функций / А.С. Кривошеев, О.А. Кривошеева О.А. // Матем. сб. — 2013. — Т. 204, № 12. — С. 49-104.

2. Кривошеев А.С. Базис в инвариантном подпространстве целых функций / А.С. Кривошеев, О.А. Кривошеева О.А. // Алгебра и анализ. — 2015. — Т. 27, № 12. — С. 132-195.

СРАВНЕНИЕ НОРМ ОШИБОК СОЛВЕРОВ ПАКЕТА OPENFOAM НА ПРИМЕРЕ ОБТЕКАНИЯ КОНУСА ПОД НУЛЕВЫМ УГЛОМ АТАКИ[1]

А.Е. Кувшинников (Москва, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН)
kuvsh90@yandex.ru

Исследуется обтекание конуса сверхзвуковым потоком воздуха под углом атаки $\alpha = 0°$. Число Маха набегающего потока изменялось от 1 до 7 с шагом 1, угол полураствора конуса $\beta = 10 - 35°$ с шагом $5°$.

Для сравнения из программного пакета OpenFOAM выбраны 4 солвера: rhoCentralFoam, sonicFoam (оба изначально входят в состав OpenFOAM), pisoCentralFoam, QGDFoam — созданы сторонними разработчиками. Были проведены расчеты для всех солверов, а также скоростей и углов полураствора в вышеуказанных диапазонах. Для каждого варианта были вычислены аналоги нормы L_2:

$$\sqrt{\sum\nolimits_m |y_m - y_m^{exact}|^2 V_m} \Big/ \sqrt{\sum\nolimits_m |y_m^{exact}|^2 V_m}$$

где y_m — давление, компоненты скорости и плотность, полученные численным моделированием y_m^{exact} — те же величины, полученное интерполированием табличных значений из [1] на ячейки сетки, V_m — объем ячейки. Суммирование проводится по всем ячейкам расчетной сетки.

Солвер rhoCentralFoam обладает минимальной нормой погрешности для поля давления, однако вызывает осцилляции у поверхности конуса. Солвер sonicFoam вызывает осцилляции на фронте ударной волны при $M \geqslant 3$. Солвер QGDFoam обладает минимальной нормой погрешности для поля скоростей, но является неустойчивым при высоких числах Маха и углах полураствора. Также он позволяет избежать неразрушающих решение, но все равно нежелательных, осцилляций в силу своих диссипативных свойств.

Литература

1. Бабенко К.И. Пространственное обтекание гладких тел идеальным газом / К.И. Бабенко, Г.П. Воскресенский, А.Н. Любимов, В.В. Русанов. М. : Наука. 1964. — 505 с.

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 18-31-00320-мол_а).

ОБЛАСТИ ОДНОЛИСТНОСТИ ГОЛОМОРФНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ КРУГА В СЕБЯ С ИНВАРИАНТНЫМ ДИАМЕТРОМ

О.С. Кудрявцева (Волгоград, ВолгГТУ)
Kudryavceva_ OS@mail.ru

Пусть $\mathcal{B}[-1,1]$ — класс голоморфных отображений f единичного круга $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1\}$ в себя, которые оставляют неподвижными точки $z = \pm 1$ и имеют конечные угловые производные $f'(1)$ и $f'(-1)$, т. е. $\angle \lim_{z\to\pm1} f(z) = \pm 1$, $\angle \lim_{z\to\pm1} f'(z) = f'(\pm 1) < \infty$. Известно, что для любой функции $f \in \mathcal{B}[-1,1]$ верно неравенство $f'(1)f'(-1) \geqslant 1$, при этом равенство достигается для дробно-линейных преобразований. В [1] найдены области однолистности на классах $\mathcal{B}_\alpha[-1,1] = \{f \in \mathcal{B}[-1,1]\colon f'(1)f'(-1) \leqslant \alpha\}$, $1 < \alpha < 9$. Отмечено также, что построенные области не являются точными. В данной работе рассматривается подкласс $\mathcal{D}[-1,1]$ класса $\mathcal{B}[-1,1]$, состоящий из функций, сохраняющих вещественный диаметр. Получена асимптотически точная двусторонняя оценка областей однолистности на классах $\mathcal{D}_\alpha[-1,1] = \{f \in \mathcal{D}[-1,1]\colon f'(1)f'(-1) \leqslant \alpha\}$.

Теорема 1. *Пусть $f \in \mathcal{D}_\alpha[-1,1]$, $1 < \alpha < 9$. Тогда f однолистна в области*

$$\underline{\mathcal{U}}(\alpha) = \left\{ z \in \mathbb{D}\colon \frac{|1-z^2|}{1-|z|^2} < \sqrt{1 + \frac{(9\alpha-25)^2\,(297-5\alpha)}{8(\alpha-1)(9-\alpha)(51\alpha+2285)}} \right\}.$$

Теорема 2. *Для каждой точки z_0 границы области*

$$\overline{\mathcal{U}}(\alpha) = \left\{ z \in \mathbb{D}\colon \frac{|1-z^2|}{1-|z|^2} < \sqrt{1 + \frac{\left(2\sqrt{\alpha}-\alpha+3\right)^2}{(\alpha-1)(9-\alpha)}} \right\}, \quad 1 < \alpha \leqslant 3,$$

$$\overline{\mathcal{U}}(\alpha) = \left\{ z \in \mathbb{D}\colon \frac{|1-z^2|}{1-|z|^2} < \sqrt{1 + \frac{(\alpha-1)(9-\alpha)}{\left(2\sqrt{\alpha}+\alpha-3\right)^2}} \right\}, \quad 3 \leqslant \alpha < 9,$$

найдётся функция $f_{z_0} \in \mathcal{D}_\alpha[-1,1]$, производная которой в точке z_0 обращается в нуль.

Литература

1. Горяйнов В.В. Голоморфные отображения полосы в себя с ограниченным искажением на бесконечности / В.В. Горяйнов // Тр. МИАН. — 2017. — Т. 298. — С. 101–111.

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ГЛАДКИХ СУММ РИДЖ-ФУНКЦИЙ НА ВЫПУКЛОМ ТЕЛЕ[1]

А.А. Кулешов (Москва, МГУ)
kuleshov.a.a@yandex.ru

Пусть $n \geqslant 2$, $E \subset \mathbb{R}^n$ — некоторое множество. Ридж-функцией на E будем называть функцию вида $\varphi(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x})$, где $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in E$, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = \sum_{j=1}^n a_j x_j$ и φ — действительнозначная функция, определенная на $\Delta(\mathbf{a}) = \{\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} : \mathbf{x} \in E\}$. На множестве E рассмотрим сумму ридж-функций

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(\mathbf{a}^i \cdot \mathbf{x}). \qquad (1)$$

Пусть каждому интервалу $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$, где $-\infty \leqslant \alpha < \beta \leqslant +\infty$, поставлен в соответствие некоторый класс $B_{(\alpha,\beta)}$ определенных на (α, β) действительных функций так, что выполнены следующие три условия:

1) Из того, что $f \in B_{(\alpha,\beta)}$, $r \in C(\alpha, \beta)$, а функция $f - r$ является аддитивной на (α, β), следует, что $f(x) - r(x) = cx$, где $x \in (\alpha, \beta), c \in \mathbb{R}$.

2) $\forall h \in \mathbb{R}, |h| < \beta - \alpha : f \in B_{(\alpha,\beta)} \Rightarrow \Delta_h f \in B_J$, где $\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x), J = (\alpha, \beta) \cap (\alpha - h, \beta - h)$.

3) $\forall (c, d) \subset (\alpha, \beta) : f \in B_{(\alpha,\beta)} \Rightarrow f \in B_{(c,d)}$.

Теорема 1.*Пусть E — выпуклое тело в $\mathbb{R}^n$, $E \neq \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{Z}^+$. Тогда следующие условия равносильны:*

1) граница E гладкая;

2) для любого $m \in \mathbb{N}$, для любых векторов $\mathbf{a}^1, \ldots, \mathbf{a}^m$ и любых функций $\varphi_i \in B_{int(\Delta_i)}$ $(i = 1, \ldots, n)$ из $f \in C^k(E)$ следует $\varphi_i \in C^k(\Delta_i)$ $(i = 1, \ldots, m)$, где функция f имеет вид (1).

Литература

1. Конягин С.В. О непрерывности конечных сумм ридж-функций / С.В. Конягин, А.А. Кулешов // Матем. заметки. — 2015. — Т. 98, № 2. — С. 308–309.

2. Конягин С.В. О некоторых свойствах конечных сумм ридж-функций, определенных на выпуклых подмножествах $\mathbb{R}^n$ / С.В. Конягин, А.А. Кулешов // Тр. МИАН. — 2016. — Т. 293, С. 193 — С. 200.

---

[1] Работа выполнена при поддержке гранта Правительства Российской Федерации (проект 14.W03.31.0031).

3. Конягин С.В. Некоторые проблемы теории ридж-функций / С.В. Конягин, А.А. Кулешов, В.Е. Майоров // Тр. МИАН. — 2018. — Т. 301. — С. 155–181.

ОЦЕНКА ПРИБЛИЖЕНИЯ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ОТ МАТРИЦЫ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫМ МНОГОЧЛЕНОМ[1]

В.Г. Курбатов, И.В. Курбатова (Воронеж, ВГУ)
kv51@inbox.ru

Теорема. *Пусть A — квадратная комплексная матрица; z_1, …, $z_n \in \mathbb{C}$ — произвольные (возможно, повторяющиеся) точки интерполяции; f — аналитическая функция, область определения которой содержит окрестность выпуклой оболочки объединения спектра матрицы A и точек z_1, …, z_n; наконец, p — интерполяционный многочлен функции f, построенный по точкам z_1, …, z_n (с учетом кратности). Тогда (для любой нормы в пространстве матриц)*

$$\|f(A)-p(A)\| \leqslant \frac{1}{n!} \max_{\substack{t\in[0,1]\\ \mu\in co\{z_1,z_2,\dots,z_n\}}} \big\|\Omega(A)f^{(n)}\big((1-t)\mu\mathbf{1}+tA\big)\big\|,$$

где $\mathbf{1}$ *— единичная матрица, а*

$$\Omega(z)=\prod_{k=1}^{n}(z-z_k).$$

Вариант теоремы для случая, когда роль интерполяционного многочлена играет многочлен Тейлора, получен в [2].

Следствие. *Пусть в условиях теоремы $f(z)=e^z$. Тогда*

$$\|e^A-p(A)\| \leqslant \frac{1}{n!}\max_{t\in[0,1]} e^{(1-t)\beta}\|\Omega(A)e^{tA}\|.$$

где $\beta=\max_k Re\, z_k$.

Литература

1. Kurbatov V. G. An estimate of approximation of a matrix-valued function by an interpolation polynomial / V. G. Kurbatov, I. V. Kurbatova. // arXiv: 1810.02682. — 2018.

---

[1] Второй автор поддержан РФФИ (проект № 19-01-00732 А).

2. Mathias R. Approximation of matrix-valued functions / R. Mathias — SIAM J. Matrix Anal. Appl. — 1993. — Vol. 14. — pp. 1061–1063.

УСТОЙЧИВЫЙ СЕКВЕНЦИАЛЬНЫЙ ПРИНЦИП МАКСИМУМА ПОНТРЯГИНА В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ[1]

Ф.А. Кутерин, А.А. Евтушенко
(Нижний Новгород, ИПФРАН)
kuterin.f@yandex.ru

Настоящая работа посвящена выводу условий оптимальности в задаче оптимального управления с поточечными фазовыми ограничениями типа равенства и неравенства, понимаемыми как ограничения в гильбертовом пространстве $L_2(X)$

$$\int\limits_0^T \big(\langle F^\delta(t)x^\delta[u](t), x^\delta[u](t)\rangle + \langle G^\delta(t)u(t), u(t)\rangle\big)\, dt \to \min, \quad u \in \mathcal{D},$$

$$\langle \varphi_1^\delta(t), x^\delta[u](t)\rangle = h^\delta(t),\ \varphi_2^\delta\big(t, x^\delta[u](t)\big) \leqslant 0 \ \text{ при п.в. } t \in X.$$

Здесь $F^\delta : [0,T] \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $G^\delta : [0,T] \to \mathbb{R}^{m\times m}$ — измеримые по Лебегу ограниченные неотрицательно и равномерно по t положительно определенные матрицы, φ_1^δ, $h^\delta \in L_2(X)$ — заданные функции, $\varphi_2^\delta : X \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ — непрерывная выпуклая по x при всех $t \in X$ функция, $\mathcal{D} \equiv \{u \in L_2(0,T) : u(t) \in U \text{при п.в. } t \in (0,T)\}$, $U \subset \mathbb{R}^m$ — выпуклый компакт, $X \subset [0,T]$, $x^\delta[u](t)$ — решение задачи Коши

$$\dot{x} = a^\delta(t)x + b^\delta(t)u(t), \quad x(0) = x_0^\delta \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [0,T]$$

с измеримыми по Лебегу ограниченными матрицами $a^\delta : [0,T] \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $b^\delta : [0,T] \to \mathbb{R}^{n\times m}$. Верхний индекс δ в исходных данных задачи характеризует уровень ошибки задания этих исходных данных.

Основными результатами работы в рассматриваемой задаче оптимального управления с поточечными фазовыми ограничениями

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 17-05-01182, 19-07-00782).

являются регуляризованные, устойчивые к ошибкам исходных данных, принцип Лагранжа и поточечный принцип максимума Понтрягина, представляющие, в свою очередь конструктивный способ построения минимизирующего приближенного решения в поставленной задаче.

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ РАЗНОСТНОГО ОПЕРАТОРА С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ[1]

В.В. Лийко (Москва, РУДН)
vikalijko@gmail.com

В настоящей работе показано, что регулярный разностный оператор с переменными коэффициентами непрерывно и взаимно однозначно отображает замыкание множества финитных, бесконечно дифференцируемых функций с компактными носителями в пространстве Соболева на подпространство функций с нелокальными краевыми условиями.

Этот факт позволяет применить результаты, полученные для эллиптических задач с нелокальными краевыми условиями к исследованию краевых задач для эллиптических дифференциально-разностных уравнений.

Интерес к эллиптическим дифференциально-разностным уравнениям, а также к нелокальным задачам связан с их важными приложениями, возникающими в теории плазмы, биофизики, теории диффузионных процессов, теории многослойных пластин и оболочек, и др.

Литература

1. Скубачевский А.Л. Краевые задачи для эллиптических функционально дифференциальных уравнений и их приложения // УМН. — 2016. — 71:5(431). — С. 3–112.

2. Skubachevskii, A.L. Elliptic Functional Differential Equations and Applications. Birkhauser, Basel – Boston – Berlin, 1996.

---

[1] Работа выполнена при поддержке Программы РУДН "5-100"и гранта РФФИ (проект № 16-01-00450).

РЕШЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ, СВОДЯЩИХСЯ К ОДНОРОДНЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ, В СИСТЕМЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Н.И. Лобанова (Зеленокумск, МУДО «ЦВР»)
lobantchik@yandex.ru

Современному обществу требуются высококвалифицированные специалисты с исследовательской позицией, способные решать задачи, возникающие из потребностей практики в профессиональной деятельности. Это приводит к необходимости использования в нематематических ситуациях математических методов, одним из которых является метод математического моделирования. Данный метод включает в себя три основных этапа: построение математической модели; решение задачи средствами математики внутри модели; перевод полученного результата на язык, на котором была сформулирована исходная задача. Простейшие дифференциальные уравнения (ДУ) с разделяющимися переменными рассматриваются в школьном курсе алгебры и начал анализа. Однако учащимся следует понимать, что возникшие из потребностей практики задачи часто приводят к другим видам дифференциальных уравнений, часто более сложным, поэтому нужно уметь приводить полученные уравнения к известному виду, алгоритм решения которых известен. В частности, обучающихся целесообразно познакомить с задачами, сюжетная основа которых позволяет создать математическую модель в виде однородных дифференциальных уравнений первого порядка, и рассмотреть метод сведения их к уравнениям с разделяющимися переменными. Преимущественное внимание при этом следует уделить практико-ориентированным задачам [1]. Реализуя внутрипредметные связи, в докладе будут приведены некоторые практико-ориентированные задачи геометрического характера.

Литература

1. Аммосова Н.В. Решение однородных дифференциальных уравнений с обучающимися в рамках дополнительного математического образования / Н.В. Аммосова, Б.Б. Коваленко, Н.И. Лобанова // Сб. научных трудов VI Международной науч.-практ. конф. «Реализация принципа непрерывности в системе учебных предметов в образовательных учреждениях». — Астрахань, 2018. — С. 71–76.

КРИТЕРИЙ КОРРЕКТНОСТИ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ НА ОТРЕЗКЕ СО СМЕШАННЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ НА КОНЦАХ

Ф.Е. Ломовцев
(Минск, Белорусский государственный университет)
lomovcev@bsu.by

Получен критерий (необходимые и достаточные условия) корректности по Адамару (существования, единственности и непрерывной зависимости классического решения от правой части уравнения и начальных и граничных данных) смешанной задачи:

$$u_{tt}(x,t)+2u_{xt}(x,t)+u_{xx}(x,t)=f(x,t),\ \{x,t\}\in Q_n=\cup_{k=0}^{n}G_k, \quad (1)$$

$$u|_{t=0}=\varphi(x),\ \ u_t|_{t=0}=\psi(x),\ \ x\in[0,d],\ \ d>0, \quad (2)$$

$$u|_{x=0}=\mu(t), t\in[0,d_{n+1}], u_x|_{x=d}=\eta(t), t\in[d,d_{n+2}], n=1,2,..., \quad (3)$$

где треугольник $G_0=\{\{x,t\}\in R^2: x\geqslant t,\ x\in[0,d],\ t\in[0,d]\}$, $R=]-\infty,+\infty[$, параллелограммы $G_k=\{\{x,t\}\in R^2: d_k\leqslant t-x\leqslant d_{k+1},\ x\in[0,d],\ t\in[d_k,d_{k+2}]\}$, $k=\overline{1,n}$, числа $d_i=(i-1)d$, $i=1,2,...$

Теорема. *Смешанная задача (1)–(3) на Q_n имеет единственное и устойчивое классическое решение $u\in C^2(Q_n)$: на G_0 вида*

$$u_0(x,t)=\varphi(x-t)+[\varphi'(x-t)+\psi(x-t)]t+F_0(x,t)$$

тогда и только тогда, когда $\varphi\in C^3[0,d]$; $\psi\in C^2[0,d]$; $f\in C(G_0)$; $(F_0)_t$, $(F_0)_x\in C^1(G_0)$, и на G_k вида

$$u_k(x,t)=\mu(t-x)+\left[\frac{1}{d}\int_{d_k}^{t-x}e^{(t-x-s)/d}\mathcal{M}_k(s)ds+c_ke^{(t-x)/d}\right]x-$$

$$-\int_{d_k}^{t-x}(t-x-\tau)f(t-x-\tau,\tau)d\tau+F_k(x,t)$$

тогда и только тогда, когда верны условия гладкости $\mu\in C^2[0,d_{n+1}]$; $\eta\in C^1[d,d_{n+2}]$; $f\in C(\cup_{k=1}^{n}G_k)$; $(F_k)_t$, $(F_k)_x\in C^1(G_k)$, $k=\overline{1,n}$, $n=1,\ 2,...,$ и условия согласования

$$\varphi(0)=\mu(0),\ \psi(0)=\mu'(0),\ f(0,0)-\varphi''(0)-2\psi'(0)=\mu''(0),$$

$$[\varphi''(0)+\psi'(0)]d+\varphi'(0)+(F_0)_x\mid_{x=t;t=d}=\eta(d),$$
$$\psi'(0)-[\varphi'''(0)+\psi''(0)]d+(F_0)_{x\,t}\mid_{x=t;t=d}=\eta'(d),$$
$$(F_0)_{x\,x}\mid_{x=t;t=d}=0.$$

Здесь использованы частные классические решения F_k неоднородного уравнения (1), рекуррентные постоянные c_k и функции:

$$F_k(x,t)=\int\limits_{d_k}^{t}(t-\tau)f(|x-t+\tau|,\tau)d\tau,\ k=\overline{0,n},\ c_1=\varphi'(0)+\psi(0),$$

$$c_k=e^{1-k}\left[\frac{1}{d}\int\limits_{d_{k-1}}^{d_k}e^{(d_k-s)/d}\mathcal{M}_{k-1}(s)ds+\int\limits_{d_{k-1}}^{d_k}f(d_k-\tau,\tau)d\tau\right]+c_{k-1},$$

$$k=\overline{2,n},\ \mathcal{M}_k(s)=\int\limits_{d_k}^{s+d}f(|\tau-s|,\tau)d\tau+\frac{\partial}{\partial s}\left(\int\limits_{d_k}^{s}(s-\tau)f(s-\tau,\tau)d\tau\right)-$$

$$-\frac{\partial}{\partial s}\left(\int\limits_{d_k}^{s+d}(s+d-\tau)f(|\tau-s|,\tau)d\tau\right)-\mu'(s)-\eta(s+d),\ k=\overline{1,n}.$$

Следствие. *Если правая часть f уравнения (1) не зависит от x в G_0 и (или) в G_{k_0}, то в этой теореме она только непрерывна по t, т. е. $f\in C[0,d]$ и (или) $f\in C[d_{k_0},d_{k_0+2}]$, $k_0\in[1,\,2,\,...,n]$.*

Ранее новым методом «вспомогательных смешанных задач для полуограниченной струны» из [1] был найден критерий корректности по Адамару смешанной задачи для уравнения колебаний ограниченной струны при зависящих от времени коэффициентах в не характеристических первых косых производных на концах в [2].

Литература

1. Ломовцев Ф.Е. Метод вспомогательных смешанных задач для полуограниченной струны / Ф.Е. Ломовцев // Шестые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям : материалы Междунар. науч. конф. — Минск : ИМ НАН Беларуси. 2015. — Ч. 2 — С. 74–75.

2. Ломовцев Ф.Е. Решение без продолжения данных смешанной задачи для неоднородного уравнения колебаний струны при граничных косых производных / Ф.Е. Ломовцев // Дифференц. уравнения. — 2016. — Т. 52, № 8 — С. 1128–1132.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОЛЕТА ОСКОЛКОВ МЕТЕОРОИДА ПОСЛЕ ЕГО РАСПАДА

В.Т. Лукашенко (Москва, ИАП РАН)
lukashenko-vt@yandex.ru

По ходу движения в атмосфере метеорное тело со временем разрушается под действием набегающего потока. При этом может происходить распад изначально единого тела на отдельные осколки. Образующиеся тела будут продолжать движение совместно, однако из-за разницы в силах, действующих на каждый отдельный осколок, со временем будет происходить перестроение группы.

Для изучения динамики подобных систем и влияния разлета осколков на траекторию их движения в [1] был предложен метод моделирования, основанный на решении сопряженной аэродинамической и баллистической задач. Однако было обнаружено, что могут возникать ситуации, когда тела подходят близко друг к другу и между ними должно происходить соударение.

В представленной работе приводится дополнение метода [1] алгоритмом для рассчета столкновений между телами. При этом формулы для изменения скоростей i-го и j-го тел вдоль линии соударения $\vec{l}$, проходящей через центры масс тел, запишутся в виде:

$$\Delta V_i = \frac{(1+k)\, m_j \,(V_{lj} - V_{li})}{m_i + m_j}, \;\; \Delta V_j = \frac{(1+k)\, m_i \,(V_{li} - V_{lj})}{m_i + m_j},$$

где V_{li}, V_{lj} – проекции скоростей тел на направление $\vec{l}$; m_i, m_j– массы тел; k – коэффициент восстановления удара [2]. При $k = 1$ между телами происходит абсолютно упругий удар, при $k = 0$ – абсолютно неупругий удар, при $0 < k < 1$ – неупругое столкновение. Реальное значение k зависит от конкретных свойств веществ соударяющихся тел и может задаваться отдельно для каждого соударения.

Литература

1. Лукашенко В.Т. Математическая модель разлета осколков метеорного тела после разрушения / В.Т. Лукашенко, Ф.А. Максимов // Инженерный журнал: наука и инновации — 2017. — Вып. 9(69). — С. 1–14.

2. Пановко Я.Г. Введение в теорию механического удара / Я.Г. Пановко. — М. : Наука, 1977. — 224 с.

ЭКСТРАПОЛЯЦИОННОЕ ОПИСАНИЕ ПРЕДЕЛЬНЫХ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ПРОСТРАНСТВ НА ОСНОВЕ J-МЕТОДА[1]

К.В. Лыков (Самара, ИСОИ РАН — филиал
ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН)
alkv@list.ru

Если $\vec{A} = (A_0, A_1)$ — банахова пара, а G — банахова решетка односторонних числовых последовательностей, то через $\vec{A}_G^J$ будем обозначать пространство с нормой

$$\|a\|_{\vec{A}_G^J} := \inf_{a=\sum a_k} \left\| \left\{ J(2^{-k}, a_k; \vec{A}) \right\}_{k=1}^{\infty} \right\|_G,$$

где запись $a = \sum a_k$ здесь и далее означает, что $a \in A_0 + A_1$ равно сумме сходящегося в $A_0 + A_1$ ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, а через J обозначается J-функционал, т.е. $J(t, a; \vec{A}) = \max\{\|a\|_{A_0}, t\|a\|_{A_1}\}$, $t > 0$. Обращаем внимание, что, в отличие от обычного J-метода интерполяции, в работе используются односторонние числовые последовательности. В частности, если $\theta \in (0,1)$, $q \in [1, \infty)$, то положим

$$\|a\|_{\theta,q} := \inf_{a=\sum a_k} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(2^{k\theta} J(2^{-k}, a_k; \vec{A}) \right)^q \right)^{1/q}.$$

Определим также пространство $\vec{A}_G^{\theta,q(\theta),m}$, где $q(\theta)$ — определенная непрерывная функция от θ, $m \in \mathbb{N}$, условием конечности нормы

$$\|a\|_{\vec{A}_G^{\theta,q(\theta),m}} := \inf_{a=\sum a_k} \left\| \{ \|a_k\|_{1/(k+m),q(1/(k+m))} \}_{k=1}^{\infty} \right\|_G.$$

Теорема. *Пусть G — банахова решетка, интерполяционная относительно банаховой пары $(\ell_1, \ell_1(2^k))$. Предположим также, что в G ограничен оператор дублирования*

$$D: (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \to (x_1, x_1, x_2, x_2, x_3, x_3, \ldots).$$

Тогда для любой банаховой пары $\vec{A}$, для любого $m \in \mathbb{N}$ и для любой непрерывной функции $q(\theta)$, для которой $1 \leqslant q(\theta) \leqslant 1/(1-\theta)$, имеет место равенство

$$\vec{A}_G^{\theta,q(\theta),m} = \vec{A}_G^J.$$

Работа выполнена совместно с С.В. Асташкиным.

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 17-01-00138 а).

СВЯЗЬ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ РАДОНА-КИПРИЯНОВА С НЕЧЕТНЫМ $\mathcal{F}_\mathcal{B}$ ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ БЕССЕЛЯ

Л.Н. Ляхов, М.Г. Лапшина, С.А. Рощупкин
(Воронеж, ВГУ),
(Липецк, ЛГПУ им. П.П. Семенова-Тян-Шанского),
(Елец, ЕГУ им. И.А. Бунина)
levnlya@mail.ru, marina.lapsh@yandex.ru, roshupkinsa@mail.ru

F_B-преобразование Бесселя четных функций введено в [1]. Нечетное преобразование Фурье-Бесселя имеет вид [2]

$$\mathcal{F}_{B,od}[f](\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}_n} \prod_{i=1}^{n} \frac{x_i \xi_i}{\gamma_i + 1} j_{\frac{\gamma_i+1}{2}}(x_i\xi_i)\, f(x) x^\gamma dx,$$

где $\gamma_i > 0$, $i = \overline{1, n}$, $j_\nu(t) = 2^\nu \Gamma(\nu+1) \frac{J_\nu(t)}{t^\nu}$, $x^\gamma = \prod\limits_{i=1}^{n} x_i^{\gamma_i}$.

Преобразование Радона–Киприянова введено в [3] выражением $K_\gamma[f](\xi; p) = \int\limits_{\mathbb{R}_n^+} f(\ldots, \sqrt{z}_{2i-1} i^2 + z_{2i}^2, \ldots) \overset{\gamma}{\underset{x}{\prod}} \delta(p - \langle x, \xi \rangle)\, \prod_{i=1}^n z_{2i}^{\gamma_1} dx$,

где $\overset{\gamma}{\underset{x}{\prod}}$ — многомерный оператор Пуассона, $\delta(P)$ — δ-функция сосредоточенная на $(n-1)$-мерной поверхности $P(x) = 0$ в $\mathbb{R}_n$. Используется представление K_γ (см.[3]):

$$K_\gamma[f](\xi; p) = \int\limits_{\mathbb{R}_{2n}^+} f(\ldots, \sqrt{z_{2i-1}^2 + z_{2i}^2, \ldots)} \left(\delta(p - \langle z, \tilde{\xi} \rangle)\right) \prod_{i=1}^n z_{2i}^{\gamma_1} dz,$$

Имеет место следующие формулы: пусть $f \in S$,

$$\frac{\partial^n K_\gamma[f](\Theta;p)}{\partial p^n} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha P} \mathcal{F}_{B,od}[f](\alpha\Theta) dx\,,$$

$$\mathcal{F}_{B,od}[f](\alpha\Theta) = C(n,\gamma) \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha P}\ \frac{\partial^n}{\partial p^n} K_\gamma[f](\Theta; P) dp\,.$$

Литература

1. Левитан Б.М. Разложение в ряды и интегралы Фурье по функциям Бесселя / Б.М. Левитан // УМН. — 1951. — Т. 6, № 2(42). — С. 102–143.

2. Киприянов И.А. Об одном классе одномерных сингулярных псевдодифференциальных операторов / И.А. Киприянов, В.В. Катрахов // Матем. сборн. — 1977. — Т. 104, № 1. — С. 49–68.

---

3. Киприянов И.А. О преобразованиях Фурье, Фурье–Бесселя и Радона / И.А. Киприянов, Л.Н. Ляхов // ДАН. — 1998. — Т. 360, № 2. — С. 157–160.

КОМПРОМИССНОЕ РЕШЕНИЕ В МОДЕЛИ ЭКОНОМИКИ С ЗАМЕНОЙ ОБОРУДОВАНИЯ

О.А. Малафеев, А.П. Парфенов
(Санкт-Петербург, СПбГУ)
keldoor@gmail.com

Рассмотрена динамическая модель макроэкономики, в которой валовый выпуск X зависит от двух параметров: труда L и капитала K. Зависимость описывается производственной функцией Кобба-Дугласа с техническим прогрессом, нейтральным по Харроду: $X(K(t), L(t), t) = AK(t)^a(L(t)e^{gt})^{1-a}$.

Капитал — это оборудование, доля d которого за единицу времени выходит из строя, так что к моменту t остается $K(t,s) = \int_0^t e^{-d(t-s)}B(s)\ \mathrm{d}s - U(t,s)$, где $B(s)$ — количество оборудования, купленного в момент s, $U(t,s)$ — количество оборудования, отправленного в утиль. Кроме того, стоимость оборудования меняется со скоростью q, заработная плата — со скоростью w, а процентная ставка равна r. Задана функция $I(t,\tau)$ стоимости оборудования возраста τ в момент t и функция $P(t,\tau)$ стоимости ремонта.

Поставлена задача оптимизации замены оборудования, то есть выбора функций B и U, минимизирующих интегральные затраты. В работе [2] эта задача решена для простейшей стратегии замены: заменять все оборудование по истечении срока T. В данной работе рассмотрена более общая стратегия: замена в моменты времени, кратные h. Доказано, что эту задачу можно решить методом динамического программирования. Рассмотрена задача нахождения компромиссного решения [1], согласующего полезности разных фирм с разными функциями дисконта. Построен алгоритм ее решения для простейшего случая: стратегии замены всего оборудования через интервал времени T.

Литература

1. Малафеев О.А. Математические модели конфликтных ситуаций и их разрешение / О.А. Малафеев, А.И. Муравьев — СПб. : Изд-во СПбГУЭФ, 2000. — 294 с.

---

2. Albert K. Ando. On the role of expectations of price changes and technological change in an investment function / Albert K. Ando, Franco Modigliani, Robert Rashe, Stephen. J. Turnovsky // International Economic Review. — 1974. — Vol. 15, No. 2. — P. 384–414.

МНОГОЭТАПНЫЙ АУКЦИОН ИНВЕСТИЦИОННЫХ ПРОЕКТОВ ВТОРОЙ ЦЕНЫ[1]

О.А. Малафеев, Н.Д. Рединских
(Санкт-Петербург, СПбГУ)
o.malafeev@spbu.ru

Рассматривается m-шаговая теоретико-игровая модель Γ^m аукциона второй цены , $l = \overline{1,m}$ — номер шага игры, при этом на каждом шаге процесса разыгрываются аукционы Γ^l с различными, зависящими от предыдущих исходов аукционов, параметрами. Для простоты изложения, множество участников аукциона предполагается одним и тем же.

Пусть $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ множество участников аукциона, которые покупают у аукциониста на каждом шаге некоторый инвестиционный проект, от реализации которого участники аукциона получают доход. Цена заявки каждого участника аукциона на инвестиционный проект равна $v_i > 0, i = \overline{1,n}$. Цена заявки $V = \{v_i^l, i = \overline{1,n}, l = \overline{1,m}\}$ на инвестиционный проект предложенная участником аукциона $s_i, i = \overline{1,n}$ образует предложение на l-м шаге игры Γ^m. На l-м шаге игры Γ^m выигрывает участник аукциона, предложивший минимальную цену. При этом выигравший участник аукциона не платит указанную цену на инвестиционный проект, а платит вторую, самую низкую, из оставшихся цен. На каждом шаге возникает новый аукцион с теми же участниками при новых условиях, зависящий от выборов, сделанных участниками аукциона. Эти аукционы разыгрываются по тому же правилу второй цены. Суммарный доход каждого агента получается сложением его доходов на всех шагах игры. Каждый агент стремится максимизировать свой суммарный доход, полученный на всех этапах процесса. В работе показывается, что глобальное равновесие не реализуется последовательностью локальных равновесий. Приводится численный пример.

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00796).

Литература

1. Maskin E. Mechanism Design. How to Implement Social Goals / E. Maskin // Les Prix Nobel 2007. — 2008. — p.296-307.

2. J. Aumann Robert. Game Engineering / J. Aumann Robert // Mathematical Programming and Game Theory for Decision Making — 2008. — p. 279-286.

ОБ ИНВАРИАНТАХ ЛАПЛАСА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

А.Н. Миронов, Л.Б. Миронова (Елабуга,
Елабужский институт Казанского федерального университета)
miro73@mail.ru

В данной работе речь идет о классе линейных уравнений с доминирующей частной производной [1]. Указанные уравнения имеют вид $D_1u + D_2u = f$, где первое слагаемое — старшая частная производная искомой функции u, а D_2 — линейный дифференциальный оператор, содержащий лишь производные, получаемые из D_1 отбрасыванием по крайней мере одного дифференцирования (f — заданная функция). Такие уравнения возникают при моделировании процессов вибрации, к ним сводится задача интегрального представления преобразования одних линейных дифференциальных операторов в другие, они применяются в теории упругости, при изучении фильтрации жидкости в трещиноватых породах, влагопереноса в почве, передачи тепла в гетерогенных средах, моделировании различных биологических процессов и явлений, при изучении распространения волн в диспергирующих средах, а также в теории оптимальных процессов и обратных задачах.

Приложения инвариантов Лапласа в теории гиперболических уравнений хорошо известны, они играют определяющую роль в классификации указанных уравнений методами группового анализа [2, с. 116–125].

Нами построены инварианты Лапласа для ряда классов уравнений с доминирующей частной производной, выделены частные случаи таких уравнений, допускающие алгебры Ли наибольшей размерности.

Литература

1. Жегалов В.И. Уравнения с доминирующей частной производной / В.И. Жегалов, А.Н. Миронов, Е.А. Уткина. — Казань : Изд-во Казанск. ун-та, 2014. — 389 с.

2. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений / Л.В. Овсянников. — М. : Наука, 1978. — 400 с.

О МОДЕЛИРОВАНИИ ЗАДАЧИ ПЕРКОЛЯЦИИ УЗЛОВ ДЛЯ ТРЕУГОЛЬНОЙ РЕШЁТКИ НА КВАДРАТНОЙ РЕШЁТКЕ С $(1,1)$-ОКРЕСТНОСТЬЮ

П.В. Москалев (Воронеж, ВГАУ)
moskaleff@mail.ru

В работе [1] было показано, что взвешивание узлов из 1-окрестности Мура по (неметрическому) расстоянию Минковского при построении моделей перколяции узлов приводит к вариации оценок порога перколяции p_c^* в интервале от 0,593 для $(1,0)$-окрестности до 0,407 для $(1,\infty)$-окрестности. Это приводит к гипотезе о применимости взвешенной окрестности Мура для моделирования задачи узлов на других однородных решётках. К примеру, если 1-окрестность узла треугольной решётки содержит шесть узлов, то взвешивание узлов 1-окрестности Мура на квадратной решётке по расстоянию в манхеттенской метрике (то есть построение $(1,1)$-окрестности) с вероятностной точки зрения будет соответствовать построению 1-окрестности того же узла на треугольной решётке. В результате, статистические оценки порога перколяции в задаче узлов для квадратной решётки с $(1,1)$-окрестностью дают $p_c^* \approx 0{,}504$, достаточно близкое к известному из [2] точному значению порога перколяции в задаче узлов для треугольной решётки $p_c = \frac{1}{2}$. Сопоставление поведения функций мощности перколяционных кластеров $P_\infty^*(p)$ с найденными по методике [3] априорными оценками порога перколяции p_c при различных взвешивающих распределениях $S \sim \mathbf{B}(1,2)$, $\mathbf{B}(1,1)$, $\mathbf{B}(2,1)$ также согласуется с гипотезой о применимости квадратной решётки с $(1,1)$-окрестностью для моделирования задачи перколяции узлов на треугольной решётке.

Литература

1. Москалев П.В. Оценки порога и мощности перколяционных кластеров на квадратных решётках с $(1,\pi)$-окрестностью /

П.В. Москалев // Компьютерные исследования и моделирование. — 2014. — Т. 6, № 3. — С. 405–414.

2. Shante V. An introduction to percolation theory / V. Shante, S. Kirkpatrick // Advances in Physics. — 1971. — Vol. 20, No. 85. — P. 325–357.

3. Moskalev P.V. On the convergence of percolation probability functions to cumulative distribution functions on square lattices / P.V. Moskalev. — arXiv: 1805.12380.

РЕШЕНИЕ ПОЛУГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДЕСКРИПТОРНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

А.Х. Мохамад (Воронеж, ВГУ)
abdulftah.hosni90@gmail.com

Рассматривается уравнение

$$A\frac{\partial U}{\partial x} + B\frac{\partial U}{\partial y} = 0, \tag{1}$$

где A, B — линейные замкнутые операторы, действующие в банаховом пространстве E, $\overline{domA} = \overline{domB} = E$; оператор A обладает свойством иметь число 0 нормальным собственным числом (далее, 0-НСЧ); $\dim KerA = 1$, $U(x,y) \in E, (x,y) \in [0,x_0] \times [0,T]$.

Уравнение (1) носит название алгебро-дифференциального уравнения в частных производных и относится к уравнениям соболевского типа. Вырожденные системы уравнений встречаются в различных областях приложений: гидродинамике (уравнения Навье-Стокса), теплотехнике (конвективный теплообменник), электротехнике и т.д.

Начально-краевая задача для уравнения (1) рассмотрена в статье [1] в случае более жестких условий на операторы A, B; требуется существование левого регуляризирующего оператора.

Свойство 0-НСЧ позволяет расщеплять исходное уравнение на уравнения в некоторых подпространствах M_λ и N_λ и решать уравнения в этих подпространствах. В подпространствах M_λ, N_λ ставится для (1) полуграничная задача (такие условия называют условиями типа Шаудера):

$$U(0,y)=\varphi(y)\in M_\lambda, U(x,0)=\psi(x)\in N_\lambda.$$

В настоящей работе определены условия, при которых решение поставленной задачи существует, единственно в N_λ; получено решение в аналитическом виде.

Литература

1. Нгуен Х.Д. О моделировании с использованием дифференциально-алгебраических уравнений в частных производных / Х.Д. Нгуен, В.Ф. Чистяков // Вестник ЮУРГУ. Сер.: Матем. моделирование и программирование. — 2013. — Т. 6, № 1 — С. 98–111.

ИССЛЕДОВАНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ ГАЗОВЫХ ГИДРАТОВ ПРИ РАБОТЕ КУПОЛА-СЕПАРАТОРА УСТАНОВЛЕННОГО НА ДНЕ ОКЕАНА НАД МЕСТОМ АВАРИЙНОГО ВЫБРОСА ГИДРАТООБРАЗУЮЩЕГО ГАЗА И НЕФТИ[1]

А.А. Насыров, И.А. Чиглинцев, С.А. Лепихин (Бирск, Бирский филиал БашГУ; Сургут, Филиал ТИУ в г.Сургуте)
nasaza@mail.ru

В работе рассматриваются теоретические основы функционирования «купола-сепаратора», предназначенного для сбора и последующей отгрузки газо-нефтяных выбросов в случае разрыва скважины вблизи дна глубоких водоемов, когда термобарические условия благоприятны для образования газогидрата. На основе построенной математической модели показан процесс наполнения углеводородов в куполе из полиуретана, дополнительно утепленного пенополиуретаном, в условиях гидратообразования, а так же описаны температуры собираемых нефти и газа и изменение толщины гидратного слоя.

Литература

1. Жуков А.В. Способ добычи газа из глубоководных месторождений газогидратов / А.В. Жуков, М.И. Звонарев, Ю.А. Жукова // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. — 2013. — № 10, Ч. 1 — С. 16–20.

2. Гималтдинов И.К. К теории начального этапа накопления нефти в куполе-сепараторе / И.К. Гималтдинов, С.Р. Кильдибае-

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 17-41-020244).

ва // Теплофизика и аэромеханика. — 2015, — Т. 22, № 3. — С. 401–406.

3. Чиглинцев И.А. Моделирование процесса наполнения «купола-сепаратора», с разложением газогидрата, образовавшегося в период монтажа установки / И.А. Чиглинцев, А.А. Насыров // Инженерно-физический журнал. — 2016. — Т. 89, № 4. — С. 851–860.

4. Шагапов В.Ш. О возможности вымывания газа из газогидратного массива посредством циркуляции теплой воды / В.Ш. Шагапов, А.С. Чиглинцева, В.Р. Сыртланов // Прикладная механика и техническая физика. — 2009. — Т. 50, № 4. — С. 100–111.

ОБ ОДНОМ НЕРАВЕНСТВЕ ДЛЯ ОПЕРАЦИИ В-ЛИУВИЛЛЕВСКОГО ТИПА $I_{\gamma,-r}$ $(r>0)$ НАД ВЕСОВЫМИ ФУНКЦИЯМИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА

А.А. Никитина (Липецк, Липецкий филиал РАНХиГС)
nikitina.alex.alex@gmail.com

Пусть $R_N^+ = R_n^+ \times R_{N-n}$, $1 \leqslant n < N$, $x=(x',x'')$, $x' \in R_n^+ = \{x' : x_1>0,\dots,x_n>0\}$, $x'' \in R_{N-n}$. Переменную x' размерности n, по смыслу рассматриваемых здесь задач, будем называть весовой.

На основе j-функции Бесселя первого рода определяются смешанные прямое и обратное преобразования Фурье-Бесселя, которые обозначим $\widehat{\varphi}(\xi) = F_B[\varphi](\xi)$ и $\widetilde{\varphi}(x) = F_B^{-1}[\varphi](x)$.

Следуя [1], [2], через $\mathfrak{M}^{\gamma}_{\nu,p}(R_N^+) = \mathfrak{M}^{\gamma}_{\nu,p}$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ обозначим совокупность всех целых четных по каждой из переменной $x_1,\dots,x_n$ функций экспоненциального типа ν (обозначается этот класс $E_{\nu,ev}$; терминалогия книги [2]), которые, как функции действительного переменного $x \in R_N$, принадлежат весовому классу Лебега $L_p^{\gamma}(R_N^+)$.

Операцией В-лиувиллевского типа $I_{\gamma,r}$ будем называть следующую конструкцию $I_{\gamma,r}f = F_B^{-1}\left[(1+|x|^2)^{-\frac{r}{2}}F_B[f]\right]$, где r — действительное число.

Теорема 1. *Пусть g_ν — целая четная по каждой из переменной $x_1,\dots,x_n$ функция экспоненциального типа ν, т.е. $g_\nu \in \mathfrak{M}^{\gamma}_{\nu,p}$, тогда для операции В-лиувиллевского типа $I_{\gamma,-r}g_\nu$ имеет место следующее неравенство*

$$\|I_{\gamma,-r}g_\nu\|_{L_p^{\gamma}(R_N^+)} \leqslant \varkappa_r(1+\nu)^r\|g_\nu\|_{L_p^{\gamma}(R_N^+)}.$$

Литература

1. Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения / С.М. Никольский. — М. : Наука, 1977. — 456 с.

2. Киприянов И.А. Сингулярные эллиптические краевые задачи / И.А. Киприянов. — М. : Наука, 1997. —199 с.

3. Ляхов Л.Н. Построение ядер Дирихле и Валле-Пуссена-Никольского для j-бесселевых интегралов Фурье / Л.Н. Ляхов // Труды Московского математического общества. — 2015. — Т. 76, вып. 1. — С. 67–84.

РАВНОУГОЛЬНЫЕ ЖЕСТКИЕ ФРЕЙМЫ В СЖАТЫХ ИЗМЕРЕНИЯХ[1]

С.Я. Новиков (Самара, Самарский университет)
nvks@ssau.ru

Традиционные методы обработки больших массивов данных предполагают три основных этапа: сбор, сжатие, восстановление информации. Наличие первого этапа требует создания больших хранилищ.

Метод сжатых измерений предполагает выделять наиболее значимые данные измерений, игнорируя остальные, т.е. совместить первые два этапа обработки данных в один.

Пусть x — неизвестный N-мерный вектор, имеющий не более K ненулевых координат, так называемый K-*разреженный* вектор. Сжатые измерения направлены на построение относительно небольшого количества измерений M, но так, чтобы можно было построить конструктивный алгоритм для восстановления вектора x.

Модель сжатых измерений представляется $M \times N$-матрицей Φ, $M \ll N$. строки которой – измерения, а результат измерений – вектор

$$y = \Phi x.$$

Матрицы такого же типа являются при определенных ограничениях матрицами операторов синтеза для фреймов конечномерных пространств. Показано, что матрицы равноугольных жестких фреймов являются оптимальными в задачах сжатых измерений.

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 17-01-00138).

О ФУНКЦИОНАЛЬНОМ ИСЧИСЛЕНИИ В ТЕНЗОРНОМ ПРОИЗВЕДЕНИИ ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВ[1]

М.Н. Орешина (Липецк, ЛГТУ)
m_ oreshina@mail.ru

Пусть H_1 и H_2 — комплексные гильбертовы пространства со скалярными произведениями $\langle\cdot,\cdot\rangle_{H_1}$ и $\langle\cdot,\cdot\rangle_{H_2}$, причем в пространстве H_2 задано разложение единицы E, сосредоточенное на некотором множестве Ω. Как известно [1, 2], разложение единицы E позволяет построить функциональное исчисление в H_2, сопоставляющее каждой измеримой по Борелю функции $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ оператор

$$\varphi(f) = \int_\Omega f(\lambda)\, dE(\lambda).$$

Обозначим через $\mathbf{B}(H_1)$ банахову алгебру всех линейных ограниченных операторов $A\colon H_1 \to H_1$. В докладе в гильбертовом тензорном произведении $H_1 \overline{\otimes}_2 H_2$ пространств H_1 и H_2 для операторнозначных функций $F\colon \Omega \to \mathbf{B}(H_1)$ строится функциональное исчисление вида

$$\Phi(F) = \int_\Omega F(\lambda) \otimes dE(\lambda),$$

для которого

$$\langle \Phi(F)(x \otimes y), x' \otimes y' \rangle_{H_1 \overline{\otimes}_2 H_2} = \int_\Omega \langle F(\lambda)x, x' \rangle_{H_1} dE_{y,y'}(\lambda),$$

где мера $E_{y,y'}$ определяется соотношением $E_{y,y'}(\omega) = \langle E(\omega)y, y' \rangle_{H_2}$. Обсуждаются свойства полученного функционального исчисления.

Теорема. *Пусть* $A \in \mathbf{B}(H_1)$ *и* $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ *— измеримая по Борелю существенно ограниченная функция. Тогда для функции* $F(\lambda) = Af(\lambda)$ *справедливо представление* $\Phi(F) = A \otimes \varphi(f)$.

Литература

1. Рудин У. Функциональный анализ / У. Рудин. — М. : Мир, 1975. — 444 с.

2. Хелемский А.Я. Лекции по функциональному анализу / А.Я. Хелемский. — М. : МЦНМО, 2004. — 552 с.

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Липецкой области (проект № 17-47-480305-р_а).

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ И КЛАССОВЫЕ ОЦЕНКИ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ СЛАБЫХ ЖАДНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ПО ОРТОГОНАЛЬНЫМ СЛОВАРЯМ

А.С. Орлова (Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова)
anastasia-orlova1@ya.ru

Применение к ортонормированному словарю D и приближанмому элементу x из гильбертова пространства H чисто жадного алгоритма [1] приводит к класическим рядам Фурье, переупорядоченным по убыванию модулей коэффициентов. Такое переупорядочение вполне естественно с точки зрения наилучшего n-членного приближения [2, гл. 3, §4, п.4]. При применении слабого жадного алгоритма [3] с ослабляющей последовательностью $\{t_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (0,1]$ требование переупорядоченности модулей коэффициентов ряда Фурье $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \hat{x}_n e_n$ заменяется более слабым условием: $|\hat{x}_n| \geqslant t_n \sup\limits_{k \geqslant n} |\hat{x}_k|$. Для упрощения записи далее будем считать, что пространство $H = \ell^2$ и D — стандартный базис ℓ^2.

Классовую оценку скорости убывания норм остатков слабо переупорядоченного ряда даёт следующая теорема [4].

Теорема 1. *Пусть* $x \in \ell^1 \subset H$. *Тогда для всех натуральных* n *справедлива оценка* $\left\| \sum\limits_{l=n+1}^{\infty} \hat{x}_l e_l \right\|_2 \leqslant \frac{\|x\|_1}{2\sqrt{T_n}}$, *где* $T_n = \sum\limits_{l=1}^{n} t_l$.

Однако, несмотря на то, что данная оценка скорости сходимости асимптотически неулучшаема с точки зрения класса [4], при некотором ограничении на ослабляющую последовательность $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ классовая оценка скорости сходимости не совпадает по порядку с индивидуальной оценкой скорости сходимости ни для какого ненулевого вектора из ℓ_1. Более точно, устанавливается следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть* $x \in \ell_1 \subset H$ *ненулевой, а ослабляющая последовательность* $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ *такая, что для некоторого натурального числа* ν *неравенство* $\sum\limits_{n=\nu N+1}^{\nu N+\nu} t_n^2 \geqslant 1$ *выполняется при всех натуральных* N. *Тогда существует последовательность натуральных*

чисел $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ *такая, что* $\left\|\sum\limits_{l=n_k+1}^{\infty}\hat{x}_l e_l\right\|_2 = o\left(\frac{\|x\|_1}{\sqrt{T_{n_k}}}\right)$, $k\to\infty$, *где* $T_n=\sum\limits_{l=1}^{n} t_l$.

Литература

1. DeVore R.A. Some remarks on greedy algorithms / R.A. DeVore, V.N. Temlyakov // Adv. Comput. Math. — 1996. — Т. 5, № 1. — С. 173–187.

2. Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин — М. : Наука, 1976. — 544 с.

3. Temlyakov V.N. Weak greedy algorithms / V.N. Temlyakov // Adv. Comput. Math. — 2000. — Т. 12, № 2–3. — С. 213–227.

4. Орлова А.С. Скорость сходимости слабых жадных приближений по ортогональным словарям / А.С. Орлова // Вестн. Моск. Ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. — 2017. — № 2. — С. 68–72.

АПРИОРНАЯ ОЦЕНКА РЕШЕНИЙ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В ПОЛОСЕ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ[1]

В.В. Панков (Воронеж, ВГУ)

В настоящее время интенсивно исследуются процессы с вырождением, то есть процессы, в которых граница области оказывает существенное влияние на процессы, происходящие вблизи границы. В этом случае на границе области может меняться как тип уравнения, так и его порядок. В данной работе рассматриваются краевые задачи для уравнений, являющихся эллиптическими внутри области, которые на границе области меняют порядок по одной из переменных. К таким уравнениям приводит математическое моделирование процессов фильтрации идеального баротропного газа в неоднородной анизотропной пористой среде, различных процессов гидродинамики с сингулярной особенностью у параметров. Подобные уравнения возникают при моделировании процесса распространения примеси в жидкокристаллическом растворе, находящемся во внешнем электрическом поле, при исследовании ста-

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (проект 14.Z50.31.0037).

ционарной задачи о контакте мягкой оболочки с препятствием, при расчете линейных стационарных магнитных осесимметричных полей в неоднородных анизотропных средах. Такие уравнения являются, например, обобщением сингулярно возмущенных уравнений конвекции – диффузии. В работе В.П. Глушко [1] были получены оценки решений общей краевой задачи в полосе для вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка, вырождающегося а границе области в уравнение первого порядка по переменной t. В работе А.Д Баева, В.П. Глушко [2] были получены априорные оценки общей краевой задачи для одного вырождающегося уравнения высокого порядка, которое вырождается на границе области в уравнение второго порядка по переменной t. Уравнения, вырождающиеся в уравнения третьего порядка по переменной t, были изучены в [3], [4]. Некоторые другие вырождающиеся уравнения были рассмотрены в [5]–[7].

Рассмотрим в полосе $R_d^n = \{x \in R^{n-1},\ 0 < t < d\}$, где $d > 0$ — некоторое число, уравнение

$$A(D_x, D_{\alpha,t}, \partial_t)v(x,t) = F(x,t), \tag{1}$$

где $A(D_x, D_{\alpha,t}, \partial_t)v = L_{2m}(D_x, D_{\alpha,t})v + b(-1)^{k-1}\partial_t^{2k-1}v$, $L_{2m}(D_x, D_{\alpha,t}) = \sum\limits_{|\tau|+j\leqslant 2m} a_{\tau j} D_x^\tau D_{\alpha,t}^j$, b, $a_{\tau j}$ — комплексные числа, $Im\,\overline{b}a_{02m} = 0$, $D_{\alpha,t} = \frac{1}{i}\sqrt{\alpha(t)}\partial_t\sqrt{\alpha(t)}$, $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $D_x^\tau = i^{|\tau|}\partial_{x_1}^{\tau_1}\partial_{x_2}^{\tau_2}...\partial_{x_{n-1}}^{\tau_{n-1}}$.

На границе $t = 0$ полосы R_d^n задаются условия вида

$$B_j(D_x)\, v|_{t=0} = \sum_{|\tau|\leqslant m_j} b_{\tau j} D_x^\tau \partial_t^{j-1}\, v|_{t=0} = G_j(x),\ j = 1, 2, ..., k \tag{2}$$

с комплексными коэффициентами $b_{\tau j}$.

На границе $t = d$ полосы R_d^n задаются условия вида

$$v|_{t=d} = \partial_t\, v|_{t=d} = ... = \partial_t^{m-1}\, v|_{t=d} = 0. \tag{3}$$

Пусть выполнены следующие условия.

Условие 1. При всех $(\xi, \eta) \in R^n$ справедливо неравенство $Re\overline{b}L_{2m}(\xi,\eta) \geqslant c(1 + |\xi|^2 + |\eta|^2)^m$, где постоянная $c > 0$ не зависит от (ξ, η).

Условие 2. Для некоторого $s \geqslant 2m + \max\limits_{1\leqslant j\leqslant k}(m_j)$ функция $\alpha(t)$ принадлежит $C^{s-1}[0,d]$, причем $\alpha(0) = \alpha'(0) = 0$, $\alpha(t) > 0$ при $t > 0$.

Условие 3. $\sum\limits_{|\tau|\leqslant m_j} b_{\tau j}\xi_\tau \neq 0,\ j=1,2,...,k$ при всех $\xi\in R^{n-1}$.

Рассмотрим интегральное преобразование F_α, которое на функциях $u(t)\in C_0^\infty(R_+^1)$ может быть записано в виде

$$F_\alpha[u(t)](\eta)=\int\limits_0^{+\infty} u(t)\exp(i\eta\int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)})\frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}}.$$

Это преобразование было введено в [7]. Для этого преобразования можно построить обратное преобразование F_α^{-1}, которое можно записать в виде $F_\alpha^{-1}[w(\eta)](t)=\frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}}F_{\eta\to\tau}^{-1}[w(\eta)]\Big|_{\tau=\varphi(t)}$, где $\tau=\varphi(t)=\int\limits_t^d\frac{d\rho}{\alpha(\rho)},\quad F_{\eta\to\tau}^{-1}$ — обратное преобразование Фурье. Кроме того, для преобразования F_α доказан аналог равенства Парсеваля, что дает возможность рассмотреть это преобразование не только на функциях из $L_2(R_+^1)$, но и на некоторых классах обобщенных функций. Из определения преобразования F_α следует, что если $u\,(t)\in C^s\,[0,d]$ и удовлетворяет условиям $u\,(0)=\partial_t u\,(0)=...=\partial_t^{s-1}\,(0)=0$, то справедливо равенство $F_\alpha\left[D_{\alpha,t}^j u\right](\eta)=\eta^j F_\alpha\,[u]\,(\eta)$ при всех $j=0,1,2,...,s$.

С помощью преобразования F_α были построены псевдодифференциальные операторы с вырождением. Исследование таких псевдодифференциальных уравнений позволило получить априорные оценки и теоремы о существовании граничных задач в полупространстве для новых классов вырождающихся уравнений.

Введем пространства, в которых будет изучаться задача (1)–(3).

Определение 1. Пространство $H_{s,\alpha,\frac{2m}{2k-1}}(R_d^n)$ ($s\geqslant 0$ — целое число) состоит из тех функций $v(x,t)\in L_2(R_d^n)$, для которых конечна норма

$$\|v\|_{s,\alpha,\frac{2m}{2k-1}}=$$

$$\{\sum_{l=0}^{[\frac{(2k-1)s}{2m}]}\left\|F_{\xi\to x}^{-1}F_\alpha^{-1}[(1+|\xi|^2+|\eta|^2)^{\frac12(s-\frac{2m}{2k-1}l)}F_\alpha F_{x\to\xi}[\partial_t^l v(x,t)]]\right\|_{L_2(R_d^n)}^2\}^{\frac12},$$

где $[\frac{(2k-1)s}{2m}]$ — целая часть числа $\frac{(2k-1)s}{2m}$.

Здесь $F_{x\to\xi}$ ($F_{\xi\to x}^{-1}$) — прямое (обратное) преобразование Фурье

Если s — натуральное число такое, что число $\frac{(2k-1)s}{2m}$ является целым числом, то эта норма эквивалентна следующей норме

$$\|v\|_{s,\alpha,\frac{2m}{2k-1}} = \{ \sum_{|\tau|+j+\frac{2m}{2k-1}l\leqslant s} \left\| D_x^\tau D_{\alpha,t}^j \partial_t^l v \right\|_{L_2(R_d^n)} \}^{\frac{1}{2}}.$$

Обозначим через $H_s(R^{n-1})$ пространство Соболева – Слободецкого, норму в котором обозначим через $\|\cdot\|_{s}$

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $s \geqslant \max\{2m, \max\limits_{1\leqslant j\leqslant k}(m_j + \frac{2m(j-1)}{2k-1}) + \frac{m}{2k-1}\}$ — *целое число,* $m \geqslant 2k-1$ *и выполнены условия 1 – 3. Тогда для любого решения* $v(x,t)$ *задачи (1) – (3), принадлежащего пространству* $H_{s,\alpha,\frac{2m}{2k-1}}(R_d^n)$ *справедлива коэрцитивная априорная оценка*

$$\|v\|_{s,\alpha,\frac{2m}{2k-1}} \leqslant c(\|Av\|_{s-2m,\alpha,\frac{2m}{2k-1}} + \sum_{j=1}^{k} \|B_j\ v|_{t=0}\|_{s-m_j-\frac{2m(j-1)}{2k-1}-\frac{m}{2k-1}}),$$

где постоянная $c > 0$ *не зависит от* v.

Литература

1. Вишик М.И. Краевые задачи для эллиптических уравнений / М.И. Вишик, В.В. Грушин // Математический сборник. — 1969. — Вып. 79 (121). — С. 3–36.

2. Баев А.Д. Об общих краевых задачах в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / А.Д. Баев // Доклады Академии наук. — 2008. — Т. 422, № 6. — С. 727–728.

3. Баев А.Д. Об одной краевой задаче в полосе для вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка / А.Д. Баев // Вестник Самарского гос. ун-та. Сер. : Естеств. науки. — 2008. — № 3 (62). — С. 27–39.

4. Левендорский С.З. Краевые задачи в полупространстве для квазиэллиптических псевдодифференциальных операторов, вырождающихся на границе / С.З. Левендорский // Математический сборник. — 1980. — № 111 (153). — С. 483–501.

5. Баев А.Д. Об одном классе краевых задачах в полосе для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / А.Д. Баев, С.С. Бунеев // Доклады Академии наук. — 2013. — Т. 448, № 1. — С. 7–8.

6. Баев А.Д. Априорные оценки решений краевых задачах в полосе для одного класса вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / А.Д. Баев, С.С. Бунеев // Известия вузов. Серия Математика. — 2012. — № 7. — С. 1–4.

7. Баев А.Д. Вырождающиеся эллиптические уравнения высокого порядка и связанные с ними псевдодифференциальные операторы / А.Д. Баев // Доклады Академии наук СССР. — 1982. — Т. 265, № 5. — С. 1044–1046.

8. Баев А.Д. О некоторых краевых задачах для псевдодифференциальных уравнений с вырождением / А.Д. Баев, П.А. Кобылинский // Доклады Академии наук. — 2016. — Т. 466, № 4. — С. 385–388.

9. Баев А.Д. О вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка и псевдодифференциальных операторах с вырождением / А.Д. Баев, Р.А. Ковалевский, П.А. Кобылинский // Доклады Академии наук. — 2016. — Т. 471, № 4. — С. 387–390.

РАЗВИТИЕ СТОХАСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ РАСПОЗНАВАНИЯ И ПРОГНОЗА СИЛЬНЫХ И ОПАСНЫХ ЛЕТНИХ ОСАДКОВ ПО ТЕРРИТОРИИ РОССИИ

Э.В. Переходцева (Москва,
Государственный технологический университет (МИРЭА),
Гидрометцентр России)
perekhod@mecom.ru

Возникновение летних сильных ливневых осадков количеством Q>=15мм/12ч связано с развитием над определенными территориями Европейской части России конвекции, вызванной прохождением циклонов и фронтов разного типа. При этом выпадение этих сильных ливней носит локальный характер. Поэтому прогнозирование осадков количеством Q>=15мм/12ч и более на определенной станции является чрезвычайно трудной и актуальной задачей синоптической практики, несмотря на развитие в последние десятилетия гидродинамических моделей их прогноза (ГДМА), использующих численные решения системы уравнений краткосрочного прогноза погоды, включающей уравнения движения атмосферы, уравнение притока тепла, уравнение неразрывности и состояния. Возникновение сильных и тем более опасных (количеством

Q>=45мм/12ч) осадков связано с определенными аэросиноптическими и термодинамическими условиями, характеризуемыми значениями целого ряда параметров (предикторов)).

В 90-х годах была разработана первая стохастическая модель распознавания метеорологических ситуаций, способствующих возникновению летних осадков с выделением областей сильных осадков. Эта модель была разработана автором на основе байесовского подхода. В данной модели метеорологическая ситуация, способствующая возникновению указанных явлений, представлялась как многомерный вектор $X(A) = (x_1(A), x_2(A), \dots x_n(A))$, где n — число потенциальных, физически обоснованных параметров атмосферы ($n = 38$). Ставилась задача — разделить с минимальными ошибками выборку векторов наличия явлений A — архив $\{X(A)\}$ и их отсутствия — архив $\{X(B)\}$. С целью уменьшения размерности пространства признаков n была проведена методом графов диагонализация средней матрицы корреляции бинарных коэффициентов корреляции всех признаков **R**. Далее был проведен отбор наиболее информативных предикторов — представителей диагональных блоков. В результате из 38 признаков был выбран вектор-предсказатель из семи наиболее информативных слабо зависимых предикторов, в том числе температура и влажность у Земли, горизонтальный градиент приземной температуры, влажность в средней тропосфере, лапласиан давления у земли. Диагноз летних осадков в пункте осуществлялся по значениям линейной дискриминантной функции $U(X)$, зависящей от семи отобранных предикторов:

$$U(X) = [X - (M(A) + M(B))/2]'V^{-1}[M(A) - M(B)]+$$

$$+\ln[P(A)C(B/A)/P(B)C(A/B),$$

т.е. $U(X)$ представлялась как линейная сумма фактических значений выбранных семи параметров в заданном пункте с рассчитанными весовыми коэффициентами и свободным членом. При этом минимизировались ошибки первого и второго рода a и b, чтобы критерий успешности Пирси-Обухова $T = 1 - a - b$ был максимальным. Диагноз факта явлений осадков давался при $U(X) > 0$, прогноз — при том же условии, но в $U(X)$ использовались при тех же коэффициентах дискриминантной функции прогностические значения выбранных семи параметров атмосферы. Прогностическими значениями параметров в полностью автоматизированном прогнозе являлись гидродинамические прогнозы метеоэлементов, полученные из первой оперативной модели краткосрочного прогноза погоды (автор — Беркович Л.В). Модель имела горизонтальное разрешение 150х150км. Именно в узлах ее сетки, покрывающей территорию ЕТР, и рассчитывались значения прогностической дискриминантной функции и вероятности прогноза в процентах по формуле $P(X) = 100/(1 + \exp(-U(X))$.

На карте ЕТР по вероятностям в узлах сетки P(X)>=98% выделялись области, где давался категорический прогноз сильных ливневых осадков количеством более14мм/12ч. Метод успешно прошел испытания в пяти Управлениях по гидрометслужбе (УГМС), был принят в качестве вспомогательного для синоптической практики и прогнозы [1] в последующие 15 лет до 2006г передавались оперативно в эти пять Управлений два раза в сутки.

С 2007 года проходила адаптация полученных решающих правил прогноза к выходным полям новой региональной гидродинамической модели (автор — Лосев В.М.) с горизонтальным разрешением 75х75км. В 2012-2013гг. новая гидродинамико-статистическая модель прогноза сильных осадков (количеством более 14мм/12ч), использующая прогностические выходные данные региональной модели, проходила верификацию в лаборатории испытаний Гидрометцентра России. По результатам испытаний модель значительно превосходила по предупрежденности явлений (P.>=70%) и по критерию Пирси-Обухова (T=0,45-0,5) все гидродинамические модели, по которым предупрежденность этих осадков составляла 5-25%, а T<0,2 [2].

В настоящее время заблаговременность прогноза сильных, а также очень сильных осадков увеличена до 48ч. В новой технологии, разработанной совместно с автором графического пакета старшим научным сотрудником Гидрометцентра России Алферовым Ю.В., на сайт ГВЦ выкладываются теперь два раза в сутки цветные карты прогноза сильных и опасных ливневых осадков с заблаговременностью 12-24-36-48ч [2]. В докладе приводятся сравнительные независимые оценки автоматизированного прогноза летних осадков количеством Q>=15мм/12ч по станциям ЕТР и Сибири, где также результаты прогноза по гидродинамико-статистической модели оказались наилучшими. По критерию Пирси-Обухова этот автоматизированный гидродинамико-статистический метод прогноза, использующий разработанные стохастические модели прогноза, является наиболее успешным. По результатам независимых испытаний прогноза сильных осадков летом 2018г предупрежденность дневных и ночных сильных ливней по станциям с заблаговременностью 12ч и 24ч составила около 71%, в то время, как по отечественным и зарубежным моделям она составила 9-20% Приводятся таблицы сравнительных оценок прогноза за 5 последних лет и наиболее интересные случаи прогноза, в том числе для Центрального Федерального округа [4] и для территории Северного Кавказа, где они зачастую вызывают сильные наводнения, сели и оползни [3].

Литература

1. Веселова Г.К. Результаты испытания автоматизированного метода прогноза летних осадков с выделением областей с количеством осадков 15мм и более на текущий день по европейской части России / Г.К. Веселова, Э.В. Переходцева // Информационный сборник. — 1994. — № 22. — С. 31–36.

2. Переходцева Э.В. Гидродинамико-статистический метод прогноза сильных летних осадков по ЕТР на основе выходных данных региональной модели Гидрометцентра России / Э.В. Переходцева // Информационный сборник. — 2014. — Вып. 41. — С. 74–88.

3. Переходцева Э.В. О гидродинамико-статистическом прогнозе до двух суток явлений сильного ветра и сильных осадков для территории Северного Кавказа. / Э.В. Переходцева // Труды Гидрометцентра РФ. — 2012. — Вып. 347. — С. 113–125.

4. Переходцева Э.В. Оценка и сравнительный анализ гидродинамико-статистического прогноза сильных летних осадков с прогнозами зарубежных и отечественных моделей по станциям Центрального Федерального Округа / Э.В. Переходцева // Материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения». — 2014. — С. 136–137.

О ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ[1]

Г.Г. Петросян, М.С. Афанасова (Воронеж, ВГПУ)

garikpetrosyan@yandex.ru

Для полулинейного дифференциального включения дробного порядка в сепарабельном банаховом пространстве E:

$$^{C}D^{q}x(t) \in Ax(t) + F(t, x(t), x_t),\ t \in [0, T], \tag{1}$$

---

[1] Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках проектной части государственного задания (проект № 1.3464.2017 / 4.6).

с граничным условием:

$$x(0) = x(T) \tag{2}$$

где ${}^{C}D^{q}$ дробная производная Капуто порядка $q \in (0,1)$, $x_t(\theta) = x(t+\theta), \theta \in [-h,0], T > h > 0$, доказывается существоние интегральных решений при выполнении следующих и некоторых дополнительных условий:

(A) $A : D(A) \subseteq E \to E$ -линейный замкнутый оператор (не обязательно ограниченный), порождающий ограниченую C_0–полугруппу $\{U(t)\}_{t \geqslant 0}$,

на мультиоператор $F : [0,T] \times E \to Kv(E)$ накладываются следующие условия: $(F1)$ для всех $x \in E$ мультифункция $F\left(\cdot, x, x_t\right) : [0,T] \to Kv\left(E\right)$ допускает сильноизмеримое сечение;

$(F2)$ для п.в. $t \in [0,T]$ мультифункция $F(t,\cdot,\cdot) : E \to Kv\left(E\right)$ полунепрерывна сверху;

$(F3)$ существует функция $\alpha \in L^{\infty}_{+}([0,T])$ такая, что

$$\|F(t,x)\|_E \leqslant \alpha(t)(1 + \|x(t)\|_E + \|x_t\|_{C([-h,0];E)}) \text{ для п.в. } t \in [0,T],$$

$(F4)$ существует функция $\mu \in L^{\infty}([0,T])$ такая, что для любых ограниченных множеств $\Omega \subset E, \Delta \subset C([-h,0];E)$ выполняется:

$$\chi(F(t,\Omega)) \leqslant \mu(t)(\chi(\Omega) + \varphi(\Delta)),$$

для п.в.$t \in [0,T]$, где χ мера некомпактности Хаусдорфа в E, $\varphi(\Delta) = \sup_{-h \leqslant \theta \leqslant 0} \chi(\Delta(\theta))$, $\Delta(\theta) = \{y(\theta), y \in \Delta\}$, $\theta \in [-h,0]$.

Литература

1. Kamenskii M. On semilinear fractional order differential inclusions in banach spaces /M.I. Kamenskii, V.V. Obukhoskii, G.G. Petrosyan, J.C. Yao // Fixed Point Theory, 18(2017). — No. 1. — P. 269–292.

2. Kamenskii M.Boundary value problems for semilinear differential inclusions of fractional order in a Banach space / M.I. Kamenskii, V.V. Obukhoskii, G.G. Petrosyan, J.C. Yao // Applicable Analysis, Vol. 96 (2017)

3. Kamenskii M.I. On approximate solutions for a class of semilinear fractional-order differential equations in Banach spaces/M.I. Kamenskii, V.V. Obukhoskii, G.G. Petrosyan, J.C. Yao //Fixed Point Theory and Applications.2017.— P. 1–20.

4. Борисович Ю. Г. Введение в теорию многозначных оторбажений и дифференциальных включений / Ю. Г. Борисович, Б.Д. Гельман, А.Д. Мышкис, В.В. Обуховский. — М. : Книжный дом «Либроком», 2011. — 217 с.

5. Петросян Г.Г. О задаче Коши для дифференциального включения дробного порядка с нелинейным граничным условием / Г.Г. Петросян, М.С. Афанасова // Вестник ВГУ. Сер. : Физика. Математика. — 2017. — вып. 1.— С. 135–151.

6. Петросян Г.Г. Об одной теореме о слабой замкнутости суперпозиционного мультиоператора / Г.Г. Петросян // Вестник Тамбовского университета. Сер. : Естественные и технические науки. — 2015. — Т. 20, вып. 5. — С. 1355–1358.

7. Петросян Г.Г. О нелокальной задаче Коши для функционально-дифференциального уравнения с дробной производной в банаховом пространстве / Г.Г. Петросян // Вестник ВГУ. Сер. : Физика. Математика. — 2012 — № 2. — С. 207–2012.

8. Петросян Г.Г. On the structure of the solutions set of the Cauchy problem for a differential inclusions of fractional order in a Banach space / Г.Г. Петросян // Некоторые вопросы анализа, алгебры, геометрии и математического образования. — Воронеж, 2016. — С. 7–8.

АППРОКСИМАЦИЯ ДРОБНЫХ УРАВНЕНИЙ[1]

С.И. Пискарев (Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова)
piskarev@gmail.com

Известно, что свойство максимальной регулярности играет ключевую роль в решении различных типов уравнений в частных производных с помощью функционально-аналитических методов [1]. В [1] указано, что в пространстве $C_0^\gamma([0,T];E)$ аналитичность C_0-полугруппы эквивалентна максимальной регулярности (коэрцитивной разрешимости) задачи с уравнением первого порядка.

В то же время имеется большое количество работ, посвященных максимальной регулярности для дифференциальных уравнений второго порядка. В [2] авторы рассмотрели слабую максимальную регулярность для гиперболических дифференциальных уравнений второго порядка в пространствах $C^\gamma([0,T];E)$, $C([0,T];E^\theta)$ и $L^p([0,T];E^\theta)$, соответственно, где E^θ - интерполяционное пространство.

В последнее время дробные дифференциальные адачи стали одной из актуальных тем исследований из-за их широкого применения в области физики, техники, биологии и т. д.

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 17-51-53008 и 16-01-00039).

Мы исследуем коэрцитивность в пространстве $C_0^\gamma([0,T];E)$ для задачи Коши

$$\begin{cases} D^\beta u(s) = Au(s) + f(s), \quad 0 < s \leqslant T, \\ u(0) = u^0, \end{cases} \tag{1}$$

в абстрактном пространстве E, где оператор A является генератором аналитического разрешающего семейства, а D^β - дробная производная по Капуто с $\beta \in (0,1)$.

Литература

1. Ashyralyev A., Sobolevskii P. E. Well-posedness of parabolic difference equations / Operator Theory, vol. 69, Springer Basel, Boston, Berlin: Birkhauser, 1994.

2. A. Ashyralyev. On well-posedness of abstract hyperbolic problems in function spaces/ A. Ashyralyev, M. Martinez, J. Pastor, S. Piskarev // in Proceeding of the WSPC, pp. 679–688, 2009.

ВОССТАНОВЛЕНИЕ СХОДЯЩИХСЯ ДИСКРЕТНЫХ МАРТИНГАЛОВ

М.Г. Плотников (Вологда, ВоГУ, ВГМХА)

mgplotnikov@gmail.com

В работе [1] описаны множества единственности для рядов Хаара со степенной мажорантой частичных сумм, а в [2] — с произвольной мажорантой, удовлетворяющей некоторому естественному условию. В [1] также решалась задача о восстановлении рядов Хаара, сходящихся вне множеств единственности, по их сумме.

Частичные суммы рядов Хаара с номерами S_{2^k} можно рассматривать как мартингалы на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ с фильтром $\{F_k\}$. Хорошо известно (см., напр., [3]) что если мартингал (X_k) п.н. сходится к суммируемой случайной величине X, то $X_k \overset{\text{п.н.}}{=} \mathbf{E}\,(X|F_k)$ для всех k тогда и только тогда, когда мартингал (X_k) равномерно интегрируем. В [4] данный результат обобщен на мартингалы, сходящиеся к A-интегрируемым с.в.

Мы изучаем ряд задач восстановления мартингалов, заменяя, в духе теории единственности ортогональных рядов, сходимость п.н. на поточечную сходимость. При этом накладываются ограничения

на рост мартингалов, в стиле работ [1] и [2]. Наличие фильтра $\{F_k\}$ дает естественный способ наделить пробное множество Ω структурой топологического пространства. Тогда возможность восстановить мартингал по его пределу зависит от размера множества точек расходимости, а также от топологических свойств Ω.

Литература

1. Плотников М.Г. Квазимеры, хаусдорфовы p-меры и ряды Хаара и Уолша / М.Г. Плотников // Известия РАН. Сер. : матем. — 2010. — Т. 74, вып. 4. — С. 157–188.

2. Plotnikov M.G. Q-measures on the dyadic group and uniqueness sets for Haar series / M.G. Plotnikov // Methods of Fourier Analysis and Approximation Theory, eds.: M. Ruzhansky, S. Tikhonov. Ser. "Applied and Numerical Harmonic Analysis". — Basel : Springer International Publ. Switzerland, 2016. — P. 71–83.

3. Булинский А.В. Теория случайных процессов / А.В. Булинский, А.Н. Ширяев. — М. : Физматлит, 2005.

4. Skvortsov V.A. Martingale closure theorem for A-integrable martingal sequenses / V.A. Skvortsov // Real Anal. Exchange. — 1998–99. — V. 24, № 2. — P. 815–820.

УТОЧНЕНИЕ ДОСТАТОЧНОГО УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСИЯ В МОДЕЛИ МИГРАЦИЙ С ПРОИЗВОДСТВОМ[1]

И.П. Половинкин[1], М.В. Половинкина[2],
С.А. Рабееах[3] (Воронеж, [1,3]Воронежский государственный университет, [2]Воронежский государственный университет инженерных технологий)
polovinkin@yandex.ru

Рассмотрим в плоскости переменных x, y ограниченную область Ω с кусочно гладкой границей Γ и диаметром d. Рассмотрим в области Ω уравнение

$$\frac{\partial p}{\partial t} = p(1+\alpha(\beta p^2-p^3)-\gamma p)+\frac{1}{6}\Delta(\alpha(3\beta p^2-2p^3))+(\mathbf{u}+(p-\sigma)^2\mathbf{v})\cdot p, \quad (1)$$

где p – искомая функция, $p = p(x, y, t) \in C^2(\Omega) \bigcap C^1(\overline{\Omega})$ при каждом $t > 0$, $\Delta = \nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ – оператор Лапласа, $\alpha > 0$, $\beta >$

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16–06–00535)

$0,\ \gamma > 0,\ \mathbf{u}, \mathbf{v}$ – постоянные векторы, определяющие интенсивность и направление автономных компонентов перемещения. Уравнение (1) предложено Т.Пу [1] в качестве замены уравнения Хотеллинга для моделирования миграционных процессов с учетом воспроизводства ресурсов.

Пусть $\pi(x, y)$ – стационарное решение уравнения (1). Неравенство

$$1 + \alpha(3\beta\pi^2 - 4\pi^3) - 2\gamma\pi + (12\alpha\pi(\pi - \sigma)(\beta - \pi)\nabla\pi -$$

$$-(\pi - \sigma)\nabla(\pi - \sigma) - \nabla(\pi - \sigma)) \cdot \mathbf{v} - 3\mathbf{u} \cdot \nabla(\alpha\pi(\beta - \pi)) -$$

$$-\alpha\pi(\beta - \pi)/d^2 < 0$$

является достаточным условием устойчивости стационарного решения уравнения (1). Это условие является менее жестким, чем условие в [1], которое не содержит последнего слагаемого в левой части неравенства.

Литература

1. Пу Т. Нелинейная экономическая динамика / Т. Пу. – Ижевск: Издательский дом «Удмуртский университет», 2000. – 200 с.

ОБ ОДНОМ СЕМЕЙСТВЕ ОДНОРОДНЫХ РИМАНОВЫХ МЕТРИК

М.В. Половинкина (Воронеж, Воронежский государственный университет инженерных технологий)
polovinkina-marina@yandex.ru

Сингулярный B-эллиптический оператор (см. [1], [2]) вида

$$\Delta_B = \sum_{k=1}^{N} \left(\partial^2/\partial x_k^2 + \gamma_k/x_k\ \partial/\partial x_k\right) = x^\mu \Lambda_\omega,$$

содержащий в качестве слагаемых операторы Бесселя, с точностью до множителя $x^\mu = x_1^{\mu_1} \dots x_n^{\mu_N}$, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_N)$, $\mu_k = 2\gamma_k/(N-2)$, $k = 1, \dots, N$, $N \geqslant 3$, совпадает с оператором Лапласа-Бельтрами [3] Λ_ω в метрике

$$ds^2 = x^\mu \sum_{k=1}^{N} dx_k^2.$$

Здесь $\mu_1^2 + \cdots + \mu_N^2 > 0$, $x_k > 0$ при $\mu_k \neq 0$, $x_k \in R$ при $\mu_k = 0$.

Однопараметрическая группа с инфинитезимальным оператором [3]

$$\sum_{k=1}^{N} \xi_k(x)\partial/\partial x_k$$

может быть действующей во всем пространстве группой изометрий в этой метрике лишь в случае $\sum\limits_{k=1}^{N} \mu_k = -2$. При этом

$$\xi_k = Cx_k \prod_{s=1}^{N} x_s^{-2}.$$

При $\mu_k = 0, k = 1, \ldots, N-1, \mu_N = -2$, ds^2 — метрика Лобачевского.

Литература

1. Киприянов И.А. Сингулярные эллиптические краевые задачи / И.А. Киприянов. — М. : Наука, 1997.—199 с.

2. Ляхов Л.Н. В-гиперсингулярные интегралы и их приложения к описанию функциональных классов Киприянова и к интегральным уравнениям с В-потенциальными ядрами / Л.Н. Ляхов. — Липецк, 2007. — 232 с.

3. Ибрагимов Н Х. Группы преобразований в математической физике /Н.Х. Ибрагимов. — М. : Наука, 1983. — 280 с.

ОДНОРОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ СВЕРТКИ В ПРОСТРАНСТВАХ УЛЬТРАДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ НА ПРЯМОЙ

Д.А. Полякова (Ростов-на-Дону, ЮФУ;
Владикавказ, ЮМИ — филиал ВНЦ РАН)
forsites1@mail.ru

В работе исследуются однородные уравнения свертки

$$T_\mu f = 0 \tag{1}$$

в пространствах ультрадифференцируемых функций нормального типа на числовой прямой

$$\mathcal{E}^1_{(\omega)}(\mathbb{R}) = \Big\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}) \,:\, \forall q \in (0,1)\,, \forall l \in (0,\infty) \\ \sup_{j\in\mathbb{N}_0} \sup_{|x|\leqslant l} \frac{|f^{(j)}(x)|}{e^{q\varphi^*_\omega(j/q)}} < \infty \Big\}.$$

Здесь ω — весовая функция; φ^*_ω — сопряженная по Юнгу с $\omega(e^x)$; μ — символ оператора свертки T_μ, представляющий собой целую функцию с определенными ограничениями роста.

Уравнения (1) включают в себя как частный случай дифференциальные уравнения бесконечного порядка с постоянными коэффициентами $\sum_{k=0}^\infty a_k f^{(k)} = 0$ и некоторые разностные уравнения.

Последовательность $(\lambda_s)_{s=1}^\infty$ нулей символа μ порождает элементарные решения $(-ix)^k e^{-i\lambda_s x}$, $0 \leqslant k < k_s$, уравнения (1) (k_s — кратность нуля λ_s). В работе проведена специальная группировка нулей символа μ. На основании этого установлено, что в пространстве всех решений уравнения (1) имеется абсолютный базис, состоящий из линейных комбинаций элементарных решений, отвечающих сгруппированным нулям.

Несмотря на то, что методика подобных исследований достаточно хорошо известна, в процессе выполнения работы возникли новые интересные вопросы, связанные с теорией роста целых функций.

Полученные результаты вместе с результатами предшествующих работ позволяют выписать общее решение неоднородного уравнения свертки $T_\mu f = g$ в рассматриваемом пространстве.

ЯВЛЕНИЕ БУФЕРНОСТИ В МОДЕЛИ ДВУХ СИНАПТИЧЕСКИ СВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ НЕЙРОННОГО ТИПА[1]

М.М. Преображенская
(Ярославль, ЯрГУ им. П.Г. Демидова)
rita.preo@gmail.ru

Рассмотрим систему дифференциально-разностных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= [\lambda f(u_1(t-1)) + b\, g(u_2(t-h)) \ln(u_*/u_1)]u_1, \\ \dot{u}_2 &= [\lambda f(u_2(t-1)) + b\, g(u_1(t-h)) \ln(u_*/u_2)]u_2, \end{aligned} \qquad (1)$$

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-29-10055).

моделирующую поведение двух нейронов с запаздывающей синаптической связью. Эта феноменологическая модель основана на идее быстрой пороговой модуляции (fast threshold modulation) и является модификацией модели, предложенной в статье [1]. Отличие состоит в наличии запаздывания $h > 1$ в цепи связи. Здесь $u_1(t)$, $u_2(t) > 0$ — нормированные мембранные потенциалы нейронов; $\lambda \gg 1$ характеризует скорость протекания электрических процессов; $u_* = \exp(c\lambda)$ — пороговое значение, управляющее взаимодействием, $c = \text{const} \in \mathbb{R}$; $b = \text{const} > 0$. Функции $f(u), g(u) \in C^2(\mathbb{R}_+)$ таковы, что

$$f(0) = 1,\ g(0) = 0;\ \forall u > 0\ g(u) > 0; a > 0;\ \text{при } u \to +\infty$$
$$f(u) + a, g(u) - 1, uf'(u), u^2 f''(u), ug'(u), u^2 g''(u) = O\big(u^{-1}\big).$$

Выполним замену $u_j = \exp(\lambda x_j)$, $j = 1, 2$. Тогда в качестве предельного объекта при $\lambda \to +\infty$ получим релейную систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= R(x_1(t-1)) + b\,(c - x_1)H(x_2(t-h)), \\ \dot{x}_2 &= R(x_2(t-1)) + b\,(c - x_2)H(x_1(t-h)), \end{aligned} \tag{2}$$

$$R(x) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{при } x < 0, \\ -a & \text{при } x > 0, \end{cases} \qquad H(x) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 1 & \text{при } x > 0, \end{cases}$$

для которой удается обнаружить наличие явления *буферности.*

Определение 1. *Под буферностью понимаем наличие у динамической системы сколь угодно большого количества сосуществующих аттракторов с механизмом их накопления.*

В нашей работе обосновано следующее:

В пространстве параметров системы (2) существует область значений, для которых по любому n можно найти такое h, что в фазовом пространстве системы (2) сосуществует $n - 1$ устойчивое решение. При этом, компоненты $x_1(t)$ и $x_2(t)$ имеют соответственно m и $n - m$ $(m = 1, \dots, n-1)$ относительно коротких промежутков положительности, сменяющихся продолжительным промежутком отрицательности.

Для системы (1) численное моделирование с соответствующими начальными условиями также обнаруживает явление буферности.

В следствие экспоненциальной связи функций u_i и x_i, $i = 1, 2$, свойства решения, описанные в утверждении, означают, что $u_1(t)$ и $u_2(t)$ обладают m и $n - m$ всплесками соответственно. В нейродинамике такое поведение называют *bursting-эффектом.*

Определение 2. *Под bursting-эффектом подразумеваем чередование нескольких подряд идущих высокоамплитудных всплесков, сменяющихся асимптотически малыми значениями мембранного потенциала.*

Отметим, что полученные эффекты (буферность и bursting) возникают за счет запаздывания в цепи связи.

Литература

1. Глызин С.Д. Об одном способе математического моделирования химических синапсов / С.Д. Глызин, А.Ю. Колесов, Н.Х. Розов // Дифф. уравнения — 2013. — Т. 49, вып. 10. — С. 1227–1244.

ПРОИЗВОДЯЩАЯ ФУНКЦИЯ ЧИСЛА ЗАЯВОК СМО С ДИФФУЗИОННОЙ ИНТЕНСИВНОСТЬЮ ВХОДНОГО ПОТОКА И НУЛЕВЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ СНОСА

Д.Б. Прокопьева, Т.А. Жук, Н.И. Головко
(Владивосток, ДФУ)
prokopievad@yandex.ru, Tatyana_zhukdv@mail.ru,
ygolovko@yahoo.com

В качестве моделей информационных систем и их элементов применяются системы массового обслуживания. Статистический анализ потока заявок, поступающих на web-серверы, показывает диффузионный характер изменения интенсивности входного пуассоновского потока. В данной работе исследуется математическая модель СМО в виде системы уравнений относительно стационарных характеристик числа заявок в СМО с диффузионной интенсивностью входного потока. Получена краевая задача относительно вспомогательной производящей функции в стационарном режиме.

Рассмотрим систему массового обслуживания с одним обслуживающим прибором, с экспоненциальным обслуживанием с интенсивностью μ, бесконечной емкостью накопителя.

Обозначим через $q_k(x)$, $k \geqslant 0$, совместное стационарное распределение числа заявок ν и интенсивности λ входного потока в стационарном режиме: $q_k(x) = \mathsf{P}\{\nu = k, x \leqslant \lambda < x + dx\}/dx$.

В работе [1] приведена система дифференциальных уравнений относительно стационарных характеристик числа заявок $q_k(x)$. Для решения этой системы уравнений в данной работе рассмотрим вспо-

---

могательную неоднородную систему уравнений относительно неизвестных функций $g_k(x), k \in \mathbb{Z},\ \Upsilon(x)$:

$$-xg_0\,(x) + \mu g_1\,(x) + \frac{b}{2}q_0''\,(x) = \mu g_0 - xf(x), \quad \alpha < x < \beta,$$

$$xg_{k-1}\,(x) - (x+\mu)\,g_k\,(x) + \mu g_{k+1}\,(x) + \frac{b}{2}g_k''\,(x) = 0,\ -\infty < k \leqslant -2,$$

$$xg_{-2}(x) - (x+\mu)\,g_{-1}(x) + \mu g_0(x) + \frac{b}{2}g_{-1}''(x) = \mu\Upsilon(x),\ k=-1,$$

$$xg_{-1}(x) - (x+\mu)\,g_0(x) + \mu g_1(x) + \frac{b}{2}g_0''(x) = -xf(x),\ k=0,$$

$$xg_{k-1}\,(x) - (x+\mu)\,g_k\,(x) + \mu g_{k+1}\,(x) + \frac{b}{2}g_k''\,(x) = 0,\ 1 \leqslant k < \infty,$$

с краевыми условиями $g_k'(x_i) = 0, \quad x_1 = \alpha, \quad x_2 = \beta,\ -\infty < k < \infty.$

Для решения данной краевой задачи введем вспомогательную производящую функцию [2]:

$$F(x,z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k(x)z^k, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Неоднородная краевая задача относительно производящей функции $F(x,z)$ имеет вид:

$$F_{xx}''(x,z) - h\left(x - \frac{\mu}{z}\right)F(x,z) = \Psi(x,z),$$

где $h = \frac{2}{b}(1-z)$, $\Psi(x,z) = \frac{2}{b}\left[\frac{\mu}{z}\Upsilon(x) - xf(x)\right]$.

$$\partial F(x_i,z)/\partial x = 0, \quad x_1 = \alpha, \quad x_2 = \beta.$$

Литература

1. Прокопьева Д.Б. Вывод уравнений для систем массового обслуживания с диффузионной интенсивностью входного потока и нулевым коэффициентом сноса / Д.Б. Прокопьева, Т.А. Жук, Н.И. Головко // Известия КГТУ. — 2017. — № 46. — С. 184–193.

2. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания / — М. : Машиностроение. — 1979. — 432 с.

ПОСТРОЕНИЕ УПРАВЛЕНИЯ В ФОРМЕ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Е.В. Раецкая (Воронеж, ВГЛТУ им .Г.Ф. Морозова)
raetskay@inbox.ru

Рассматривается линейная стационарная динамическая система

$$\dot{x}(t) = B(t)x(t) + D(t)u(t), \tag{1}$$

где $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^m$,, $B(t)$ и $D(t)$ – матрицы соответствующих размеров, $t \in [t_0, t_k]$.

Здесь $x(t)$ — вектор-функция состояния системы, $u(t)$ — управляющая вектор-функция, управление.

Для полностью управляемой системы (1) разработан алгоритм построения управления в виде обратной связи, позволяющей повысить устойчивость системы за счет размещения характеристических полюсов замкнутого контура в левой полуплоскости. Алгоритм предполагает поэтапный переход к эквивалентным системам в подпространствах и за счет конечномерности пространств полностью реализуется за конечное (не превышающее размерности исходного пространства) число шагов ([1]–[4]). Выявляются свойства матричных коэффициентов, обеспечивающие возможность замыкания системы обратной связью; строятся функция состояния и управление в виде обратной связи.

Литература

1. Raetskaya E. V. Construction of Controls Providing the Desired Output of the Completely Observed Dynamic System / S.P. Zubova, E.V. Raetskaya // Automotion and Remote Control. — 2018. — Vol. 79, № 5. — P. 3–23.

2. Раецкая Е. В. Исследование сингулярно возмущенной системы управления/ С. П. Зубова, Е. В. Раецкая // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. — 2018. — Т. 23, № 122. — С. 303–308.

3. Raetskaya E. V. Algorithm to Solve Linear Multipoint Problems of Control by the Method of Cascade Decomposition / S. P. Zubova, E. V. Raetskaya // Automotion and Remote Control. — 2017. — Vol. 78, № 7. — pp. 1189–1202.

---

4. Raetskaya E. V. Solution of the Caushy Problem for Two Descriptive Equations with Fredholm Operator / S. P. Zubova, E. V. Raetskaya // Doklady Mathematics. — 2014. — Vol. 90, No. 3. — pp. 528–532.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ

К.А. Раецкий (Воронеж, ВГУ)
raetskiy@mail.ru

При решении некоторых задач управления линейными динамическими системами эффективно использование функций $\varphi(t)$, $t \in [t_0, t_k]$, таких, что производные некоторых порядков от этой функции являются линейно независимыми. Необходимость таких функций возникает, например, при решении задачи управления для системы с дополнительной известной входной функцией $f(t)$:

$$\frac{dx(t)}{dt} = Bx(t) + Du(t) + f(t),\ x(t_i) = x_i,\ i = \overline{0, k}, \tag{1}$$

где $x(t), f(t) \in R^n$, $u(t) \in R^m$; A, B — матрицы соответствующих размеров, $t_0 < t_1 < ... < t_k$.

Введем понятие класса функций ЛНП-k.

Функция $\varphi(t)$ принадлежит классу ЛНП-k на $[t_0, t_k]$, если сама функция $\varphi(t)$, и её производные до $k-1$-го порядка включительно являются линейно независимыми.

К примеру, $cost \in$ ЛНП-2, t^{n-1} $\in$ЛНП-n на любом отрезке.

Теорема 1. *Для любой n раз дифференцируемой функции $f(t)$ существует функция $\varphi(t) \in$ ЛНП-$(n+1)$ такая, что $f(t)$ представима на $[t_0, t_k]$ с определенной точностью в виде линейной комбинации функции $\varphi(t)$ и ее производных до $(n+1)$-го порядка.*

К примеру, $cost$ представим в виде линейной комбинации производных от функции $(1+t)^{-1}$ с любой точностью на любом отрезке.

Литература

1. Красовский Н Н. Теория управления движением / Н. Н. Красовский. — М. : Наука, 1968. — 476 с.

1. Крутько П. Д. Обратные задачи динамики управляемых систем. Линейные модели / П. Д. Крутько. — М. : Наука, 1987. — 304 с.

---

2. Раецкий К. А. К методу неопределенных коэффициентов решения задач управления / К. А. Раецкий // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика : сборник научных трудов по материалам Международной заочной научно-практической конференции. — Воронеж : ИПЦ «Научная книга», 2015. — № 5, ч. 2 (16-2). — С. 39–41.

МЕТОДЫ ИДЕНТИФИКАЦИИ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ИНТЕНСИВНОСТИ ЛАЗЕРНЫХ ПУЧКОВ ДЛЯ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПАРАМЕТРАМИ ЛАЗЕРА

А.М. Райцин (Москва, МТУСИ)
arcadiyram@rambler.ru

Для успешной работы оптико-электронных систем с применением лазеров необходимо иметь лазерный пучок с пространственным распределением интенсивности (РИ) в его поперечном сечении, близким к Гауссу (основная мода ТЕМоо). Такие лазерные пучки имеют самый малый дифракционный угол расходимости, что важно при их практическом использовании.

В связи с этим, для разработчиков лазеров и систем на их основе важной задачей является необходимость идентификации пространственного РИ излучения в поперечном сечении пучка, а, именно, определение сходства его РИ с распределением Гаусса («эталонное» РИ) и получение информации для оптимального управления параметрами лазера с целью дальнейшей корректировки РИ. В [1] рассмотрен такой метод, основанный на применении функционала – логарифмического момента, принимающего максимальное значение для РИ Гаусса, и являющийся альтернативой известной стандартизованной характеристике M^2 [2], практическая реализация которой является более сложной.

В данной работе рассматривается новая характеристика для идентификации РИ, основанная на применении интегрального неравенства Коши–Буняковского, позволяющая рассматривать более широкий класс «эталонных» РИ.

Рассмотрим интегрируемое на $(-L; L)$ по координате x идентифицируемое РИ $I\left(x, y, z\right)$ в заданном поперечном сечении лазерного пучка $z = z_0$ при фиксированной координате $y = y_0$ (одномерный

случай), $I\left(x,y,z_0\right) = I\left(x,y_0,z_0\right) = I\left(x\right)$, а также «эталонное» РИ $\Psi\left(x\right)$, интегрируемое на том же промежутке.

Тогда справедливо неравенство Коши – Буняковского

$$\left(\int\limits_{-L}^{L} I\left(x\right)\Psi\left(x\right)dx\right)^2 \leqslant \int\limits_{-L}^{L} I^2\left(x\right)dx \cdot \int\limits_{-L}^{L} \psi^2\left(x\right)dx.$$

Введем меру δ сходства идентифицируемого РИ с «эталонным»

$$\delta = \frac{\left(\int\limits_{-L}^{L} I\left(x\right)\Psi\left(x\right)dx\right)^2}{\int\limits_{-L}^{L} I^2\left(x\right)dx \cdot \int\limits_{-L}^{L} \psi^2\left(x\right)dx} \leqslant 1,$$

где РИ $I\left(x\right)$,$\Psi\left(x\right) > 0$.

Очевидно, что $0 \leqslant \delta \leqslant 1$. Равенство $\delta = 1$ достигается, когда $I\left(x\right) = \lambda\Psi\left(x\right)$,$\lambda \in R$, т.е. при совпадении с точностью до λ идентифицируемого и «эталонного» РИ.

Так, для «эталонного» РИ Гаусса $\Psi\left(x\right) = S^{(x/L)^2}$,принимающего на границах промежутка $-L$ и L значение S, мера δ имеет вид

$$\delta = \frac{\sqrt{-2\,\mathrm{lnS}\,/\pi}\left(\int\limits_{-L}^{L} I(x)\Psi(x)dx\right)^2}{L\,\mathrm{erf}\left(\sqrt{-2\pi\ln S}\right)\int\limits_{-L}^{L} I^2(x)dx}.$$

Мера δ позволяет определять степень сходства идентифицируемого РИ также с модами резонатора лазера высших порядков путем задания соответствующего «эталонного» РИ $\Psi\left(x\right)$в виде полинома Эрмита.

Управление параметрами резонатора лазера, изменяющих РИ на его выходе, производится с одновременным контролем приближения меры δ к единице.

Литература

1. Raitsin A.M. Application of the Logarithmic Moment of an Intensity D istribution as an Alternative to the Dispersion Coefficient of a Laser Beam / A.M. Raitsin, M.V. Ulanovskii // Measurement Techniques, 2015. — Vol. 58. — Issue 6. — P. 630–633.

2. ГОСТ Р ИСО 11146–2008. Лазеры и лазерные установки (системы). Методы измерений ширин, углов расходимости и коэффициентов распространения лазерных пучков. Ч. 1. — М. : Стандартинформ, 2010.

ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С СИЛЬНЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ В МЛАДШИХ КОЭФФИЦИЕНТАХ

А.Б. Расулов, Ю.С. Федоров, А.М. Сергеева
(Москва, НИУ МЭИ)
rasulovab@mpei.ru, FedorovYS@mpei.ru, hmelevs@ya.ru

Пусть область D содержит множество сверхсингулярных точек $z_0 = 0,\ z = z_j \neq 0, j = \overline{1,m}$ и ограничена простым ляпуновским контуром Γ ориентированным против часовой стрелки. Удобно положить $D_0 = D \setminus \{z_0, z_1, z_2, ..., z_m\}$ и $D_\varepsilon = D \cap \{\Sigma_0^m |z - z_j| > \varepsilon\}$ с малым $\varepsilon > 0$ и пусть для краткости

$$\rho_j(z) = (\bar{z} - \bar{z_j})|z - z_j|^{n_j - 1},\ n_j > 1; \quad \rho_0(z) = |z|^m,\ 0 < m < 2. \quad (1)$$

В области D_0 рассмотрим уравнение Бицадзе с сингулярными коэффициентами следующего специального вида:

$$u_{\bar{z}\bar{z}} + \sum_{j=1}^{m} \frac{a_j}{\rho_j} u_{\bar{z}} + \frac{a_0}{\Pi_1^m \rho_j} u + \frac{b}{\rho_0} \bar{u} = f, \qquad (2)$$

где $a_j, b \in C(\overline{G}),\ j = \overline{0,m}$ и $a_0 = -(AB + B^2) \prod_1^m \rho_j$ с некоторой функцией $B(z) \in C(\overline{G})$, аналитической в области D. Под его решением понимается функция $u \in C(\overline{D_0}) \cap C^1(D_0)$, допускающая вторую обобщенную производную по $\overline{z}$ из класса $L^p(D_\varepsilon)$ для любого $\varepsilon > 0$.

Для этого уравнения найдено интегральное представление общего решения через двух произвольных аналитических функций[1] и поставлена задача Римана – Гильберта. С помощью представления общего решения уравнения (2), эта задача будет редуцирована к последовательному решению двух задач Римана – Гильберта для аналитических функций.

Литература

1. Солдатов А.П. Уравнение Бицадзе с сильными особенностями в младших коэффициентах / А.П. Солдатов, А.Б. Расулов // Дифференциальные уравнения. — 2018. — Т. 54, № 2. — С. 238–248.

ОБ ОДНОМ УСЛОВИИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ СИГНАЛА БЕЗ ФАЗ

Д.А. Рогач (Самара, Самарский университет)
ida@ssau.ru

В работе рассматривается пространство $H = \mathbb{C}^M$ со скалярным произведением $\langle x, y\rangle = \sum\limits_{n=1}^{N} x_n \bar{y_n}$ и его подмножество $F = \{f_1, ..., f_N\} \subset H$, $N > M$, которое является фреймом, если $\exists$ $0 < A \leqslant B < \infty$, такие что для любого вектора $x \in H$ справедливо:

$$A\|x\|^2 \leqslant \sum_{n=1}^{N} |\langle x, f_n\rangle|^2 \leqslant B\|x\|^2.$$

Фрейм F будем называть восстанавливающим без фаз (ВБФ)-фреймом, если нелинейное отображение $\beta : \hat{H} \to \mathbb{R}^N$, $(\beta(\hat{x}))_n = |\langle x, f_n\rangle|^2$, $1 \leqslant n \leqslant N$ инъективно.

В пространстве $\mathbb{R}^M$ найдено необходимое и достаточное условие ВБФ-фрейма, так называемое условие альтернативной полноты, достаточно удобное для проверки. В пространстве $\mathbb{C}^M$ аналогичное условие неизвестно.

В работах R.Balan [2] доказана

Теорема. *F — восстанавливающий без фаз тогда и только тогда, когда для $\forall x, y \in H$ существует $a > 0$ такое, что*

$$\sum_{m=1}^{M} \Big| |\langle x, f_m\rangle|^2 - |\langle y, f_m\rangle|^2 \Big|^2 \geqslant a\Big(\|x - y\|^2\|x + y\|^2 - 4(imag(\langle x, y\rangle))^2\Big).$$

Показаны примеры применения предложенного критерия.

Литература

1. Новиков С.Я. Фреймы конечномерных пространств / С.Я. Новиков, М.А. Лихобабенко. — УОП СамГУ, 2013. — С. 5–24.

2. Balan R. Reconstruction of Signals from Magnitudes of Redundant Representations : The Complex Case / R. Balan. online : arXiv:1304.1839v1 [math.FA] (19.11.2018)

НЕКОТОРЫЕ ДОПОЛНЕНИЯ К ТЕОРИИ НАДЕЖНОСТИ ШЕННОНА–МУРА

В.А. Родин, С.В. Синегубов (Воронеж, ВИ МВД РФ)
rodin_v@mail.ru, sinusdvm@mail.ru

П1. Теоретические первоначальные исследования возможностей управления надежностью сложных систем принадлежат Дж. Фон Нейману. Используя теорему о неподвижной точке Э. Мур и К. Шеннон [2] на примере системы релейных сетей показали, что из реле недостаточной надежности можно создать сеть с заданной надежностью.

Определение. *Под надежностью элемента будем понимать вероятность его безотказной работы за время* t *не меньшее, чем фиксированное время* T: $p = P(t \geqslant T)$. *Рассматриваются одинаковые элементы с одним и тем же временным ограничением* T. *Указанные элементы объединяются в различные структуры. Надежность этих структур будем обозначать функциями* $H(p)$ *с разными индексами. Надежность данных структур зависит от* p, *числа элементов в структуре и способа организации структуры.*

П2. Предположим, что последовательно-параллельная структура (ППС) содержит n последовательно соединенных блоков, содержащих $k(n)$ параллельно соединенных элементов с одинаковой надежностью p (Рис.1). Надежность такой системы вычисляется по формуле $H_1(p,n) = \left[1-(1-p)^{k(n)}\right]^n$.

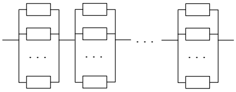

Рис. 1: n – число последовательно соединенных блоков, $k(n)$ – число параллельно соединенных элементов

Теорема 1. *1) Если* $\lim\limits_{n\to\infty} log_2 n/k(n) = \infty$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty} H_1(p,n) = 0$.

2) Если $\lim\limits_{n\to\infty} log_2 n/k(n) = 0$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty} H_1(p,n) = 1$.

3) Если $\lim\limits_{n\to\infty} log_2 n/k(n) = C$, *и* $C > 0$, *то имеют место следующие возможности, характеризующие поведение функции надежности системы:*

3.1) если $C > -log_2(1-p)$, *то* $H_1(p,n) \to 0$ *при* $n \to \infty$;

3.2) если $C < -log_2(1-p)$, *то* $H_1(p,n) \to 1$ *при* $n \to \infty$.

4) Для любых $\alpha > 0$ *и* $p \in (0{,}1)$ *можно так выбрать соотношение размеров* $k(n)$ *и* n, *что* $\lim\limits_{n\to\infty} H_1(p,n) = exp(-\alpha)$.

П3. Предположим теперь, что ППС содержит в каждой параллельной линии n последовательно соединенных элементов с надежностью p. Вся сеть состоит из $k(n)$ таких параллельно соединенных линий (Рис.2). Надежность такой системы вычисляется по формуле $H_2(p,n) = 1 - (1-p^n)^{k(n)}$.

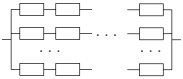

Рис. 2: n – число последовательно соединенных элементов, $k(n)$ – число параллельно соединенных блоков

Теорема 2. *1) Если* $\lim\limits_{n\to\infty} log_2 k(n)/n = 0$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty} H_2(p,n) = 0$.

2) Если $\lim\limits_{n\to\infty} log_2 k(n)/n = \infty$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty} H_2(p,n) = 1$.

3) Если $\lim\limits_{n\to\infty} log_2 k(n)/n = C$, *и* $C > 0$, *то имеют место следующие возможности, характеризующие поведение функции надежности системы:*

3.1) если $p < 2^{-C}$, *то* $H_2(p,n) \to 0$ *при* $n \to \infty$;

3.2) если $p > 2^{-C}$, *то* $H_2(p,n) \to 1$ *при* $n \to \infty$.

4) Для любых $\alpha > 0$ *и* $p \in (0{,}1)$ *можно так выбрать соотношение размеров* $k(n)$ *и* n, *что* $\lim\limits_{n\to\infty} H_2(p,n) = 1 - exp(-\alpha)$.

П4. В докладе также рассмотрена возможность повышения надежности сложных систем образованных самоподобным размножением простых модулей.

Литература

1. Нейман Дж. Вероятностная логика и синтез надежных организмов из ненадежных компонентов / Дж. Нейман. — М. : Иностранная литература, 1956.

2. Moore E.E. Reliable circuits using less reliable relays / E.E. Moore, C.E. Shannon. — Y. of the Franklin Institute, 1956. — C. 191–208.

3. Родин В.А. Анализ надежности некоторых специальных систем большой размерности / В.А. Родин, С.В. Синегубов // Вестник Воронежского института МВД РФ. —1998. —С. 12–14.

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С ИНВОЛЮЦИЕЙ В УСЛОВИЯХ СУММИРУЕМОГО ПОТЕНЦИАЛА[1]

Е.Ю. Романова (Воронеж, ВГУ)
vsu.romanova@gmail.com

Рассматривается линейный оператор $L : D(L) \subset L_p([0,\omega],\mathbb{C}) \to L_p([0,\omega],\mathbb{C})$, порожденный дифференциальным выражением $l(y) = y'(x) - Q(x)y(\omega - x), x \in [0,\omega], Q \in L_1([0,\omega],\mathbb{C})$, с областью определения $y \in D(L) = \{y \in W_p^1([0,\omega],\mathbb{C}) : y(0) = y(\omega)\}$, где $W_p^1([0,\omega],\mathbb{C}) = \{y \in L_p([0,\omega],\mathbb{C}), p \geqslant 1 : y$ абсолютно непрерывна и $\dot{y} \in L_p([0,\omega],\mathbb{C})\}$ — пространство Соболева. Тогда изучаемый оператор L представим в виде $Ly = L^0y - Vy$, где $(L^0y)(x) = y'(x)$ будем называть свободным оператором, играющим роль невозмущенного оператора, а $(Vy)(x) = Q(x)y(\omega - x), x \in [0,\omega], y \in L_p([0,\omega],\mathbb{C})$ — возмущением.

Теорема 1. *Дифференциальный оператор L является оператором с компактной резольвентой и существует такая нумерация собственных значений, что* $\sigma(L)$ *представим в виде* $\sigma(L) = \sigma_{(m)} \bigcup (\bigcup\limits_{|n| \geqslant m+1} \sigma_n)$, *где* $\sigma_{(m)}$ — *конечное множество,* $\sigma_n, \mid n \mid \geqslant m+1$, *определяются равенствами* $\sigma_n = \{i\frac{2\pi n}{\omega} + \alpha_n^{\pm}\}$, $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \alpha_n^{\pm} = 0$.

Пусть $\widetilde{P}_{(m)}, \widetilde{P}_n, \sigma_n, \mid n \mid \geqslant m+1$, — спектральные проекторы Рисса, построенные по оператору L и множествам $\sigma_{(m)}, \sigma_n, \mid n \mid \geqslant m+1$, соответственно.

Теорема 2. *Имеет место равносходимость спектральных разложений операторов L и* L^0*:* $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \parallel \widetilde{P}_n - P_n \parallel = 0$,

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \left\| \widetilde{P}_{(m)} + \sum_{|k|=m+1}^{n} (1 - \frac{|k|}{n})\widetilde{P}_k - P_{(m)} - \sum_{|k|=m+1}^{n} (1 - \frac{|k|}{n})P_k \right\| = 0.$$

Литература

1. Baskakov A.G. Spectral analysis of a differential operator with an involution / A.G. Baskakov, I.A. Krishtal, E.Yu. Romanova // Journal of Evolution Equations. — 2017. — V.17. — P. 669–684.

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-31-00354).

КРАТНАЯ ПОЛНОТА КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ ОДНОГО КЛАССА НЕРЕГУЛЯРНЫХ ПУЧКОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В.С. Рыхлов (Саратов, СГУ)
rykhlovvs@yandex.ru

В $L_2[0,1]$ рассмотрим пучок операторов $L(\lambda)$

$$\sum_{j+s=n} p_{js}\lambda^s y^{(j)}, \quad p_{js} \in \mathbb{C}, \quad p_{n0} \neq 0, \quad p_{0n} \neq 0, \tag{1}$$

$$\sum_{j+s=\varkappa_i} \lambda^s \alpha_{ijs} y^{(j)}(0) = 0,\ i = \overline{1,l},\ \sum_{j+s=\varkappa_i} \lambda^s \beta_{ijs} y^{(j)}(1) = 0,\ i = \overline{l+1,n}, \tag{2}$$

где λ, α_{ijs}, $\beta_{ijs} \in \mathbb{C}$, $\varkappa_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $1 \leqslant l \leqslant n-1$.

Далее используем понятия и определения из [1].

Пусть корни $\omega_1, \ldots, \omega_n$ характеристического уравнения различны, отличны от нуля и лежат на двух лучах, исходящих из начала, в количествах k и $n-k$ $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$. Считаем, не нарушая общности, что $n-k < k$.

Кратная полнота к.ф. пучка (1)–(2) исследовалась в [2]. Отмечено, что при $n-k < l < k$ используемое доказательство не проходит.

Применяя подход, предложенный в [1], удалось получить достаточные условия кратной полноты и в этом случае.

Теорема 1. *Пусть $n-k < l < k$ и характеристический многоугольник M_Δ пучка $L(\lambda)$ касается отрезков $[0, \omega_1 + \cdots + \omega_k]$ и $[\omega_{k+1} + \cdots + \omega_n, \omega_1 + \cdots + \omega_n]$. Тогда система к.ф. пучка $L(\lambda)$ $n-k$-кратно полна в $L_2[0,1]$ с возможным конечным дефектом.*

Литература

1. Рыхлов В.С. О полноте корневых функций полиномиальных пучков обыкновенных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами / В.С. Рыхлов // ТВИМ. — 2015. — № 1(26). — С. 69–86.

2. Рыхлов В.С. Достаточные условия кратной полноты корневых функций одного класса пучков дифференциальных операторов / В.С. Рыхлов // Современные методы теории краевых задач : материалы Межд. конф., посв. 90-летию В.А. Ильина. — М. : МАКС Пресс, 2018. — С. 192–194.

РОССИЙСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ В КОНТЕКСТЕ ДУХОВНО-НРАВСТВЕННОЙ КУЛЬТУРЫ

О.А. Саввина, Р.А. Мельников
(Елец, ЕГУ им. И.А. Бунина)
oas5@mail.ru

Распространено мнение, что точные науки и математическое образование мало коррелируют с духовно-нравственной культурой. Это не так. Влияние математического образования на духовно-нравственную культуру осуществляется как с помощью создания специальных условий в преподавании математики, так и путем раскрытия сущности и изучения самой математики как систематической науки.

В советское и раннее постсоветское время нравственная (и духовнонравственная) культура понимались вне связи с религией, отечественной православной традицией. Такой узкий подход к определению духовно-нравственной культуры не всегда давал положительные результаты, приводил к искажениям. До настоящего времени не решены проблемы формализма в математическом образовании.

Решение задач воспитания духовно-нравственной культуры предполагает тщательный отбор содержания, форм и методов обучения математике и пр. Так, в целеполагании уроков (занятий) по математике, например, следует обращать внимание на то, какой смысл заключен в изучаемом факте, главным должен стать на поиск ответов на вопрос «почему?», а не на вопрос «как?». В отборе содержания материала следует обращать внимание на фабулу текстовых задач, на то, какой воспитательный смысл содержится в их формулировках. Недопустимо использовать в текстах задач ситуации с азартными играми (карты, кости и пр. в теории вероятностей), пропагандирующие безнравственные нормы поведения и пр.

Однако задачи воспитания духовно-нравственной культуры решаются не только за счет создания особых педагогических условий в процессе обучения математике, но и благодаря использованию развивающего потенциала самой математики-науки.

Святитель Игнатий Брянчанинов писал: «Многие, признающие себя сведущими в философии, но не знакомые с математикою и

естественными науками, встречая в сочинениях материалистов произвольные мечты и гипотезы, никак не могут отличить их от знаний, составляющих собственность науки, никак не могут дать удовлетворительного отзыва и опровержения на самый нелепый бред какого-либо мечтателя, очень часто сами увлекаются этим бредом в заблуждение, признав его доказанною истиною» [1].

Современный человек оказывается в водовороте многочисленных соблазнов и потоков информации, как позитивного, так и деструктивного характера. Это интернет- и медиаресурсы, продвигающие идеи гедонизма, агрессии, оккультизма, засорение научного контента абсурдными текстами, псевдонаучными идеями.

Распознать абсурд, разобраться в том, что является мусорной информацией, или, по словам прот. Геннадия Заридзе «тьмой отбросов, засоряющей мозги», а что полезным (в т.ч. и душеполезным) знанием, отделить зерна от плевел может лишь человек, обладающий критическим мышлением. Эту способность формирует математическое образование.

Математика учит любить правду, искать истину. В ней нет разных точек зрения на один и тот же объект, а значит, легче обнаружить ошибку или ложь. Аксиоматический метод вносит определенность, позволяет легче увидеть ошибку, исключить ложь. Использование аксиоматического метода позволяет видеть мир не как случайное сочетание стихий, идущее к разрушению, а как свидетельство о Боге, который так премудро все устроил.

Изучение математики (как системы научных знаний) непременно формирует логическое мышление, включая умения анализировать, синтезировать, обобщать, связывать суждения, правильно устанавливать силлогизмы и строить умозаключения.

Метафизический подход к математическому образованию предполагает поиск не нового, а вечного, а в иерархии ценностей образования провозглашает любовь. А.А. Остапенко и Т.А. Хагуров пишут: «Ключевая роль образования состоит отнюдь не в передаче пресловутых ЗУНов или компетенций», а в том, чтобы передать «правильное отношение к знаниям, деятельности и людям. И правильное отношение есть любовь…

Если нам удается ее взрастить, то у выпускника формируется любовь к знаниям (любознательность), любовь к деятельности (трудолюбие), любовь к людям (человеколюбие) и жизни (жизнелюбие). Если любовь в образовании иссякает, тогда эффективный и конкурентный экономист разрабатывает совершенные коррупционные схемы, компетентный юрист работает на мафию...» [2, с. 27].

Невысокий уровень математической подготовки и духовно-нравственной культуры специалистов, связанных с IT-технологиями, специалистов, работа которых сопряжена со знанием сложных технологических процессов, может привести к катастрофам (например, падение самолетов, аварии на АЭС и т.п.).

Традиции математического образования в России складывались веками, содержание учебного предмета «математика» при этом отшлифовывалось, дорабатывалось и систематизировалось, отметалось ненужное и оставалось лишь то, что принималось в образовательной практике. *Учебный предмет «математика» является одновременно и целью и средством образования при выполнении необходимого условия — если этот предмет представлен систематическими курсами.* В процессе изучения математики как систематической науки подспудно воспитывается логическое мышление (качество ума), которое в сочетании с любовью (качеством сердца) являются необходимыми условиями для формирования духовно-нравственной культуры.

Литература

1. Брянчанинов И. Полное собрание творений / И. Брянчанинов. — М. : Паломник. — 2006. — Т. 3. — 607 с.

2. Хагуров Т.А. Что мы теряем, превращая образование в подготовку и услугу? / Т.А. Хагуров, А.А. Остапенко // Образовательные технологии. — 2011. — № 4. — С. 27.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ УПРУГОГО СТЕРЖНЯ С ПРИСОЕДИНЁННЫМИ ГРУЗАМИ[1]

А.А. Самсонов, П.С. Соловьёв, С.И. Соловьёв,
Д.М. Коростелева (Казань, КФУ, КГЭУ)
anton.samsonov.kpfu@mail.ru

Рассматривается задача о продольных собственных колебаниях закреплённого в граничных точках упругого неоднородного стержня переменного сечения с двумя грузами, присоединнёнными во

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Республики Татарстан в рамках научного проекта № 18-41-160029. Работа поддержана РФФИ (проект № 19-01-00258).

внутренних точках стержня. Математическая постановка задачи сводится к нахождению собственных значений и собственных функций обыкновенной дифференциальной задачи на собственные значения второго порядка с однородными граничными условиями Дирихле и дополнительными условиями сопряжения в точках присоединения грузов. Эти дополнительные условия включают условия непрерывности стержня в точках присоединения грузов и уравнения движения грузов при собственном колебании. Дифференциальная задача записывается как симметричная вариационная задача на собственные значения положительно определённой ограниченной билинейной формы относительно положительной вполне непрерывной билинейной формы в вещественном бесконечномерном гильбертовом пространстве. Исследуются предельные свойства задачи при увеличении масс присоединённых грузов. Полученные результаты развивают и обобщают результаты работ [1–3].

Литература

1. Соловьёв С.И. Нелинейные задачи на собственные значения. Приближённые методы. / С.И. Соловьёв. — Saarbrücken : LAP Lambert Academic Publishing, 2011. — 256 с.

2. Соловьёв С.И. Аппроксимация нелинейных спектральных задач в гильбертовом пространстве / С.И. Соловьёв // Дифференциальные уравнения. — 2015. — Т. 51, № 7. — С. 937–950.

3. Соловьёв С.И. Собственные колебания стержня с упруго присоединённым грузом / С.И. Соловьёв // Дифференциальные уравнения. — 2017. — Т. 53, № 3. — С. 418–432.

КВАЗИИНВАРИАНТНЫЕ ПОДМНОГООБРАЗИЯ И РЕДУКЦИЯ ЛЯПУНОВА–ШМИДТА

Т.Ю. Сапронова (Воронеж, ВГУ)
tsapr@mail.ru

Изучение экстремалей и многообразий уровней гладкого фредгольмова функционала на банаховом многообразии часто можно осуществлять, перейдя к сужению функционала на квазиинвариантное подмногообразие. Квазиинвариантные подмногообразия интересны тем, что критические точки сужения функционала на такое подмногообразие являются критическими и для функционала в целом (такое сужение представляет собой разновидность нелокальной конечномерной редукции).

---

1. Квазиинвариантные подмногообразия.

Пусть $J : N \longrightarrow R^1$ — гладкий функционал, N — гладкое банахово многообразие (без края), K — гладкое подмногообразие N. Подмногообразие K называется *квазиинвариантным*, если существует такая гладкая ретракция $p : O(K) \longrightarrow K$, где $O(K)$ — окрестность K в N, что каждая точка $a \in K$ является критической для сужения $J|_{p^{-1}(a)}$ (см. [1], [2]).

Пусть Ξ и Ξ_1 — модельные линейные банаховы пространства для N и K. Если K — квзиинвариантное подмногообразие N и подпространство Ξ_1 дополняемо (существует такое подпространство $\Xi_2 \subset \Xi$, что $\Xi = \Xi_1 \bigoplus \Xi_2$), то найдутся такие окрестность $\tilde{O}(K) \subset O(K)$ подмногообразия K в N и открытое множество $W \subset \Xi_2$, что четверка $(\tilde{O}(K), K, W, p)$ является гладким локально тривиальным расслоением с базой K, стандартным слоем W и проекцией p.

В случае, когда существует прямое дополнение Ξ_2 к Ξ_1, определение квазиинвариантного подмногообразия можно переформулировать следующим образом: подмногообразие K называется *квазиинвариантным*, если некоторая окрестность K в N гладко расслаивается над K и каждая точка $a \in K$ является критической точкой для сужения $J|_{p^{-1}(a)}$, p — проекция из K на N (см. [1], [2]).

Если каждая точка $a \in K$ является морсовской критической точкой для сужения $J|_{p^{-1}(a)}$, то K называется *морсовским квазиинвариантным подмногообразием.* Для всех точек связного морсовского квазиинвариантного подмногообразия K индекс Морса $J|_{p^{-1}(a)}$ будет постоянным, и это постоянное значение называется *индексом Морса квазиинвариантного подмногообразия* K (обозначается $Ind(J, K)$).

2. Нелокальная схема Ляпунова–Шмидта.

Пусть $f : E \longrightarrow F$ — гладкое фредгольмово нулевого индекса отображение банаховых пространств. Пусть f собственно (прообраз $f^{-1}(K)$ компактен для каждого компакта $K \subset F$) и потенциально:

$$\langle f(x), h\rangle \equiv \frac{\partial V}{\partial x}(x)h, \tag{1}$$

где V — гладкий функционал на E (потенциал отображения f), обладающий градиентной реализацией в тройке пространств $\{E, F, H\}$, $f = grad\, V$.

Если выполнено условие положительности (монотонности)

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x}(x)h, h \right\rangle > 0 \qquad \forall (x,h) \in E \times (E \setminus 0), \tag{2}$$

то уравнение

$$f(x) = 0 \tag{3}$$

однозначно разрешимо. Это верно в силу теоремы Банаха–Мазура–Каччиополи (см. [2]). Очевидно, что решение этого уравнения является и точкой глобального минимума V на E.

Если условие (2) заменить более слабым условием

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x}(x)h, h \right\rangle > 0 \qquad \forall (x,h) \in E \times (\tilde{E} \setminus 0), \tag{4}$$

где $\tilde{E} = E \cap N^{\perp}$, $N = Lin(e_1, \dots , e_n)$, $N^{\perp}$ — ортогональное дополнение к N в H, $e_1, \dots , e_n$ — некоторая ортонормированная в H система векторов в E, то можно определить (нелокально) *ключевую функцию*

$$W(\xi) := \inf_{x : \langle x, e_j \rangle = \xi_j \ \forall j} V(x), \qquad \xi = (\xi_1, \dots , \xi_n)^{\top}, \tag{5}$$

"отвечающую" за поведение функционала V. Условие собственности f можно ослабить, заменив его условием собственности при каждом ξ отображения

$$\tilde{f}(\cdot, \xi) : \tilde{E} \longrightarrow \tilde{F}, \tag{6}$$

где $\tilde{F} = F \cap N^{\perp}$,

$$\tilde{f}(v, \xi) := f(l(\xi) + v) - \sum_{j=1}^{n} \langle e_j, f(l(\xi) + v) \rangle e_j, \qquad l(\xi) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j.$$

При выполнении условий (4) и (6) уравнение

$$\tilde{f}(h, \xi) = 0 \tag{7}$$

однозначно разрешимо при всех ξ, и его решение $h(\xi)$ гладко зависит от ξ — по теореме о неявной функции. Из (4) следует, что

$$W(\xi) \equiv V(l(\xi) + h(\xi)). \tag{8}$$

Переход от V к W, определенной соотношением (5) (или (8)), аналогичен редукции Пуанкаре в конечномерном случае.

Маргинальное отображение $\varphi : \xi \mapsto l(\xi) + h(\xi)$, где $h(\xi)$ определено уравнением (7), устанавливает взаимно однозначное соответствие между критическими точками ключевой функции (5) и функционала V. При этом соответствии невырожденные критические точки переходят в невырожденные критические точки с сохранением значений индексов Морса (см. [2]).

Заметим, что множество $K = \{\varphi(\xi) | \, \xi \in \mathbb{R}^n\}$ является квазиинвариантным подмногообразием (для функционала V). Действительно, в данном случае $O(K) = E$, а ретракция $p : O(K) \longrightarrow K$ переводит каждый слой $l(\xi) + \tilde{E}$ в точку $a = \varphi(\xi) = l(\xi) + h(\xi)$, являющуюся точкой условного глобального минимума функционала V в слое $p^{-1}(a) = l(\xi) + \tilde{E}$, то есть критической точкой для сужения $V|_{p^{-1}(a)}$.

Литература

1. Сапронова Т.Ю. О методе квазиинвариантных подмногообразий в теории фредгольмовых функционалов / Т.Ю. Сапронова // В кн. : Топологические методы нелинейного анализа. — Воронеж, 2000. — С. 107–124.

2. Даринский Б.М. Бифуркации экстремалей фредгольмовых функционалов / Б.М. Даринский, Ю.И. Сапронов, С.Л. Царев // Современ. математика. Фундамент. направления. — 2004. — Т. 12. — С. 3–140.

ФОРМИРОВАНИЕ ФИНАНСОВОЙ ГРАМОТНОСТИ ШКОЛЬНИКОВ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Т.М. Сафронова, Н.В. Черноусова,
М.И. Сафронова (Елец, ЕГУ им. И.А. Бунина)
stm657@mail.ru, chernousovi@mail.ru, maria_ safronova_ 96@mail.ru

Проблема повышения уровня финансовой грамотности населения приобрела актуальность для теоретических исследований за рубежом в конце XX века, а в России —- с середины 2000-го года. Попытки ее разрешения начались с отдельных инициатив общественных и частных организаций, со временем эволюционировав до уровня национальных и наднациональных программ и стратегий. Своеобразным импульсом для осуществления практической работы

в этом направлении в нашей стране послужило создание в 2008 году Концепции Национальной программы повышения уровня финансовой грамотности населения Российской Федерации. Так, в 2010 году Министерством финансов РФ и Всемирным банком был разработан проект «Содействие повышению финансовой грамотности населения и развитию финансового образования в Российской Федерации», для реализации которого были выбраны экспериментальные площадки (в 2015 — 2017 годах было запущено 7 таких региональных площадок). В 2017 году Правительство России утвердило Стратегию повышения финансовой грамотности в РФ на 2017 — 2023 годы, определяющую ключевые направления преобразований в сфере повышения финансовой грамотности приоритетных групп населения: молодежь в возрасте до 18 лет, взрослое население с низким и средним уровнем дохода и люди пенсионного возраста.

В этой связи одним из наиболее приоритетных направлений работы является формирование финансовой грамотности школьника как составной элемент экономического воспитания человека.

В данной статье предлагается фрагмент разработанной авторами методики обучения учащихся старших классов решению задач по математике с экономическим содержанием.

Литература

1. Концепция Национальной программы повышения уровня финансовой грамотности населения Российской Федерации [Электронный ресурс] // Режим доступа: http://www.misbfm.ru/programma-fingramotnosti-naseleniya-rf

ОБ ОДНОЙ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

С.В. Свинина (Иркутск, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН)
svinina@icc.ru

В некоторых приложениях встречаются нелинейные дифференциально-алгебраические системы уравнений в частных производных, которые также называют вырожденными системами, не разрешенными относительно старшей производной, системами Соболева

и системами, не относящимися к типу Коши-Ковалевской. Впервые такие системы появились в работах, посвященных конкретным уравнениям гидродинамики в конце XIX и начале XX века. Интерес к ним вызвала в том числе и работа С.Л. Соболева [1]. В настоящее время наиболее хорошо исследованы линейные дифференциально-алгебраические системы уравнений с двумя независимыми переменными и гораздо менее исследованы квазилинейные системы. В докладе рассматривается одна квазилинейная дифференциально-алгебраическая система уравнений в частных производных первого порядка с двумя независимыми переменными. Для такой системы записана граничная задача и доказана теорема существования её решения.

Рассмотрим квазилинейную систему уравнений в частных производных

$$A(x,t,u)\partial_t u + B(x,t,u)\partial_x u = F(x,t,u), \tag{1}$$

где $A(x,t,u)$ и $B(x,t,u)$ – некоторые заданные квадратные матрицы порядка n тождественно вырожденные в области определения $\mathcal{U} = \{(x,t,u) : \ (x,t) \in U\}$, где $U = \{(x,t) : \ x \in I_x = [x_0; X] \subset \mathbb{R}^1, \ t \in I_t = [t_0; T] \subset \mathbb{R}^1\}$. При условии вырожденности матриц $A(x,t,u)$ и $B(x,t,u)$, говорят, что квазилинейная система (1) является дифференциально-алгебраической. Мы также предполагаем, что вектор-функция $F(x,t,u)$ задана в области $\mathcal{U}$.

Для системы вида (1) зададим следующие начально-краевые условия:

$$u(x_0,t) = \psi(t), \quad u(x,t_0) = \varphi(x), \tag{2}$$

где $\psi(t)$ и $\varphi(x)$ – некоторые n-мерные вектор-функции своих аргументов. Предположим, что в каждой точке области $\mathcal{U}$, пучок матриц $P(\lambda,x,t,u) = A(x,t,u) + \lambda B(x,t,u)$ является регулярным и все элементарные делители пучка $P(\lambda,x,t,u)$ являются простыми, при этом корни характеристического многочлена $\det P(\lambda,x,t,u)$ могут быть кратными.

Если для системы (1) выполнены все условия теоремы 4 из работы [2] и степени элементарных делителей пучка $P(\lambda,x,t,u)$ не превосходят единицы, то для пучка $P(\lambda,x,t,u)$ найдутся невырожденные в области определения U матрицы $L \equiv L(x,t,u)$ и $R \equiv R(x,t,u)$, обладающие той же гладкостью, что и элементы пучка $P(\lambda,x,t,u)$, которые выполняют следующее преобразование:

$$LP(\lambda,x,t,u)R = \mathrm{diag}\{E_d, \mathcal{O}_l, E_p\} + \lambda \, \mathrm{diag}\{J(x,t,u), E_l, \mathcal{O}_p\},$$

где $J(x,t,u) = \mathrm{diag}\{k_1(x,t,u), k_2(x,t,u), \ldots, k_d(x,t,u)\}$, а $\mathcal{O}_l$ – нулевой квадратный блок порядка l.

Справедлива теорема.

Теорема. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) *все корни характеристического многочлена* $\det P(\lambda,x,t,u)$ *являются вещественными и имеют постоянную кратность в области определения* $\mathcal{U}$*;*

2) *старший коэффициент многочлена* $\det P(\lambda,x,t,u)$ *по параметру* λ *не обращается в нуль ни в одной точке области* $\mathcal{U}$*;*

3) *ранги матриц* $A(x,t,u)$ *и* $B(x,t,u)$ *являются постоянными в каждой точке области* $\mathcal{U}$ *и меньше размерности* n*.*

4) *все элементарные делители пучка* $P(\lambda,x,t,u)$ *имеют первую степень;*

5) *все ненулевые корни характеристического многочлена* $\det P(\lambda,x,t,u)$ *отрицательные;*

6) *элементы матриц* $A(x,t,u)$ *и* $B(x,t,u)$ *принадлежат пространству* $C^1(\mathcal{U})$*; вектор-функция* $\psi(t)$ *принадлежит* $C^1(I_t)$*; производные* $\partial_x A(x,t,u)$, $\partial_x B(x,t,u)$, $\partial_t A(x,t,u)$, $\partial_t B(x,t,u)$, $\partial_{u_j} A(x,t,u)$ *и* $\partial_{u_j} B(x,t,u)$, *где* $j = \overline{1,n}$, *удовлетворяют условию Липшица по* u *в области* $\mathcal{U}$*; вектор-функция* $\varphi(x)$ *принадлежит пространству* $C^1(I_x)$*; вектор-функция* $F(x,t,u)$ *удовлетворяет условию Липшица по* u*; частные производные* $\partial_{u_i u_j} F(x,t,u)$, $\partial_{u_j x} F(x,t,u)$ *и* $\partial_{u_j t} F(x,t,u)$, *где* $i,j = \overline{1,n}$, *существуют, удовлетворяют условию Липшица по* u *в области* $\mathcal{U}$ *и являются ограниченными в этой области;*

7) *частные производные* $\partial_{u_j x} L(x,t,u)$, $\partial_{u_j t} L(x,t,u)$, $\partial_{u_j u_i} L(x,t,u)$, $\partial_{u_j x} R(x,t,u)$, $\partial_{u_j t} R(x,t,u)$, $\partial_{u_j u_i} R(x,t,u)$, $\partial_{xt} R(x,t,u)$,
$\partial_{xx} R(x,t,u)$ *и* $\partial_{tt} R(x,t,u)$ *существуют, удовлетворяют*

условию Липшица по u в области $\mathcal{U}$ и являются ограниченными в этой области;

8) *матрица $R(x,t,u)$ удовлетворяет условию Липшица по u в области $\mathcal{U}$ с константой, не превосходящей некоторой постоянной $\mathcal{M}$;*

9) *выполнены условия согласования*

$$\psi(t_0) = \varphi(x_0), \quad \psi'(t_0) = \varphi'(x_0),$$

$$A(x_0,t_0)\psi'(t_0) + B(x_0,t_0)\varphi'(x_0) = F(x_0,t_0,\psi(t_0)).$$

Тогда в области U существует единственное решение $u(x,t)$ системы (1), непрерывное в U вместе с частными производными первого порядка по переменным x и t, удовлетворяющее условиям (2).

Литература

1. Соболев С.Л. Об одной новой задаче математической физики/ С.Л. Соболев // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1954. — Т. 18, № 1. — С. 3–50.

2. Гайдомак С.В. О канонической структуре пучка вырожденных матриц-функций / С.В. Гайдомак // Известия высших учебных заведений. Математика. — 2012. — № 2. — С. 23-33.

О ГЛАВНОМ ЧЛЕНЕ АСИМПТОТИЧЕСКОГО РАЗЛОЖЕНИЯ ИНТЕГРАЛА ФЕЙНМАНА[1]

Т.Ю. Семенова (Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова)
station@list.ru

Фейнмановские интегралы по петлевым импульсам, возникающие при вычислениях разнообразных объектов квантовой теории поля, являются довольно сложными для определения и изучения математическими объектами. Стандартный прием исследования таких интегралов — разложение в ряд по одному из параметров [1, 2], причем в большинстве случаев достаточно получить первые несколько членов такого разложения. При определенных

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 17-02-00175 А).

соотношениях на параметры в представлении Ли-Померанского [3] можно прийти к задаче разложения при $t \to +0$ интеграла вида

$$\mathcal{F}(t) = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty (P(x,t))^{-\lambda}\, dx_1 \dots dx_n,$$

где $P(x,t) = P(x_1, \dots, x_n, t) = \sum_{w \in S} c_w x_1^{w_1} \dots x_n^{w_n} t^{w_{n+1}}$ — многочлен, $S = \{w = (w_1, \dots, w_{n+1}) \,|\, w_j \in \mathbb{Z}_+\}$ — конечное множество, $\lambda > 0$, коэффициенты многочлена $c_w > 0$.

Гипотеза об асимптотическом разложении интегралов такого вида сформулирована в работе [4].

Пусть $\mathcal{N}_P$ — многогранник Ньютона многочлена $P(x,t)$ — выпуклая оболочка множества S в $(n+1)-$мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$. Обозначим $\{\gamma\}$ — множество граней $\mathcal{N}_P$ максимальной размерности n, для которых нормальные векторы $r_\gamma = (r_{\gamma,1}, \dots, r_{\gamma,n}, r_{\gamma,n+1})$, ориентированные внутрь многогранника, имеют положительную последнюю координату, то есть $r_{\gamma,n+1} > 0$. Уравнения этих граней $w_{n+1} = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i(\gamma) w_i + b(\gamma)$. Пусть $\pi(\mathcal{N}_P)$ — проекция $\mathcal{N}_P$ на плоскость $w_{n+1} = 0$, $\pi(\gamma)$ — проекции граней γ на ту же плоскость.

Теорема 1. *Интеграл $\mathcal{F}(t)$ сходится тогда и только тогда, когда точка $(\frac{1}{\lambda}, \dots, \frac{1}{\lambda}) \in \mathbb{R}^n$ принадлежит внутренности многогранника $\pi(\mathcal{N}_P)$.*

Теорема 2. *Если $(\frac{1}{\lambda}, \dots, \frac{1}{\lambda}) \in Int(\pi(\gamma^*))$ для некоторой грани γ^*, тогда при $t \to +0$*

$$\mathcal{F}(t) \sim t^{-b(\gamma^*)\cdot\lambda - \sum\limits_{i=1}^{n} a_i(\gamma^*)} \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \Big(\sum_{w \in \gamma^* \cap S} c_w y_1^{w_1} \dots y_n^{w_n} \Big)^{-\lambda} dy.$$

Литература

1. Beneke M. Asymptotic expansion of Feynman integrals near threshold / M. Beneke, V. A. Smirnov // Nuclear Physics B, издательство Elsevier BV (Netherlands). — 1998. — Т. 552, С. 321–344.

2. Pak A. Geometric approach to asymptotic expansion of Feynman integrals / A. Pak, A. V. Smirnov // European Physical Journal C, издательство Springer Verlag (Germany). — 2011. — Т. 71, С. 1626.

3. Lee R.N. Normalized Fuchsian form on Riemann sphere and differential equations for multiloop integrals / R.N. Lee, A.A. Pomeransky // arXiv:1707.07856 [hep-th].

4. Semenova T.Yu. On the status of expansion by regions / T.Yu. Semenova, A.V. Smirnov, V.A. Smirnov // arXiv:1809.04325 [hep-th].

ФИЛЬТРАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА ОДНОМЕРНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ-ХААРА

Г.Н. Сергазы (Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова)
gsergazy@cs.msu.ru

Пусть $f \in L_2[0,1]$, $f \sim \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)e^{2\pi ikx}$ – её тригонометрический ряд Фурье. Обозначим через $J(x)$ следующую линейную комбинацию сдвигов функции f:

$$J(x) = \frac{1}{2^N} \sum_{s=0}^{2^N-1} f\Big(x + \frac{s}{2^N}\Big).$$

Тогда для коэффициентов Фурье-Хаара $\Big\{b_k^j\Big\}$ функции $J(x)$, где $b_k^j = \int\limits_0^1 J(x)\chi_k^j(x)dx$, $j = 0, 1, \dots, [\frac{2^k-1}{2}], k = 0, 1, \dots,$ имеют место следующие соотношения:

1. при $k = 0$

$$b_0^0 = \hat{f}(0),$$

2. при $1 \leqslant k < N+1$ и $j = 0, 1, \dots, [\frac{2^k-1}{2}]$

$$b_k^j = 0,$$

3. при $k = N+1$ и $j = 0, 1, \dots, [\frac{2^k-1}{2}]$

$$b_{N+1}^j = i2^{-\frac{N}{2}+1} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{\hat{f}(2^N(2s+1))}{\pi(2s+1)},$$

4. при $k > N+1$ и $j = 0, 1, \dots, [\frac{2^k-1}{2}]$

$$\left|b_k^j\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2^k}} \sum_{r \in \mathbb{Z}} \left|\hat{f}(r2^N)\right| \left|\sin\Big(2^{(N+1-k)}\pi r\Big)\right|.$$

Литература

1. Нурсултанов Е.Д. О мультипликаторах рядов Фурье по тригонометрической системе / Е.Д. Нурсултанов // Мат. заметки. — 1998. — Т. 63, № 2. —С. 235–247.

ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКИ БАКАЛАВРОВ ЭКОНОМИЧЕСКИХ НАПРАВЛЕНИЙ

Г.А. Симоновская (Елец, ЕГУ им. И.А. Бунина)
simonovskaj_ g@mail.ru

Современная подготовка будущего специалиста в области экономики осуществляется на основе действующего ФГОС ВО по направлению подготовки 38.03.01 Экономика (квалификация (степень) "бакалавр"). [2] В данном документе представлены характеристики профессиональной деятельности выпускников. Что предполагают наличие у специалиста прочных знаний по многим разделам высшей математики.

Следует отметить, что образовательный стандарт универсален. Внимательно изучив данный документ, можно констатировать, что студент должен знать основы высшей математики, уметь их использовать в профессиональной деятельности, но ни какие границы в стандарте не оговорены.

Проведенный анализ программ по экономическим направлениям, показывает, что содержание рабочих программ по математической подготовке будущего бакалавра лишь несколько варьируется, но широта и глубина рассматриваемых вопросов различна. И в первую очередь это обусловлено количеством зачетных единиц отводимых на изучение математики.

Решают проблему освоения математики в полном объеме при минимальном объеме часов отводимых на изучение по-разному.
Один из путей – это использование информационных и коммуникационных технологий. [1, с.16] Другой путь – получение прочных теоретических и практических знаний в основных областях высшей математики.

Литература

1. Кручинина Г.А., Купряшина Л.А. Особенности подготовки бакалавров экономических специальностей в рамках компетентностного подхода // Вестник нижегородского университета им. Н.И.

Лобачевского. Серия: инновации в образовании. — 2013, № 2 (1). — С. 16—23.

2. Федеральный государственный образовательный стандарт высшего образования по направлению подготовки 38.03.01 Экономика. – $http : //fgosvo.ru/news/5/1495$(дата обращения: 3.12.2018).

О СИНК-АППРОКСИМАЦИИ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ ГИЛЬБЕРТА

Ю.С. Солиев (Москва, МАДИ)
su1951@mail.ru

Синк-аппроксимации и их приложения хорошо изучены [1]–[3].

Ниже рассматриваются вопросы приложения синк-аппроксимаций к вычислению понимаемого в смысле главного значения сингулярного интеграла с ядром Гильберта

$$G\varphi = G(\varphi; s) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma - s}{2}d\sigma, \tag{1}$$

где φ(s) — плотность интеграла, непрерывная 2π–периодическая функция.

Если φ(s) функция с финитным спектром Фурье, то следуя работе [4], для (1) получим представление

$$G\varphi = G(\varphi; s) = \sum_{m=0}^{N-1}\varphi\left(\frac{2m\pi}{N}\right)W_N\left(s - \frac{2m\pi}{N}\right),$$

где

$$W_N(s) = \frac{1}{N}\begin{cases} 2a_{n-1}(s) + \sin ns, & N = 2n, \\ 2a_n(s), & N = 2n+1, \end{cases}$$

$$a_n(s) = \sin\frac{n}{2}s\sin\frac{n-1}{2}s\cos ec\frac{s}{2}. \tag{2}$$

Аппроксимируя плотность интеграла (1) выражением

$$L_N\varphi = L_N(\varphi; s) = \sum_{k=0}^{N-1}\varphi\left(\frac{2k\pi}{N}\right)\sin c\left(\frac{Ns}{\pi} - 2k\right),$$

получим квадратурную формулу

$$\begin{gathered}G\varphi = G(L_N\varphi; s) + R_N(\varphi; s) = \\ = \sum_{m=0}^{N-1} \varphi\left(\tfrac{2m\pi}{N}\right) W_N\left(s - \tfrac{2m\pi}{N}\right) + R_N\varphi,\end{gathered}$$

где функция $W_N(s)$ определена в (2), а $R_N\varphi$ — остаточный член.

Теорема. *Пусть* $\varphi(s)$ *функция с финитным спектром Фурье и* $\varphi(s) \in H_\alpha^{(r)}, 0 < \alpha \leqslant 1$. *Тогда*

$$\|R_N\varphi\|_C \leqslant C\frac{\ln^2 N}{N^{r+\alpha}}, \quad C - \mathrm{const}.$$

Доказательство существенно опирается на оценку А.Ю.Трынина константы Лебега процесса $L_N\varphi$ [3]. Полученные результаты переносятся на многомерный случай.

Литература

1. Stenger F. Numerical Methods Based on Sinc and Analytic Functions. Springer, New York, 1993.

2. Хургин Я.И. Финитные функции в физике и технике / Я.И. Хургин, В.П. Яковлев. — М. : Наука, 1971. — 408 с.

3. Трынин А.Ю. Операторы интерполирования и аппроксимация непрерывных функций / А.Ю. Трынин. — Автореферат диссертации. . . доктора физ.-мат.н. — Саратов, 2013.

4. Дмитриев И.С. Особенности интерполяции 2π–периодических функций с финитным спектром Фурье на основе теоремы отсчетов / И.С. Дмитриев, М.П. Сличенко // Журнал радиоэлектроники. — 2014. — № 1. — С. 5.

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАТОРНОЙ ЗАДАЧИ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ С РАЦИОНАЛЬНОЙ ЗАВИСИМОСТЬЮ ОТ СПЕКТРАЛЬНОГО ПАРАМЕТРА[1]

П.С. Соловьёв, А.А. Самсонов, С.И. Соловьёв, Д.М. Коростелева (Казань, КФУ, КГЭУ)
pavel.solovev.kpfu@mail.ru

Исследуется симметричная операторная задача на собственные значения с рациональной зависимостью от спектрального параметра в вещественном бесконечно-мерном гильбертовом пространстве. Данная задача представляет собой возмущение симметричной линейной операторной задачи на собственные значения конечной суммой конечно-ранговых неотрицательных операторов с коэффициентами, дробно-рационально зависящими от спектрального параметра. Симметричная линейная задача на собственные значения в исходном вещественном гильбертовом пространстве состоит в нахождении собственных значений и собственных элементов симметричного положительно определённого ограниченного оператора относительно симметричного вполне непрерывного положительного оператора. Установлено существование последовательности положительных собственных значений с единственной предельной точкой на бесконечности. Доказана теорема о числе собственных значений на произвольном интервале. Полученные результаты развивают и обобщают результаты работ [1–3].

Литература

1. Соловьёв С.И. Нелинейные задачи на собственные значения. Приближённые методы. / С.И. Соловьёв. — Saarbrücken : LAP Lambert Academic Publishing, 2011. — 256 с.

2. Соловьёв С.И. Аппроксимация нелинейных спектральных задач в гильбертовом пространстве / С.И. Соловьёв // Дифференциальные уравнения. — 2015. — Т. 51, № 7. — С. 937–950.

3. Соловьёв С.И. Собственные колебания стержня с упруго присоединённым грузом / С.И. Соловьёв // Дифференциальные уравнения. — 2017. — Т. 53, № 3. — С. 418–432.

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Республики Татарстан в рамках научного проекта № 18-41-160029. Работа поддержана РФФИ (проект № 19-01-00258).

ДВУСТОРОННЯЯ ОЦЕНКА СУММЫ РЯДА ПО СИНУСАМ С ВЫПУКЛЫМИ, МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИМИСЯ КОЭФФИЦИЕНТАМИ[1]

А.П. Солодов (Москва, МГУ)
apsolodov@mail.ru

Работа посвящена уточнению асимптотики суммы ряда по синусам с выпуклыми, медленно меняющимися коэффициентами, полученной С. Алянчичем, Р. Бояничем и М. Томичем [1] и усиленной С. А. Теляковским [2]. В [1] установлено, что для любой выпуклой, медленно меняющейся и стремящейся к нулю последовательности $\mathbf{b}$ имеет место асимптотика: $g(\mathbf{b}, x) \sim b_{m(x)}/x$, $x \to 0$, где $m(x) = [\pi/x]$. В [2] показано, что разность $h(\mathbf{b}, x) = g(\mathbf{b}, x) - b_{m(x)}/x$ сравнима по порядку с функцией $\sigma(\mathbf{b}, x) = (x/2)\sum_{k=1}^{m(x)-1} k(k+1)\Delta b_k$, $\Delta b_k = b_k - b_{k+1}$. В данной работе указанный результат усилен, получена двусторонняя оценка для $h(\mathbf{b}, x)$ с точными константами.

Теорема. *Для любой выпуклой и стремящейся к нулю последовательности* $\mathbf{b}$ *и для всех* $x \in (0, \pi/11)$ *выполняется неравенство*

$$\frac{6(\pi-1)}{\pi^3}\sigma(\mathbf{b}, x) - \frac{\Delta b_{m(x)}}{\pi} - b_{m(x)}\left(\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2} - \frac{1}{x}\right) < h(\mathbf{b}, x) < \sigma(\mathbf{b}, x).$$

Существуют выпуклые, медленно меняющиеся и стремящиеся к нулю последовательности $\underline{\mathbf{b}}$, $\overline{\mathbf{b}}$ *такие, что*

$$\varliminf_{x\to+0} \frac{h(\underline{\mathbf{b}}, x)}{\sigma(\underline{\mathbf{b}}, x)} = \frac{6(\pi-1)}{\pi^3}, \qquad \varlimsup_{x\to+0} \frac{h(\overline{\mathbf{b}}, x)}{\sigma(\overline{\mathbf{b}}, x)} = 1.$$

Литература

1. Aljančić S. Sur le comportement asymptotique au voisinage de zéro des séries trigonométriques de sinus à coefficients monotones / S. Aljančić, R. Bojanić, M. Tomić // Acad. Serbe Sci. Publ. Inst. Math. — 1956. — V. 10, № 1. — P. 101–120.

2. Telyakovskiĭ S. A. On the behavior near the origin of the sine series with convex coefficients / S. A. Telyakovskiĭ // Publ. Inst. Math. Nouvelle série. — 1995. — V. 58(72). — P. 43–50.

---

[1] Работа выполнена в рамках Программы Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-6222.2018.1).

МОДЕЛЬНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ ПОЛУОГРАНИЧЕННОЙ СРЕДЫ[1]

В.С. Степанищева, И.В. Тихонов (Москва, МГУ)
stepanischeva.vika@gmail.com, ivtikh@mail.ru

Рассмотрим одномерную задачу для уравнения теплопроводности со стационарным источником

$$\begin{cases} u_t(x,t) = a^2\, u_{xx}(x,t) + p(x), \qquad x \geqslant 0, \qquad 0 < t \leqslant T, \\ u(0,t) = 0, \\ u(x,0) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

Коэффициент $a^2 > 0$ считаем постоянным. При соответствующих ограничениях решение задачи (1) представимо в виде

$$u(x,t;\,p) = \int\limits_0^\infty \left(J_a(x-s,t) - J_a(x+s,t)\right)\, p\,(s)\, ds, \tag{2}$$

где

$$J_a(y,t) = \sqrt{\frac{t}{\pi a^2}}\, \exp\left(-\frac{y^2}{4a^2 t}\right) - \frac{|y|}{2a^2}\, \left(1 - \operatorname{erf}\left(\frac{|y|}{\sqrt{4a^2 t}}\right)\right)$$

с функцией ошибок $\operatorname{erf}(z)$. Формула (2) получается элементарным преобразованием стандартного интеграла [1, с. 250] с учетом того, что правая часть $p(x)$ не зависит от времени t.

Предположим теперь, что функция источников $p(x)$ неизвестна. Для восстановления $p(x)$ зададим дополнительное условие:

$$u(x,T) = \psi(x), \qquad x \geqslant 0. \tag{3}$$

Здесь $T > 0$ — конечное число (финальный момент времени). Задача (1), (3) относится к классу *обратных задач* (см. [2], [3]). Она представляет интерес из-за возникающих приложений при описании процесса распространения тепла в земной коре (см. [1], [4], [5]). Исследование задачи (1), (3) можно провести методом работ [6]–[8]. Общая схема такого исследования изложена ранее в [9].

---

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-01-00236.

Решением обратной задачи (1), (3) назовем пару

$$u \in C^{2,1}([0,\infty)\times(0,T]) \cap C([0,\infty]\times[0,T]), \quad p \in C([0,\infty)),$$

для которой выполнены все соотношения (1), (3). При этом предполагаем, что функция $\psi(x)$ задана так, что $\psi \in C^2([0,\infty))$ и $\psi(0) = 0$.

При изучении вопроса единственности решения по соображениям линейности переходим к однородной задаче

$$\begin{cases} u_t(x,t) = a^2\, u_{xx}(x,t) + p(x), \qquad x \geqslant 0, \qquad 0 < t \leqslant T, \\ u(0,t) = 0, \\ u(x,0) = 0, \qquad u(x,T) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Следующая теорема дает точное условие единственности решения в задаче (4).

Теорема. *Пусть пара функций $u = u(x,t)$, $p = p(x)$ является решением однородной обратной задачи* (4). *Предположим, что*

$$|u(x,t)| \leqslant M e^{\sigma x}, \qquad x \geqslant 0, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{5}$$

с константой $M > 0$ и показателем $\sigma \in \mathbb{R}$, таким, что

$$\sigma < \sqrt{\pi/(a^2 T)}. \tag{6}$$

Тогда $u(x,t) \equiv 0$ в $[0,\infty)\times[0,T]$ и $p(x) \equiv 0$ на $[0,\infty)$.

Условие (6) является точным: при его нарушении в однородной задаче (4) возникают нетривиальные *элементарные решения* (см. [9]). Из теоремы следует, что в экспоненциальных классах функций типа (5), (6) исходная неоднородная задача (1), (3) имеет не более одного решения при любом выборе финальной функции $\psi(x)$.

Пусть подходящая функция $\psi(x)$ в условии (3) задана. Для применения интегральной формулы (2) желательно знать явное выражение для неизвестной функции источника $p(x)$. С помощью преобразования Фурье получаем

$$p(x) = \frac{1}{T}\int_0^\infty \bigl(g_T(s-x,a) - g_T(s+x,a)\bigr)\,\psi(s)\,ds - a^2\,\psi''(x), \tag{7}$$

где

$$g_T(x,a) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{a^2\xi^2 T}{\exp\left(a^2\xi^2 T\right) - 1}\,\cos\xi x\,d\xi, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

Функция $g_T(x, a)$ элементарно выражается в виде

$$g_T(x, a) = \frac{1}{\sqrt{a^2 T}}\, g\left(\frac{x}{\sqrt{a^2 T}}\right), \qquad x \in \mathbb{R},$$

через частный случай $g(x)$, отвечающий значениям $a = 1,\ T = 1$.

С практической точки зрения удобны приближенные выражения, полученные в работе [8] для общей многомерной функции Грина, аналогичной нашей $g(x)$. Применительно к рассматриваемому случаю формулы [8] дают результат

$$\widetilde{g}(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} \left(k + \frac{1}{2}\right) \zeta\left(k + \frac{3}{2}\right) \left(-\frac{x^2}{4}\right)^k, \quad 0 \leqslant x \leqslant x_0, \quad (9)$$

$$\widetilde{g}(x) = -\sqrt{2\pi}\, \exp\left(-\sqrt{\pi} x\right) \sin\left(\sqrt{\pi} x + \frac{\pi}{4}\right), \quad x_0 \leqslant x < +\infty. \quad (10)$$

Был проведен численный анализ по согласованию формул (9), (10) с исходным интегралом (8), взятым при $a = 1$, $T = 1$. В результате найдены значения $x_0 = 6$, $N = 40$, при которых происходит сшивка формул (9), (10) и справедлива оценка

$$|g(x) - \widetilde{g}(x)| \leqslant \delta, \qquad x \geqslant 0,$$

со значением $\delta = 10^{-7}$.

Отметим, что асимптотика функции $g(x)$, заложенная в приближенное выражение (10), дает основу для обоснования разрешающей формулы (7) в классах функций экспоненциального роста (5), (6). Численные эксперименты по решению обратной задачи (1), (3) подтвердили правильность нашего подхода.

Литература

1. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. — М. : Наука, 2004.

2. Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач / А.М. Денисов. — М. : Изд-во МГУ, 1994.

3. Prilepko A.I. Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics / A.I. Prilepko, D.G. Orlovsky, I.A. Vasin. — NY, Basel : Marcel Dekker, 2000.

4. Карслоу Г. Теплопроводность твердых тел / Г. Карслоу, Д. Егер. — М. : Наука, 1964.

5. Тихонов А.Н. О влиянии радиоактивного распада на температуру земной коры / А.Н. Тихонов // Известия АН СССР-ОМЕН. Серия географ. и геофиз. — 1937. — Вып. 3. — С. 461–479.

6. Тихонов И.В. Единственность решения двухточечной обратной задачи для абстрактного дифференциального уравнения с неизвестным параметром / И.В. Тихонов, Ю.С. Эйдельман // Дифференц. уравнения. — 2000. — Т. 36, вып. 8. — С. 1132–1133.

7. Тихонов И.В. Структура решений модельной обратной задачи теплопроводности в классах функций экспоненциального роста / И.В. Тихонов, Ю.В. Гаврись, Т.З. Аджиева // Челябинский физико-математический журнал. — 2016. — Т. 1, вып. 3. — С. 38–63.

8. Попов А.Ю. Экспоненциальные классы разрешимости в задаче теплопроводности с нелокальным условием среднего по времени / А.Ю. Попов, И.В. Тихонов // Матем. сборник. — 2005. — Т. 196, вып. 9. — С. 71–102.

9. Степанищева В.С. Обратная задача восстановления источника в одномерном уравнении теплопроводности на полупрямой / В.С. Степанищева, И.В. Тихонов // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XVII международной научной конференции. — Смоленск: СмолГУ, 2016. — Вып. 17. — С. 219–222.

РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ СТРУКТУРЫ И МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ДРЕВЕСНОГО КОМПОЗИТА

Т.Н. Стородубцева (Воронеж,
ВГЛТУ им. Г.Ф. Морозова)
tamara-tns@yandex.ru

Композиты представляют собой термодинамические неравновесные системы, состоящие из двух или более компонентов, отличающихся по химическому составу, физико-механическим свойствам и разделенных в материале четко выраженной границей. Каждый из компонентов вводится в состав, чтобы придать ему требуемые свойства, которыми не обладает каждый из компонентов в отдельности. Комбинируя объемное соотношение компонентов, можно получать материалы с требуемыми характеристиками [4]. Таким образом, разработка математической модели структуры и механических свойств древесного композита, позволяющая теоретически

изучить зависимость прочностных свойств от параметров исходных компонентов является весьма актуальной задачей.

Структура и механические свойства композиционных материалов чрезвычайно сложны для моделирования из-за необходимости учитывать в модели несколько компонентов и все виды механической связи между ними, форму и взаимное расположение частиц компонентов в материале, распределенную в пространстве внешнюю нагрузку.

При построении модели используются принципы дискретизация объекта высокого пространственного разрешения [3]. Для моделирования структуры и механических свойств древесного композита используется метод динамики частиц [1, 2, 3].

Для того, чтобы модель обладала высоким пространственным разрешением моделируемый образец (древесный композит) разбивается на множество (1000–20000) элементов.

Моделирование производится в двумерном пространстве XZ, при этом элементы имеют одинаковую круговую форму с одинаковым диаметром $d_{Э}$. Элементы по своим физическим свойствам делятся на три типа (древесина, полимер, песок). Элементы имеют возможность двигаться в процессе механических испытаний образца по законам классической механики, что приводит к изменению формы и состояния всего образца. В частности, в модели можно воспроизвести различные виды разрушения материала, механические колебания и волны.

Состояние каждого элемента-круга E_i задается четырьмя переменными: декартовыми координатами его центра $(x_i,\ z_i)$ и двумя составляющими скорости $(v_{xi},\ v_{zi})$. Механическое взаимодействие элементов между собой принято вязкоупругим, что позволяет заложить в модель основные механические свойства компонентов материала – модуль упругости, коэффициент внутреннего трения, силу адгезии. В модели учитывается, что между соседними элементами могут возникать силы отталкивания или притяжения.

В начальный момент времени элементы случайным образом распределяются в области прямоугольной формы. Для того, чтобы первоначально нестабильная механическая система пришла в механическое равновесие, в течение 1 секунды модельного времени производится интегрирование уравнений механического движения элементов. В результате этого элементы формируют плотную упаковку. После этого производится разбиение модельного композита на компоненты. В первую очередь выделяется множество области пространства, представляющие собой древесину.

В зависимости от концентрации и заданного фракционного состава, они представляются определенной комбинацией элементов. Затем оставшиеся элементы, в соответствии с заданным составом, разделяются случайным образом на «полимер» и «песок».

Уравнения движения элементов составляются на основе второго закона Ньютона. Используемые уравнения представляют собой дифференциальные уравнения второго порядка и решаются в процессе моделирования численным методом – методом Рунге-Кутта второго порядка

$$x_i^{\tau+1} = x_i^{\tau} + v_{xi}^{\tau} \cdot \Delta t + a_{xi}^{\tau} \cdot (\Delta t)^2 /2; v_{xi}^{\tau+1} = v_{xi}^{\tau} + a_{xi}^{\tau} \cdot \Delta t;$$

$$z_i^{\tau+1} = z_i^{\tau} + v_{zi}^{\tau} \cdot \Delta t + a_{zi}^{\tau} \cdot (\Delta t)^2 /2;$$

$$v_{zi}^{\tau+1} = v_{zi}^{\tau} + a_{zi}^{\tau} \cdot \Delta t, \tag{1}$$

где i — номер элемента, τ и $\tau{+}1$ — индексы текущего и следующего временного шага; Δt — шаг интегрирования по времени; x_i, v_i, a_i — координата, скорость, ускорение элемента.

Данный численный метод имеет второй порядок точности по координате и первый порядок точности по скорости. Метод является универсальным, надежным, а также быстро программируемым. Шаг интегрирования системы дифференциальных уравнений составлял $\Delta t = 0{,}0001$ с.

По общепринятой классификации моделей, предлагаемая модель является алгоритмической, но не аналитической. Это означает, что выходные характеристики модели рассчитываются по входным не путем аналитических преобразований, а с помощью пространственной и временной дискретизации, и соответствующего алгоритма расчета. Расчет по приведенным выше формулам является довольно громоздким и включает в себя три цикла, вложенных один в другой: по номеру компьютерного эксперимента, по номеру временного шага и по номеру элемента.

Для решения системы дифференциальных и алгебраических уравнений, которая лежит в основе модели, разработана компьютерная программа для моделирования структуры и механических свойств древесного композиционного материала, которая разработана в среде Borland Delphi 7.0 на языке программирования Object

Pascal. Программа предназначена для моделирования механического поведения древесного композита заданного состава. Основные технические характеристики программы: количество элементов композита от 5000 до 20000; ориентировочное время проведения одного компьютерного эксперимента около 5 мин (при тактовой частоте процессора 3 ГГц).

В модели используется целый ряд коэффициентов, связанный с дискретизацией среды (разбиением на отдельные элементы шаровой формы): $m_\text{Э}$, $d_\text{Э}$,c, d.

Расчет массы одного элемента среды (древесины, полимера, или песка) $m_\text{Э}$ производится с использованием табличного значения плотности материала и геометрических соображений:

$$m_\text{Э} = \rho \cdot V_\text{Э} = \rho \cdot \frac{4\pi}{3}\left(\frac{d_\text{Э}}{2}\right)^3 \cdot k_\text{Ф} = \frac{\pi}{6}\rho d_\text{Э}^3 k_\text{Ф}, \qquad (2)$$

где ρ — объемная плотность материала, кг/м^3; $V_\text{Э}$ — объем элемента, м^3; $k_\text{Ф}$ — коэффициент формы, необходимый для учета того, что шарообразные элементы не заполняют пространство полностью (между элементами остаются незаполненные поры), безразмерный. Значение коэффициента $k_\text{Ф}$ зависит от плотности случайной упаковки и принято равным 1,4.

Для расчета жесткости взаимодействия двух элементов используется табличное значение модуля упругости материала и также геометрические соображения, касающиеся дискретизации:

$$c_\text{П} = E \cdot \frac{\pi d}{4} k_\text{ф}, \qquad (3)$$

где E — модуль упругости материала, Па.

Коэффициент вязкого трения d связан внутренним трением в рассматриваемой среде, и определяется по справочным значениям расстояния затухания звуковых волн в данной среде.

Литература

1. Гулд Х. Компьютерное моделирование в физике : Ч. 2 / Х. Гулд, Я. Тобочник. — М. : Мир, 1990. — 400 с.

2. Кривцов А.М. Деформирование и разрушение тел с микроструктурой / А.М. Кривцов. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2007. — 304 с.

3. Мышкис А.Д. Элементы теории математических моделей / А.Д. Мышкис — М. : КомКнига, 2007. — 192 с.

4. Стородубцева Т.Н., Аксомитный А.А. Особенности математического моделирования древесного полимер-песчаного композита /

Т.Н. Стородубцева, А.А. Аксомитный // Лесотехнический журнал. — 2014. — Т. 4, № 4 (16). — С. 131–139.

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ В СРЕДЕ С СОПРОТИВЛЕНИЕМ

Т.Н. Стородубцева, В.Б. Огарков (Воронеж,
ВГЛТУ им. Г.Ф. Морозова)
tamara-tns@yandex.ru

Уравнение вынужденных колебаний материальной точки в среде с сопротивлением имеет следующий вид [1]:

$$\frac{d^2U}{dt^2}+2\beta\frac{dU}{dt}+\omega^2U=p(t). \qquad (1)$$

В работе предложено следующее представление решения для соответствующего (1) однородного уравнения:

$$U_{\text{ОД}}(t)=e^{-\beta t}\left[D_1\cos\sqrt{(\omega^2-\beta^2}\cdot t+D_2\sin\sqrt{(\omega^2-\beta^2)}\cdot t\right]\;+$$

$$+D_3\operatorname{sh}\lambda t+D_4\operatorname{ch}\lambda t.$$

Исследуя систему для D_3, D_4 получим:

$$\lambda=\pm\sqrt{\left[2\beta^2-\omega^2\pm2\beta i\sqrt{(\beta^2-\omega^2)}\right]};\quad \omega^2-\beta^2>0.$$

Тогда для $U_{\text{ОД}}$ справедливо представление:

$$U_{\text{ОД}}=e^{-\beta t}\left[\beta_1\cos\sqrt{(\omega^2-\beta^2)}\cdot t+\beta_2\sin\sqrt{(\omega^2-\beta^2)}\cdot t\right]\;+$$

$$+\frac{P}{2}\Biggl\{\cos\beta t\Biggl[\left(1-\frac{\sqrt{(\omega^2-\beta^2)}}{\beta}\right)e^{\sqrt{\omega^2-\beta^2}\cdot t}+$$

$$+\left(1+\frac{\sqrt{(\omega^2-\beta^2)}}{\beta}\right)e^{-\sqrt{\omega^2-\beta^2}\cdot t}\Biggr]+$$

$$+\sin\beta t\Biggl[\left(1-\frac{\sqrt{(\omega^2-\beta^2)}}{\beta}\right)e^{\sqrt{\omega^2-\beta^2}\cdot t}\Biggr]-$$

$$-\Biggl[1+\frac{\sqrt{(\omega^2-\beta^2)}}{\beta}\Biggr)e^{-\sqrt{\omega^2-\beta^2}\cdot t}\Biggr]\Biggr\}. \qquad (2)$$

Решение (1) есть $U(t) = U_{\text{ОД}}(t) + U_{\text{Н}}(t)$, где частное решение $U_{\text{Н}}$ неоднородного уравнения (1) будем искать в виде [2]:

$$U_{\text{Н}} = C_1 W_1(t) + C_2 W_2(t) + C_3 W_3(t),$$

где $W_1(t)$, $W_2(t)$ и $W_3(t)$ — три частных решения однородного уравнения (1) в соответствии с формулой (2),

$$\frac{dC_1}{dt} W_1(t) + \frac{dC_2}{dt} W_2(t) + \frac{dC_3}{dt} W_3(t) = 0;$$
$$\frac{dC_1}{dt}\frac{dW_1}{dt} + \frac{dC_2}{dt}\frac{dW_2}{dt} + \frac{dC_3}{dt}\frac{dW_3}{dt} = 0;$$
$$\frac{dC_1}{dt}\frac{d^2W_1}{dt^2} + \frac{dC_2}{dt}\frac{d^2W_2}{dt^2} + \frac{dC_3}{dt}\frac{d^2W_3}{dt^2} = p(t).$$

Литература

1. Старжинский В.М. Теоретическая механика / В.М. Старжинский. — М. : Наука, 1980. — 464 с.

2. Корн Г. Справочник по математике для инженеров / Г. Корн, Т. Корн. — М. : Наука, 1970. — 710 с.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ПРОСТРАНСТВ ОРЛИЧА[1]

С.И. Страхов (Самара, СНИУ)
www.stepan121@mail.ru

Пусть X — симметричное пространство на $[0, 1]$, Y — его замкнутое линейное подпространство. Говорят, что Y *сильно вложено* в X, если сходимость по норме в Y эквивалентна сходимости по мере. Например, подпространство $[r_k]$, порожденное функциями Радемахера $r_k(t) = \operatorname{sign}\sin(2^k \pi t)$, $k = 1, 2, \ldots$, сильно вложено в $L_p[0, 1]$, $1 \leqslant p < \infty$.

Будем говорить, что с.п. X обладает свойством (Λ_R) $(X \in (\Lambda_R))$, если на каждом его рефлексивном подпространстве сходимость по норме X эквивалентна сходимости по мере.

Предположим, что F — возрастающая выпуклая функция на $[0, \infty)$, $F(0) = 0$ и L_F — соответствующее пространство Орлича функций на отрезке $[0, 1]$. Главный результат работы, теорема 1, показывает, что в пространствах Орлича, достаточно "близких" к $L_\infty[0, 1]$ или к $L_1[0, 1]$, все рефлексивные подпространства сильно вложены.

Напомним несколько определений из теории пространств Орлича: для каждой возрастающей выпуклой функции F определим следующее подмножество пространства $C[0, 1]$:

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00414-а).

$$E_F^\infty = \{G(x): \quad G(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{F(xy_n)}{F(y_n)}, \ \ 0 \leqslant x < 1, \ y_n \uparrow \infty\}.$$

Замкнутую выпуклую оболочку E_F^∞ в $C[0,1]$ обозначим через C_F^∞, т.е.

$$C_F^\infty := \overline{convE_F^\infty}.$$

Индексы Орлича - Матушевской, определяются следующим образом:

$$\alpha_F^\infty = \sup\{p: \sup_{1\leqslant x,y} \frac{F(x)y^p}{F(xy)} < \infty\}, \quad \beta_F^\infty = \inf\{p: \inf_{1\leqslant x,y} \frac{F(x)y^p}{F(xy)} > 0\}.$$

Теорема 1.*Следующие три условия эквивалентны:*

(a) $L_F \in (\Lambda_R)$.

(b) Для каждой функции $G \in C_F^\infty$ пространство Орлича последовательностей l_G не рефлексивно.

(c) $\alpha_F^\infty = \beta_F^\infty = 1$ либо $\alpha_F^\infty = \beta_F^\infty = \infty$.

Литература

1. Асташкин С.В. О симметричных пространствах со сходимостью по мере на рефлексивных подпространствах / С.В. Асташкин, С.И. Страхов // Известия вузов. Математика. — 2018. — № 8. — С. 3—11.

2. Albiac F., Kalton N.J. Topics in Banach space theory / New York: Springer-Verl., 2006. (Grad. Texts Math.; V. 233).

3. Lindenstrauss J., Tzafriri L. On Orlicz sequence spaces, III // Israel J. Math. 1973. V.14(4). P. 368—389.

4. Maligranda L. Orlicz spaces and interpolation. // Seminars in Mathematics 5, University of Campinas, Campinas SP, Brazil 1989.

О РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ, ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ[1]

В.Е. Струков (Воронеж, ВГУ)
sv.post.of.chaos@gmail.com

Символом $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ обозначим однородное пространство функций, определенных на $\mathbb{R}$, со значениями в комплексном банаховом пространстве X (см. [1]), а символом $\mathbb{F} = \mathbb{F}(\mathbb{R}, X)$ — гармоничное пространство распределений (см. [2]). Пусть $\mathcal{F}_0(\mathbb{R}, X)$ — наименьшее замкнутое подпространство из $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$, содержащее все функции φx, $x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$, где $\varphi \in C_b(\mathbb{R}, X)$ бесконечно дифференцируема и $\operatorname{supp} \varphi$ – компакт, а $\mathcal{F}_c(\mathbb{R}, X)$ — замкнутое подпространство из $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ вида $\{x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$: функция $t \mapsto S(t)x : \mathbb{R} \to \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ непрерывна$\}$.

Функция $x \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R}, X)$ называется *почти периодической на бесконечности (т.е. $x \in AP_\infty\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$),* если класс эквивалентности $\widetilde{x} = x + \mathcal{F}_0(\mathbb{R}, X)$ является почти периодическим вектором в пространстве $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)/\mathcal{F}_0(\mathbb{R}, X)$ (см. [1]). Доказано, что пространство $AP_\infty\mathbb{F}(\mathbb{R}, X)$ почти периодических на бесконечности гармоничных распределений имеет вид $AP_\infty\mathbb{F}(\mathbb{R}, X) = \{\Phi \in \mathbb{F}(\mathbb{R}, X) \ : \ \Phi = (D + I)^n y, \ y \in AP_\infty\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ для некоторого $n \in \mathbb{Z}\}$ и обладает свойствами, аналогичными свойствам $AP_\infty\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$.

Теорема 1. *Пространства $AP_\infty\mathbb{F}(\mathbb{R}, X)$ и $AP_\infty\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ изоморфны, т.е. распределение $\Phi \in \mathbb{F}(\mathbb{R}, X)$ является почти периодическим на бесконечности тогда и только тогда, когда функция $y = \mathbb{D}^{-n}\Phi \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ является почти периодической на бесконечности.*

Литература

1. Струков В.Е. О четырех определениях почти периодической на бесконечности функции из однородного пространства / В.Е. Струков, И.И. Струкова // Научные ведомости БелГУ. Сер. Математика. Физика. — 2018. — Т. 50, № 3. — С. 254–264.

2. Струков В.Е. О медленно меняющихся и периодических на бесконечности функциях из однородных пространств и гармоничных распределениях / В.Е. Струков, И.И. Струкова // Вестник ВГУ, серия Физика. Математика. — 2018. — № 4. — С. 195–205.

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-31-00097).

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ФУНКЦИЙ ИЗ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВ[1]

И.И. Струкова (Воронеж, ВГУ)
irina.k.post@yandex.ru

Символом $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ обозначим однородное пространство функций, определенных на $\mathbb{R}$, со значениями в комплексном банаховом пространстве X (см. [1]). Пусть $\mathcal{F}_0(\mathbb{R}, X)$ — наименьшее замкнутое подпространство из $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$, содержащее все функции φx, $x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$, где $\varphi \in C_b(\mathbb{R}, X)$ бесконечно дифференцируема и $\operatorname{supp} \varphi$ – компакт, а $\mathcal{F}_c(\mathbb{R}, X)$ — замкнутое подпространство из $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ вида $\{x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, X) :$ функция $t \mapsto S(t)x : \mathbb{R} \to \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ непрерывна$\}$.

Функция $x \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R}, X)$ называется *почти периодической на бесконечности,* если класс эквивалентности $\widetilde{x} = x + \mathcal{F}_0(\mathbb{R}, X)$ является почти периодическим вектором в $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)/\mathcal{F}_0(\mathbb{R}, X)$ (см. [1]).

Функция $x \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R}, X)$ называется *медленно меняющейся на бесконечности,* если $(S(t)x - x) \in \mathcal{F}_0(\mathbb{R}, X)$ для любого $t \in \mathbb{R}$.

Множества медленно меняющихся и почти периодических на бесконечности функций из $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ обозначим $\mathcal{F}_{sl,\infty}$ и $AP_\infty\mathcal{F}$. Если $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X) = C_b(\mathbb{R}, X)$, то $\mathcal{F}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X) = C_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$ (см. [2]).

Теорема 1. *Коэффициенты любого ряда Фурье функции* $x \in AP_\infty\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ *принадлежат пространству* $\mathcal{F}_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$ *и удовлетворяют условию* $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\|_\mathcal{F} = 0$. *Кроме того, можно построить ряд Фурье такой, что* $x_n \in C_{sl,\infty}(\mathbb{R}, X)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Литература

1. Струков В.Е. О четырех определениях почти периодической на бесконечности функции из однородного пространства / В.Е. Струков, И.И. Струкова // Научные ведомости БелГУ. Сер. Математика. Физика. — 2018. — Т. 50, № 3. — С. 254–264.

2. Баскаков А.Г. Почти периодические на бесконечности решения дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами / А.Г. Баскаков, И.И. Струкова, И.А. Тришина // Сиб. матем. журн. — 2018. — Т. 59, № 2. — С. 293–308.

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-31-00097).

ФРЕЙМЫ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ[1]

П.А. Терехин (Саратов, СГУ)
terekhinpa@mail.ru

Пусть X — банахово пространство и Ξ — банахово пространство последовательностей с естественным базисом $(\delta_n)_{n=1}^{\infty}$.

Система $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X \setminus \{0\}$ называется *фреймом в X относительно* Ξ, если существуют постоянные $0 < A \leqslant B < \infty$ такие, что для всех $x^* \in X^*$ выполняются неравенства

$$A\|x^*\|_{X^*} \leqslant \|(\langle x_n, x^*\rangle)_{n=1}^{\infty}\|_{\Xi^*} \leqslant B\|x^*\|_{X^*}.$$

Если X — гильбертово пространство и $\Xi = \ell^2$, то мы получаем фрейм Даффина–Шеффера.

Теорема 1. *Система $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X \setminus \{0\}$ является фреймом в X относительно Ξ тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

a) для любой последовательности $\xi = (\xi_n)_{n=1}^{\infty} \in \Xi$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n x_n$ сходится в X;

b) для каждого $x \in X$ существует последовательность $\xi = (\xi_n)_{n=1}^{\infty} \in \Xi$ такая, что справедливо представление $x = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n x_n$.

Фрейм $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$ называется *проективным*, если существуют банахово пространство Y и базис $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ пространства $X \oplus Y$ такие, что $x_n = Pe_n$, $n = 1, 2, \dots$, где P — каноническая проекция $X \oplus Y$ на X. В противном случае фрейм называется *собственным*.

Известно, что всякий фрейм Даффина–Шеффера проективен.

В докладе будут даны конструкции собственных фреймов, порожденных системами сжатий и сдвигов функций в симметричных пространствах, а также состоящих из значений воспроизводящих ядер функциональных пространств.

Литература

1. Терехин П.А. Фреймы в банаховом пространстве / П.А. Терехин // Функц. анализ и его прил. — 2010. — Т. 44, вып. 3. — С. 50–62.

2. Speransky K.S., Terekhin P.A. A representing system generated by the Szego kernel for the Hardy space // Indag. Math. — 2018. — V. 29. — №5. — P. 1318–1325.

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00414).

УТОЧНЕННЫЙ ВИД РАЗЛОЖЕНИЙ ПОПОВИЧУ ДЛЯ ПОЛИНОМОВ БЕРНШТЕЙНА ОТ РАЦИОНАЛЬНОГО МОДУЛЯ[1]

И.В. Тихонов, В.Б. Шерстюков, Д.Г. Цветкович (Москва,
ВМК МГУ, НИЯУ МИФИ, МПГУ)
ivtikh@mail.ru, shervb73@gmail.com, dianacve@inbox.ru

В 1935 г. Тиберий Поповичу в работе [1] отметил среди прочего, что полиномы Бернштейна для стандартного модуля на симметричном отрезке $[-1,1]$ допускают разложение в специальную сумму, рекуррентно изменяющуюся при увеличении номера полинома Бернштейна (см. также [2]). В работах [3], [4] конструкция Поповичу была распространена на случай произвольного рационального модуля, взятого на стандартном отрезке $[0,1]$. Возникающие здесь суммы записывались довольно сложным образом. В настоящем сообщении мы даем более практичную формулу для общих структурированных разложений типа Поповичу.

Итак, на $[0,1]$ рассматриваем полиномы Бернштейна

$$B_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k\, x^k\, (1-x)^{n-k}, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

с порождающей функцией типа рационального модуля

$$f(x) = |qx - p|, \qquad x \in [0,1]. \tag{2}$$

Считаем, что $p,\ q \in \mathbb{N},\ p < q,$ НОД$\,(p,q) = 1$. Тогда при всех значениях $m \in \mathbb{N}$ и $r = 0, \ldots, q-1$ для полиномов (1) от функции (2) справедливо представление

$$B_{qm+r}(f,x) = p + (q-2p)\,x - 2\sum_{s=1}^{q-1} a_{p,q}(s)\, x^{\left\lceil \frac{sp}{q} \right\rceil} (1-x)^{s-\left\lfloor \frac{sp}{q} \right\rfloor} \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{\varepsilon_m(s,r)} \frac{1}{qk+s}\, C_{qk+s}^{pk+j_{p,q}(s)} \left(x^p\,(1-x)^{q-p}\right)^k, \tag{3}$$

где

$$\varepsilon_m(s,r) = \begin{cases} m, & s \leqslant r-1, \\ m-1, & s \geqslant r, \end{cases} \tag{4}$$

---

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-01-00236.

$$a_{p,q}(s) = \begin{cases} q\left\langle \frac{sp}{q} \right\rangle, & s \in \Delta^{(1)}_{p,q}\,, \\ q\left\{ \frac{sp}{q} \right\}, & s \in \Delta^{(2)}_{p,q}\,, \end{cases} \tag{5}$$

$$j_{p,q}(s) = \begin{cases} \left\lceil \frac{sp}{q} \right\rceil, & s \in \Delta^{(1)}_{p,q}\,, \\ \left\lfloor \frac{sp}{q} \right\rfloor, & s \in \Delta^{(2)}_{p,q}\,, \end{cases} \tag{6}$$

$$\Delta^{(1)}_{p,q} = \left\{ s \in \mathbb{N} : \ \ s \leqslant q-1, \ \left\langle \frac{sp}{q} \right\rangle \leqslant \frac{p}{q} \right\}, \tag{7}$$

$$\Delta^{(2)}_{p,q} = \left\{ s \in \mathbb{N} : \ \ s \leqslant q-1, \ \left\langle \frac{sp}{q} \right\rangle > \frac{p}{q} \right\}. \tag{8}$$

В формулах (3), (5)–(8) используем обычные обозначения $\lfloor a \rfloor$, $\lceil a \rceil$ для *пола* и *потолка* числа $a \in \mathbb{R}$ и, соответственно, обозначения

$$\{a\} = a - \lfloor a \rfloor\,, \qquad \langle a \rangle = \lceil a \rceil - a$$

для *дробной* и *антидробной частей* числа $a \in \mathbb{R}$.

Способ индексации (4) для верхнего предела во внутренней сумме (3) дает, в частности, стандартное *правило склеивания*

$$B_{qm+1}(f,x) = B_{qm}(f,x)\,, \qquad m \in \mathbb{N}\,,$$

действующее при выборе функции (2) (см. также [2]).

При $p = 1$ формулы (5)–(8) упрощаются, и разложение (3) можно свести к виду

$$B_{qm+r}(f,x) = 1 + (q-2)\,x - 2\sum_{s=1}^{q-1} s\,x\,(1-x)^s \times$$
$$\times \sum_{k=0}^{\varepsilon_m(s,r)} \frac{1}{qk+s}\, C^k_{qk+s} \left(x\,(1-x)^{q-1}\right)^k.$$

Аналогичное представление с соответствующими поправками будет справедливо при $p = q-1$. При всех остальных p так просто не получается из-за нетривиального разброса индекса s по множествам (7), (8) и общей непредсказуемости при вычислении значений (5), (6).

Так, например, для функции

$$f(x) = |5x - 2|, \qquad x \in [0,1],$$

с изломом в точке $x = 2/5$ формула (3) приводится к виду

$$\begin{aligned} B_{5m+r}(f,x) \;=\; 2 + x - 2 \sum_{k=0}^{\varepsilon_m(1,r)} \frac{2}{5k+1}\, C_{5k+1}^{2k}\, x^{2k+1}\, (1-x)^{3k+1} - \\ - 2 \sum_{k=0}^{\varepsilon_m(2,r)} \frac{1}{5k+2}\, C_{5k+2}^{2k+1}\, x^{2k+1}\, (1-x)^{3k+2} - \\ - 2 \sum_{k=0}^{\varepsilon_m(3,r)} \frac{1}{5k+3}\, C_{5k+3}^{2k+1}\, x^{2k+2}\, (1-x)^{3k+2} - \\ - 2 \sum_{k=0}^{\varepsilon_m(4,r)} \frac{2}{5k+4}\, C_{5k+4}^{2k+2}\, x^{2k+2}\, (1-x)^{3k+3}\,. \end{aligned}$$

Здесь $m \in \mathbb{N}$, $r = 0$, 1, 2, 3, 4, а значения $\varepsilon_m(s,r)$ при $s = 1$, 2, 3, 4 вычисляются по формуле (4).

Разложения, подобные (3), дают новые возможности при исследовании полиномов Бернштейна для рациональных модулей вида (2). Два направления представляются здесь особо перспективными: а) точные оценки для скорости сходимости полиномов Бернштейна к приближаемой функции (2); б) распределение нулей этих полиномов на плоскости $\mathbb{C}$ (см. также [3]–[5]).

Литература

1. Popoviciu T. Sur l’approximation des fonctions convexes d’ordre supérieur / T. Popoviciu // Mathematica. — 1935. — T. 10. — P. 49–54.

2. Тихонов И. В. Полиномы Бернштейна: старое и новое / И. В. Тихонов, В. Б. Шерстюков, М. А. Петросова // Матем. форум. Том. 8. Часть 1. Исследования по матем. анализу. — Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2014. — С. 126–175.

3. Цветкович Д. Г. Специальные представления для полиномов Бернштейна от рационального модуля на стандартном отрезке / Д. Г. Цветкович, И. В. Тихонов, В. Б. Шерстюков // Современные проблемы теории функций и их приложения: материалы 19-й международной Саратовской зимней школы. — Саратов: Научная книга, 2018. — С. 339–342.

4. Цветкович Д. Г. Особые структурированные представления для полиномов Бернштейна от рационального модуля / Д. Г. Цветкович // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы XIX международной научной конференции, посвященной 100-летию физико-математического факультета СмолГУ. — Смоленск: СмолГУ, 2018. — Вып. 19. — С. 347–353.

5. Тихонов И. В. Компьютерное исследование аттракторов нулей для классических полиномов Бернштейна / И. В. Тихонов, Д. Г. Цветкович, В. Б. Шерстюков // Фундаментальная и прикладная математика. — 2016. — Т. 21, № 4. — С. 151–173.

КОМБИНАТОРНЫЕ СТРУКТУРЫ, СВЯЗАННЫЕ С ЯВНОЙ ЗАПИСЬЮ ПОЛИНОМОВ БЕРНШТЕЙНА НА СИММЕТРИЧНОМ ОТРЕЗКЕ[1]

И.В. Тихонов, В.Б. Шерстюков, М.А. Петросова (Москва, ВМК МГУ, НИЯУ МИФИ, МПГУ)
ivtikh@mail.ru, shervb73@gmail.com, petrosova05@mail.ru

В теории аппроксимации есть одно специальное направление, связанное с оценками скорости роста коэффициентов в алгебраических полиномах, приближающих различные негладкие функции (см. [1]–[3]). Удобным объектом для подобных исследований являются классические полиномы Бернштейна (см. [4]). При этом, как выяснено в недавних работах [5]–[8], случай полиномов Бернштейна *на симметричном отрезке* $[-1, 1]$ имеет существенные отличия от случая стандартного отрезка $[0, 1]$. Теория на $[-1, 1]$ оказывается существенно «богаче». Коротко изложим лишь самое главное.

Для функции $f \in C[-1, 1]$ полиномы Бернштейна вводят формулой

$$B_n(f, x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{2k}{n} - 1\right) C_n^k \,(1+x)^k \,(1-x)^{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Рассмотрим для (1) алгебраическую запись

$$B_n(f, x) = \sum_{m=0}^{n} a_{n,m}(f)\, x^m, \qquad n \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

---

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-01-00236.

Важной характеристикой является величина

$$S_n(f) \equiv \sum_{m=0}^{n} \left| a_{n,m}(f) \right|, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Возникает вопрос о поведении на классе $f \in C[-1,1]$ как отдельных коэффициентов $a_{n,m}(f)$, так и всей характеристики $S_n(f)$ при изменении номера $n \in \mathbb{N}$.

Из общего результата Рулье [2] следует оценка

$$S_n(f) \leqslant 2^n \, \| f \|, \qquad \| f \| \equiv \max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} \left| f(x) \right|, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Однако, оказывается, что экспоненциальный рост 2^n в (4) завышен, и истинная картина несколько иная. Для получения масимально точных результатов требуется знать закон образования коэффициентов $a_{n,m}(f)$ в формуле (2).

Теорема 1. *Пусть $f \in C[-1,1]$ с полиномами Бернштейна (1). Тогда коэффициенты $a_{n,m}(f)$ в записи (2) выражаются в виде*

$$a_{n,m}(f) = 2^{-n} \, C_n^m \sum_{k=0}^{n} D_{n,m}^k \, f\left(1 - \frac{2k}{n}\right) \tag{5}$$

при всех $n \in \mathbb{N}$, $m = 0, 1, \ldots, n$, со значениями

$$D_{n,m}^k = \sum_j (-1)^j \, C_m^j \, C_{n-m}^{k-j}. \tag{6}$$

Сумма (6) распространяется на все допустимые j, что дают ненулевые произведения $C_m^j \, C_{n-m}^{k-j}$. Замыкая формулы, полезно принять также, что $D_{0,0}^0 = C_0^0 = 1$ и $a_{0,0}(f) = f(0)$.

Числа $D_{n,m}^k$ из формулы (6) обладают замечательными свойствами. Работая с ними, удобно зафиксировать индекс m, соответствующий выбранной степени x^m в записи (2) полиномов $B_n(f,x)$. Последовательно увеличивая номер $n = m, \; m+1, \; m+2, \; \ldots$, имеем строки числовых множителей

$$D_{n,m}^0, \; D_{n,m}^1, \; D_{n,m}^2, \; \ldots, \; D_{n,m}^{n-1}, \; D_{n,m}^n, \tag{7}$$

фигурирующих в выражении (5) для коэффициентов $a_{n,m}(f)$.

При $m = 0$ формула (6) дает элементы $D_{n,0}^k = C_n^k$ обычного треугольника Паскаля. При последующих $m \in \mathbb{N}$ числа $D_{n,m}^k$ образуют аналогичные структуры в виде так называемых *трапеций*

Паскаля (см. [5]–[7]). Каждая трапеция при фиксированном $m \in \mathbb{N}$ строится по своим начальным и краевым условиям с учетом правила Паскаля $D^{k-1}_{n,m} + D^{k}_{n,m} = D^{k}_{n+1,m}$.

Например, при $m = 2$ числа $D^{k}_{n,2}$ образуют бесконечную трапецию вида

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
&&&&&1&&-2&&1&&&&& \\
&&&&1&&-1&&-1&&1&&&& \\
&&&1&&0&&-2&&0&&1&&& \\
&&1&&1&&-2&&-2&&1&&1&& \\
&1&&2&&-1&&-4&&-1&&2&&1& \\
1&&3&&1&&-5&&-5&&1&&3&&1
\end{array}$$

Приведены строки, начиная с $n = 2$ до $n = 7$.

При $m = 3$ для чисел $D^{k}_{n,3}$ получаем трапецию

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
&&&&1&&-3&&3&&-1&&&& \\
&&&1&&-2&&0&&2&&-1&&& \\
&&1&&-1&&-2&&2&&1&&-1&& \\
&1&&0&&-3&&0&&3&&0&&-1& \\
1&&1&&-3&&-3&&3&&3&&-1&&-1
\end{array}$$

Приведены строки, начиная с $n = 3$ до $n = 7$.

Примеры вполне наглядны: для m-й трапеции с числами $D^{k}_{n,m}$ начальная строка при $n = m$ выглядит как m-я строка в обычном треугольнике Паскаля, но только со знакочередованием.

В рамках новой теории анализ обогащается, ибо к одному треугольнику Паскаля добавляется счетное число объектов похожей природы. Производящей функцией строки (7) является так называемый *бибином* (или двойной бином) вида

$$(1 - x)^{m} \, (1 + x)^{n-m} = \sum_{k=0}^{n} D^{k}_{n,m} x^{k}. \tag{8}$$

Здесь $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $n \geqslant m$. Учет формулы (8) существенно облегчает изучение трапеций Паскаля. Ряд тождеств и соотношений, действующих для чисел $D^{k}_{n,m}$, отмечен в [5]–[7].

Вернемся к задаче о коэффициентах в полиномах Бернштейна. По формуле (5) имеем оценку

$$\bigl| a_{n,m}(f) \bigr| \leqslant 2^{-n} \, C^{m}_{n} \, \eta_{n,m} \, \| f \| , \qquad n \geqslant m, \tag{9}$$

где

$$\eta_{n,m} \equiv \sum_{k=0}^{n} \left| D_{n,m}^{k} \right|, \qquad n \geqslant m. \tag{10}$$

Характеристика (10) весьма интересна. Ясно, что

$$\eta_{n,0} \equiv \sum_{k=0}^{n} |D_{n,0}^{k}| = \sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n, \qquad n \geqslant 0. \tag{11}$$

При последующих $m \in \mathbb{N}$ поведение величины $\eta_{n,m}$ усложняется. Специальным анализом первых двух трапеций Паскаля удается показать, что при $n \to \infty$ действуют асимптотики

$$\eta_{n,1} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{2^n}{\sqrt{n}}, \qquad \eta_{n,2} \sim \sqrt{\frac{8}{\pi e}}\,\frac{2^n}{n}. \tag{12}$$

Второй результат представляется крайне неожиданным из-за присутствия в асимптотике «экзотического» множителя πe. Некоторые детали, связанные с получением оценок (12), раскрыты в [7]. Формулы (11), (12) подсказывают гипотезу, что $\eta_{n,m} \sim M_m\; 2^n\, n^{-m/2}$ при $n \to \infty$, но общий вид множителя M_m установить не просто.

Как отмечено в [7], на основе формулы (9) и с учетом одного специального свойства характеристики (10) получаем следующий результат, существенно уточняющий прежнюю оценку (4).

Теорема 2. *Для величины $S_n(f)$ из формулы (3), выражающей сумму модулей коэффициентов полиномов Бернштейна при алгебраической записи (2) на $[-1,1]$, справедлива оценка*

$$S_n(f) \leqslant 2q^n \, \| f \|, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{13}$$

со значением $q = 3/2$.

Более тонкий анализ выражения (5), без перехода к огрубленной форме (9), позволяет убрать числовой множитель в (13) и получить нужную оценку в виде

$$S_n(f) \leqslant q^n \, \| f \|, \qquad n \in \mathbb{N},$$

где снова $q = 3/2$. Но и такой результат допускает улучшение: сравнительно недавно нам удалось установить, что «правильным» значением основания q в асимптотической оценке сверху для $S_n(f)$ будет не $q = 3/2$, а $q = \sqrt{2}$. Пример $f(x) = |x|$, подробно разобранный в [8], показывает, что значение $q = \sqrt{2}$ уже не уменьшаемо. В этом смысле пример $f(x) = |x|$ оказывается близким к экстремальному.

Литература

1. Stafney J. D. A permissible restriction on the coefficients in uniform polynomial approximation to $C[0, 1]$ / J. D. Stafney // Duke Math. J. — 1967. — Vol. 34, № 3. — P. 393–396.

2. Roulier J. A. Permissible bounds of the coefficients of approximating polynomials / J. A. Roulier // J. Approx. Theory. — 1970. — Vol. 3, № 2. — P. 117–122.

3. Roulier J. A. Restrictions on the coefficients of approximating polynomials / J. A. Roulier // J. Approx. Theory. — 1972. — Vol. 6, № 3. — P. 276–282.

4. Тихонов И. В. О поведении коэффициентов полиномов Бернштейна при алгебраической записи на стандартном отрезке / И. В. Тихонов, В. Б. Шерстюков // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения — 2015. Материалы научной конференции, 13–17 апреля 2015 г. — СПб.: Изд. РГПУ им. А. И. Герцена, 2015. — С. 115–121.

5. Тихонов И. В. Явные выражения для коэффициентов полиномов Бернштейна при алгебраической записи на симметричном отрезке / И. В. Тихонов, В. Б. Шерстюков, М. А. Петросова // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения — 2015. Материалы научной конференции, 13–17 апреля 2015 г. — СПб.: Изд. РГПУ им. А. И. Герцена, 2015. — С. 121–124.

6. Петросова М. А. Комбинаторные соотношения, связанные с полиномами Бернштейна на симметричном отрезке / М. А. Петросова, И. В. Тихонов, В. Б. Шерстюков // Системы компьютерной математики и их приложения. Вып. 17. Материалы XVII Международной научной конференции. — Смоленск: СмолГУ, 2016. — С. 177–182.

7. Тихонов И. В. Новые исследования, связанные с алгебраической записью полиномов Бернштейна на симметричном отрезке / И. В. Тихонов, В. Б. Шерстюков, М. А. Петросова // Системы компьютерной математики и их приложения. Вып. 19. Материалы XIX Международной научной конференции. — Смоленск: СмолГУ, 2018. — С. 336–347.

8. Петросова М. А. О росте коэффициентов в полиномах Бернштейна для стандартного модуля на симметричном отрезке / М. А. Петросова, И. В. Тихонов, В. Б. Шерстюков // Уфимский математический журнал. — 2018. — Т. 10, № 3. — С. 60–78.

О КАЧЕСТВЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ ДВУМЕРНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ КАТОДОЛЮМИНЕСЦЕНЦИИ, ГЕНЕРИРОВАННОЙ НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКИМ ЭЛЕКТРОННЫМ ЗОНДОМ В ОДНОРОДНОМ ПОЛУПРОВОДНИКОВОМ МАТЕРИАЛЕ[1]

Д.В. Туртин[*], **М.А. Степович**[**],
Е.В. Серегина[***] ([*]Иваново, РЭУ им. Г.В. Плеханова,
Ивановский филиал, [**]Калуга, КГУ им. К.Э. Циолковского,
[***]Москва–Калуга, МГТУ им. Н.Э. Баумана (национальный
исследовательский университет), Калужский филиал)
[*]*turtin@mail.ru*, [**]*m.stepovich@rambler.ru*, [***]*evfs@yandex.ru*

Одним из наиболее информативных бесконтактных неразрушающих методов количественного анализа и идентификации локальных параметров материалов полупроводниковой оптоэлектроники является использование катодолюминесцентного (КЛ) излучения, возникающего при взаимодействии остро сфокусированного электронного пучка (электронного зонда) с объектом исследования. Однако ранее задача оценки корректности используемых математических моделей для количественных КЛ исследований не только не рассматривалась, но даже и не ставилась, за весьма небольшим исключением — см., например, [1, 2]. Отсутствие математически корректных моделей во многих случаях не позволяет решить, а нередко даже сформулировать, обратную задачу идентификации параметров исследуемых объектов.

Ранее [1–3] нами рассмотрена задача диффузии неосновных носителей заряда (ННЗ), генерированных электронным зондом в однородном полупроводнике. Проведена оценка корректности прямой задачи: установление существования решения, доказательство единственности решения, обоснование непрерывной зависимости решения от данных задачи (начальных и граничных условий, свободного члена, коэффициентов операторного уравнения).

В настоящей работе рассмотрена математическая модель, описывающая излучательную рекомбинацию ННЗ и спад КЛ после прекращение облучения полупроводника электронами. Рассмотре-

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и правительства Калужской области (проект № 18–41–400001).

ние проведено для электронных пучков низких энергий, что позволяет свести рассматриваемую задачу к двумерной. Для случая линейной рекомбинации ННЗ зависимость интенсивности КЛ от времени $I(t)$ может быть описана как [4]

$$I(t) \sim 2\pi AR \int_0^\infty \left[b(v)/\left(v\,a(v)\right)\right] \Big[1 + \exp\left(-a^2(v)Dt\right) -$$

$$-\mathrm{erf}\left(a(v)\sqrt{Dt}\right)\Big] J_1(vR)\,dv.$$

Здесь $J_1(vR)$ — функция Бесселя первого рода, а остальные соотношения определены в [4].

Получены количественные оценки, сформулированные в виде теорем, устанавливающие условия корректности рассматриваемой задачи. Проведено сравнения результатов расчётов с использованием рассматриваемой модели КЛ с результатами экспериментов.

Литература

1. Polyakov A.N. Mathematical Model of Qualitative Properties of Exciton Diffusion Generated by Electron Probe in a Homogeneous Semiconductor Material / A.N. Polyakov, A.N. Smirnova, M.A. Stepovich, D.V. Turtin // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2018. — Vol. 39, No. 2. — P. 259–262.

2. Туртин Д.В. О качественном анализе одного класса дифференциальных уравнений тепломассопереноса в конденсированном веществе / Д.В. Туртин, Е.В. Серегина, А.Н. Амрастанов, М.А. Степович // Тезисы докладов международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. — Владимир: ООО „Аркаим“, 2018. — С. 204–205.

3. Поляков А.Н. Трехмерная диффузия экситонов, генерированных электронным пучком в полупроводниковом материале: результаты математического моделирования / А.Н. Поляков, М.А. Степович, Д.В. Туртин // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. — 2015. — № 12. — С. 48–52.

4. Поляков А.Н. Математическое моделирование катодолюминесценции экситонов, генерированных узким электронным пучком в полупроводниковом материале / А.Н. Поляков, М.А. Степович, Д.В. Туртин // Известия РАН. Серия физическая. — 2016. — Т. 80, № 12. — С. 1629–1633.

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ДЕСКРИПТОРНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ВОЗМУЩЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ ПРИ ПРОИЗВОДНОЙ

В.И. Усков (Воронеж, ВГЛТУ)
vum1@yandex.ru

Рассматривается уравнение:

$$(A+B)\frac{dx}{dt} = F(t, x(t)), \tag{1}$$

где A, B — линейные замкнутые операторы, действующие в банаховом пространстве E, с областями определения, всюду плотными в E; A — фредгольмов оператор с нулевым индексом; $F(\xi, \eta)$ — заданная достаточно гладкая по совокупности переменных функция; $t \in [0, T]$.

Такие уравнения описывают экономические процессы межотраслевого баланса (уравнение Леонтьева), явления в электрических и гидравлических цепях, продольные колебания в молекулах ДНК и т.д.

Производится регуляризация уравнения (1), то есть разрешение относительно производной. Для этого применяется метод каскадного расщепления уравнения на уравнения в подпространствах [1]. Рассматривается задача Коши для этого уравнения с $F \equiv C(t)x(t) + f(t)$. Определены условия, при которых решение задачи существует, единственно; найдено это решение в аналитическом виде. Приводится пример уравнения (1) с A – матрично-дифференциальным оператором [2], $B = c \cdot I$, $c \in \mathbf{C}$.

Литература

1. Зубова С.П. О разрешимости задачи Коши для дескрипторного псевдорегулярного уравнения в банаховом пространстве / С.П. Зубова // Вестник Воронежского госуниверситета. Серия: Физика. Математика. — 2013. — № 2. — С. 192–198.

2. Зубова С.П., Усков В.И. О свойствах вырожденности некоторого матричного дифференциального оператора / С.П. Зубова, В.И. Усков // Естественные и математические науки: научные приоритеты учёных. Сборник научных трудов по итогам международной научно-практической конференции. — Пермь. — 2016. — Вып. 1. — С. 9–12.

ИЗ ИСТОРИИ РОССИЙСКОЙ ИНФОРМАТИКИ

О.Ф. Ускова, Н.А. Каплиева, О.Д. Горбенко
(Воронеж, ВГУ)
kaplieva@amm.vsu.ru

Прошедший, 2018 год, знаменит не только тем, что наш вуз Воронежский государственный университет отпраздновал свой столетний юбилей, но и тем, что Российской информатике исполнилось 70 лет, днем рождения которой считается 4 декабря 1948 года.

Создателем первых советских и российских ЭВМ является выдающийся российский ученый Исаак Семенович Брук, который в 1939 году выступил на Президиуме Академии наук СССР с докладом о созданном им механическом интеграторе для решения дифференциальных уравнений до шестого порядка.

15 декабря 1951 года успешно завершена работа под руководством член-корреспондента АН СССР И. С. Брука по созданию первой цифровой электронно-вычислительной машины М-1, сконструированной и собранной в СССР. Известные конструкторы, ученики: И. С. Брука стали конструкторами вычислительной техники Б. И. Рамеев (серия «Урал»), М. А. Карцев (М-2, М-10, М-13), Г. П. Лопато (серия «Минск»).

Большой вклад в развитие отечественной вычислительной техники внес выдающийся российский ученый, конструктор вычислительных машин, один из основоположников отечественной электронной вычислительной техники Сергей Алексеевич Лебедев, конструктор знаменитой серии компьютеров БЭСМ, самая удачная из которых БЭСМ-6 (первая в мире выполняющая около миллиона операций в секунду).

Разработчиком первой прикладной компьютерной программы для решения дифференциальной краевой задачи второго порядка (1951 г.) является Селим Григорьевич Крейн (совместно с С. А. Авраменко, С. А. Богомолец). Селим Григорьевич Крейн, математик с мировым именем, заслуженный деятель науки РСФСР, лауреат Государственной премии Украины, плодотворно работал в 60–70 годах прошлого века в Воронежском государственном университете заведующим кафедрой уравнений в частных производных, воспитал несколько поколений математиков профессионалов.

ФРЕЙМЫ ПАРСЕВАЛЯ И ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВИЛЕНКИНА-КРЕСТЕНСОНА

Ю.А. Фарков (Москва, РАНХиГС)
farkov-ya@ranepa.ru

Пусть p и n — натуральные числа, $p \geqslant 2$. Положим $N = p^n$ и $N_1 = p^{n-1}$. Обозначим через $\mathbb{C}_N$ пространство комплексных N-периодических последовательностей со стандартным скалярным произведением. Для любого N-мерного комплексного ненулевого вектора $(b_0, b_1, \ldots, b_{N-1})$, удовлетворяющего условию

$$|b_l|^2 + |b_{l+N_1}|^2 + \cdots + |b_{l+(p-1)N_1}|^2 \leqslant \frac{p}{N^2}, \quad l = 0, 1, \ldots, N_1 - 1,$$

с помощью дискретного преобразования Виленкина-Крестенсона найдены последовательности $u_0, u_1, \ldots, u_r \in \mathbb{C}_N$ такие, что система

$$\{T_{p\,k}u_0\}_{k=0}^{N_1-1} \cup \{T_{p\,k}u_1\}_{k=0}^{N_1-1} \cup \cdots \cup \{T_{p\,k}u_r\}_{k=0}^{N_1-1},$$

где T_k — оператор p-ичного сдвига, является фреймом Парсеваля для $\mathbb{C}_N$. В частных случаях предлагаемый метод построения фреймов Парсеваля приводит к конструкциям из [1,2].

Литература

1. Фарков Ю.А. Дискретные вейвлеты и преобразование Виленкина-Крестенсона / Ю.А. Фарков // Матем. заметки. — 2011. — Т. 89, вып. 6. — С. 914–928.

2. Робакидзе М.Г. Применение функций Уолша к построению фреймов Парсеваля в пространствах периодических последовательностей / М.Г. Робакидзе, Ю.А. Фарков // Современные проблемы теории функций и их приложения: материалы 19-й международной Саратовской зимней школы, посвященной 90-летию со дня рождения академика П.Л. Ульянова. — Саратов: ООО Изд-во «Научная книга», 2018. — С. 265–267.

ОБ ОБЩЕМ РЕШЕНИИ ЛИНЕЙНОГО ОДНОРОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ В СЛУЧАЕ КОМПЛЕКСНЫХ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

В.И. Фомин (Тамбов, ТГТУ)
vasiliyfomin@bk.ru

В банаховом пространстве E рассматривается уравнение

$$y^{(n)} + A_1 y^{(n-1)} + \ldots + A_{n-1} y' + A_n y = 0, \quad 0 \leqslant t < \infty, \qquad (1)$$

где $A_i \in L(E)$, $1 \leqslant i \leqslant n$; $L(E)$ — банахова алгебра ограниченных линейных операторов, действующих из E в E. Структура общего решения уравнения (1) определяется видом его характеристических операторов, т.е. корней характеристического операторного уравнения

$$P(Z) = O, \qquad (2)$$

где $P(Z) = Z^n + A_1 Z^{n-1} + \ldots + A_{n-1} Z + A_n$ — характеристический операторный полином уравнения (1). Уравнение (2) рассматривается в банаховой алгебре [1]

$$C_{L(E)} = [L(E)]^2 = L(E) \times L(E) = \{Z = (A, B) | A, B \in L(E)\}$$

с линейными операциями $(A_1\,, B_1) + (A_2\,, B_2) = (A_1 + A_2\,, B_1 + B_2)$; $\alpha\,(A\,, B) = (\alpha A, \alpha B)$, где $\alpha \in R$; операцией умножения $(A_1\,, B_1) \cdot (A_2\,, B_2) = (A_1 A_2 - B_1 B_2, A_1 B_2 + B_1 A_2)$ и любой из норм $\|\,(A\,, B)\,\| = [\,\|\,A\,\|^p + \|\,B\,\|^p]^{\frac{1}{p}}$, $p \geqslant 1$; $\|\,(A\,, B)\,\| = \max\{\|A\|, \|B\|\}$ (эти нормы эквивалентны [2, с. 103]). Любой комплексный оператор вида $(A\,, O)$ отождествляется с соответствующим оператором $A \in L(E)$: $(A\,, O) = A$, $\forall\, A \in L(E)$, в частности, $(O\,, O) = O$, $(I\,, O) = I$. В силу этого соглашения можно считать, что пространство комплексных операторов является расширением пространства ограниченных линейных операторов: $L(E) \subset C_{L(E)}$. Пространство $C_{L(E)}$ удобно представить в виде $C_{L(E)} = \{Z = A + \mathrm{I} B | A\,, B \in L(E)\}$, где $\mathrm{I} = (O\,, I)$ — мнимая операторная единица (заметим, что $\mathrm{I}^2 = \mathrm{I} \cdot \mathrm{I} = (-I, O) = -I$; в силу этого допустима запись $\mathrm{I} = \sqrt{-I}$). Если $Im Z = O$, то $Z = A \in L(E)$ (такие операторы называются

действительными). Если $ReZ = O$, $ImZ \neq O$, то $Z = \mathrm{I}B$ (такие операторы называются чисто мнимыми).

Пусть характеристический полином $P(Z)$ уравнения (1) имеет p простых действительных корней $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_p$ и q пар простых чисто мнимых сопряжённых корней $Z_1 = \mathrm{I}B_1$, $\bar{Z}_1 = -\mathrm{I}B_1$, ..., $Z_q = \mathrm{I}B_q$,$\bar{Z}_q = -\mathrm{I}B_q$, при этом $p+2q = n$. При выполнении условий $A_k\,\Lambda_i = \Lambda_i\,A_k$, $A_k\,B_j = B_j\,A_k$, $1 \leqslant k \leqslant n$, $1 \leqslant i \leqslant p$, $1 \leqslant j \leqslant q$, уравнение (1) имеет n-параметрическое семейство решений

$$y = \sum_{i=1}^{p} e^{\Lambda_i t} w_i + \sum_{j=1}^{q} (\cos B_j\,t) x_j + \sum_{j=1}^{q} (\sin B_j\,t) z_j, \qquad (3)$$

где w_i, x_j, z_j $(1 \leqslant i \leqslant p, 1 \leqslant j \leqslant q)$ — произвольные элементы из E (свободные параметры). Семейство решений (3) уравнения (1) будет общим решением этого уравнения, если при любом фиксированном наборе начальных значений y_0, y_0', ..., $y_0^{(n-1)}$ решение задачи Коши для уравнения (1) с начальными условиями

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_0', \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)} \qquad (4)$$

принадлежит семейству (3). Пусть, для определённости, порядок n уравнения (1) нечётен. Тогда начальные условия (4) принимают вид

$$\begin{gathered} \sum_{i=1}^{p} w_i + \sum_{j=1}^{q} x_j = y_0, \\ \sum_{i=1}^{p} \Lambda_i^{2l-1} w_i + \sum_{j=1}^{q} (-1)^{l+1} B_j^{2l-1} z_j = y_0^{(2l-1)}, \\ \sum_{i=1}^{p} \Lambda_i^{2l} w_i + \sum_{j=1}^{q} (-1)^{l} B_j^{2l} x_j = y_0^{(2l)} \end{gathered} \qquad (5)$$

$(l = 1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2})$. С помощью операторно-векторного правила Крамера решения систем линейных векторных уравнений в банаховом пространстве [3] указаны условия, при которых система уравнений (5) является определённой, найдено её решение. Таким образом, решение задачи Коши (1), (4) получается из формулы (3) подстановкой в неё вместо свободных параметров соответствующих компонент решения системы уравнений (5).

Литература

1. Фомин В.И. О банаховой алгебре комплексных операторов / В.И.Фомин // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. — 2018. — Т. 23, № 124. — С. 813–823.

2. Данфорд Н. Линейные операторы. Общая теория / Н. Данфорд, Дж. Шварц. — М.: Издательство иностранной литературы, 1962. — 896 с.

3. Фомин В.И. Об общем решении линейного дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными ограниченными операторными коэффициентами в банаховом пространстве / В.И. Фомин // Дифферен. уравнения. — 2005. — Т. 41, № 5. — С. 656–660.

МАТОЖИДАНИЕ НЕЗАВЕРШЕННОЙ РАБОТЫ В СМО С БЕСКОНЕЧНЫМ НАКОПИТЕЛЕМ, ДИФФУЗИОННОЙ ИНТЕНСИВНОСТЬЮ ВХОДНОГО ПОТОКА И НУЛЕВЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ СНОСА

Е.С. Фролова, Т.А. Жук, Н.И. Головко
(Владивосток, ДФУ)
eu.frolova@yandex.ru, Tatyana_zhukdv@mail.ru, ygolovko@yahoo.com

При анализе показателей качества функционирования информационных сетей применяются системы массового обслуживания в качестве моделей информационных систем и их элементов. Статистический анализ потока заявок, поступающих на web-серверы, показывает диффузионный характер изменения интенсивности входного пуассоновского потока. В данной работе исследуется математическая модель СМО в виде системы уравнений относительно стационарных характеристик незавершенной работы в СМО с диффузионной интенсивностью входного потока. Находится в явном виде среднее значение незавершенной работы в стационарном режиме.

Рассматривается система массового обслуживания с одним обслуживающим прибором, экспоненциальным обслуживанием с параметром μ и бесконечной емкостью накопителя. На вход СМО поступает дважды стохастический пуассоновский поток заявок, интенсивность которого $\lambda(t)$ представляет собой диффузионный процесс с нулевым коэффициентом сноса $a = 0$ и коэффициентом диффузии $b > 0$. Случайный процесс $\lambda(t)$ принимает значения на интервале $[\alpha, \beta]$ с упругими границами.

Обозначим $q_k(x) = \mathsf{P}\{\nu = k,\ x < \lambda < x + dx\}/dx$, где ν — число заявок в СМО и λ — интенсивность входного потока в стационарном режиме; $q_k(x)$ — стационарные характеристики числа заявок, $k \geqslant 0$; $f(x) = \mathsf{P}\left\{x < \lambda < x + dx\right\}/dx$ — стационарная плотность λ, $x \in [\alpha, \beta]$, $U(t)$ — незавершенная работа системы в момент времени

---

t, U — незавершенная работа в стационарном режиме. Незавершенная работа $U(t)$ представляет собой время, необходимое для освобождения системы от всех заявок, находящихся в ней в момент t. В момент прихода очередной заявки незавершенная работа равна времени ожидания заявкой начала обслуживания.

Обозначим через $\mathbf{h}(\omega, x) = \mathsf{P}\{U \leqslant \omega; x < \lambda(t) < x + dx\}/dx$, $h(\omega) = \mathbf{h}'_\omega(\omega, x)$ — стационарную функцию и плотность распределения незавершенной работы, соответственно. В работе [1] приведено для рассматриваемой СМО полученное с применением динамики Колмогорова уравнение относительно $\mathbf{h}(\omega, x)$.

В данной работе получены краевые условия для $\mathbf{h}(\omega, x)$:

$$\mathbf{h}'_x(\omega, x_i) = 0, x_1 = \alpha, x_2 = \beta.$$

Обозначим преобразование Лапласа-Стилтьеса

$$h_c(r, x) = \int_{0^-}^{\infty} e^{-rw} h(\omega, x) d\omega, r \in \mathrm{C}, |r| \geqslant 0,$$

плотность по x матожидания незавершенной работы

$$MU(x) = \int_{0^-}^{\infty} \omega h(\omega, x) d\omega = E(x).$$

В результате применения преобразования Лапласа-Стилтьеса к уравнениям для $\mathbf{h}(\omega, x)$ получены уравнения для $h_c(r, x)$.

Теорема 1. *Если в СМО существует стационарный режим, то функция $h_c(r, x)$ удовлетворяет задаче Коши*

$$h_c(r, x) r \Big(1 - x(r + \mu)^{-1}\Big) + b h''_{c_{xx}}(r, x)/2 = r q_0(x), \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$h'_{c_x}(r, x_i) = \frac{\partial h_c(r, x)}{\partial x}\Big|_{x = x_i} = 0, x_1 = \alpha, x_2 = \beta.$$

Из (1) при $r = 0$ получим $h_c(0, x) = f(x) = (\beta - \alpha)^{-1}$. После дифференцирования левой и правой частей (1) по r и приравнивания $r = 0$ следует краевая задача относительно $E(x) = -h'_{c_r}(0, x)$. Решение данной краевой задачи получено в явном виде:

$$E(x) = (2/b) \int_{\alpha}^{x} (x - u) \Big[f(u)(1 - u/\mu) - q_0(u) \Big] du,$$

откуда среднее значение незавершенной работы $MU = \int_{\alpha}^{\beta} E(x)dx$.

Литература

1. Фролова Е.С. Уравнения для незавершенной работы в СМО с бесконечным накопителем, диффузионной интенсивностью входного потока с нулевым коэффициентом сноса / Е.С. Фролова, Т.А. Жук, Н.И. Головко // Современные методы теории краевых задач : материалы Воронеж. весен. мат. школы. — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2017. — С. 163–165.

ПРИБЛИЖЕННЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ГИДРАТООБРАЗОВАНИИ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ[1]

М.К. Хасанов, Н.Г. Мусакаев, С.Л. Бородин
(Стерлитамак, Стерлитамакский филиал БашГУ,
Тюмень, ТюмФ ИТПМ СО РАН,
Тюменский индустриальный университет)
hasanovmk@mail.ru

На основе методов и подходов механики многофазных сред [1] построена система нелинейных дифференциальных уравнений, описывающая течение газа в пористой среде с учетом образования газогидрата. Получены автомодельные решения задачи, описывающие распределения давления и температуры в отдельных областях пласта. При подстановке этих решений в соотношения на границе фазовых переходов возникает система трансцендентных уравнений, в общем случае допускающая решение только с использованием численных методов. Принципиальный интерес представляет получение аналитического решения, устанавливающего определенный вид функциональной зависимости координаты границы фазового перехода от параметров инжектируемого газа и пористой среды.

При построении приближенного аналитического решения использованы результаты расчетов, которые показали, что распределение температуры в пласте близко к ступенчатому со скачком температуре на фронте образования газового гидрата. С учетом этого обстоятельства получено решение со скачком температуры на границе фазовых переходов в виде функции координаты этой границы от значений давления и температуры на ней. При этом расчетным путем установлено, что при высоких значениях абсолютной

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-29-10023)

проницаемости пористой среды значение давления на границе образования газового гидрата приближается к значению начального давления в пласте, а значение температуры на этой границе – к значению равновесной температуры гидратообразования, соответствующей исходному давлению в пористом коллекторе.

Литература

1. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч. 2. / Р.И. Нигматулин. — М. : Наука, 1987. — 360 с.

О СУММИРОВАНИИ РЯДОВ ФУРЬЕ МЕТОДОМ ВОРОНОГО

Ю.Х. Хасанов, Ё.Ф. Касымова (Душанбе, РТСУ)
yukhas60@mail.ru

Пусть измеримая и интегрируемая по Лебегу периода 2π функция $f(x)$ имеет соответствующий ряд Фурье. Линейным оператором, или (W, p_n)–средними Вороного [1] называются средние вида

$$W_n(f;x;p_n) = \frac{1}{P_n}\sum_{k=0}^{n} p_{n-k}S_k(f;x),$$

где $p_0 > 0,\ \ p_k \geqslant 0\ \ (k = 1, 2, \ldots),\ \ P_n = p_0 + p_1 + \ldots + p_n;$

$$S_k(f;x) = \sum_{v=0}^{k} A_v(x)$$

–частные суммы порядка k ряда Фурье функции $f(x)$.

В этой работе докажем утверждение, в котором для каждого $n > 1$, содержится оценка сверху величины

$$\rho(f;x;W_n) = |f(x) - W_n(f;x;p_n)| \to 0\ \ (n \to \infty)$$

через последовательность наилучших приближений функции в равномерной метрике.

Теорема. *Пусть $f(x)$ – непрерывная, периодическая периода 2π функция. Тогда имеет место следующая оценка*

$$\rho(f;x;W_n) \leqslant \frac{C}{P_n}\sum_{\nu=0}^{m+1}\left\{2^{\nu}\sum_{k=2^{\nu}-1}^{2^{\nu+1}} p_{n-k}^2\right\}^{1/2} E_{2^{\nu}-1}(f),$$

© Хасанов Ю.Х., Касымова Ё.Ф., 2019

где

$$E_k(f) = \max_x |f(x) - T_k(x)|,$$

$T_k(x)$ – тригонометрический полином порядка не выше k осуществляющий наилучшее приближение функции $f(x)$ в равномерной метрике, $2^m \leqslant n \leqslant 2^{n+1}$, C – независимая константа.

Литература

1. Барон С.А. Введение в теорию суммируемости рядов / С.А. Барон. — Таллинн : Валгус, 1977. — 280 с.

ОБ ОПТИМАЛЬНЫХ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ОЦЕНКАХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

В.Л. Хацкевич (Воронеж, ВУНЦ ВВС Военно-воздушная академия им. проф. Н.Е.Жуковского и Ю.А.Гагарина)
vlkhats@mail.ru

Пусть имеется n наблюдаемых случайных величин $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$, характеризующих значения ненаблюдаемой величины η. Будем предполагать, что случайные величины η и ξ_i $(i = 1, 2, ..., n)$ имеют конечные вторые моменты, а также, что случайные величины ξ_i $(i = 1, 2, ..., n)$ попарно независимы. Кроме того, для упрощения формулировок, будем считать, что математическое ожидание $E\eta = 0$. Обозначим $X_i = E(\eta|\xi_i)$ — условное математическое ожидание случайной величины η относительно ξ_i $(i = 1, 2, ..., n)$. Как известно, регрессия X_i дает наилучшую оценку η в случае одномерного приближения (борелевской функцией от ξ_i). По формуле полного математического ожидания $EX_i = E\eta = 0$ $(i = 1, 2, ..., n)$. Пусть $\delta_i^2 = DX_i$ — дисперсии случайных величины X_i $(i = 1, 2, ..., n)$, а $\sigma^2 = D\eta$ — дисперсия случайной величины η.

В качестве оценки случайной величины η будем рассматривать квазилинейное выражение $Z_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i X_i$ с некоторыми вещественными коэффициентами α_i. Рассмотрим задачу о подборе коэффициентов α_i так, чтобы минимизировать среднеквадратическую ошибку

$$E\Big(\eta - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i\Big)^2 \to \min . \tag{1}$$

Оказывается, что оптимальными являются коэффициенты $\alpha_i = 1$ $(i = 1, 2, ..., n)$. А именно имеет место

Теорема 1. *Оценка $\eta_{опт}$, определяемая формулой*

$$\eta_{\text{опт}} = \sum_{i=1}^{n} X_i, \tag{2}$$

обеспечивает минимум среднеквадратической ошибки (1) по всем действительным α_i. Этот минимум равен $\sigma^2 - \sum\limits_{i=1}^{n} \delta_i^2$. Оптимальная оценка является несмещенной, т.к. $E\eta_{\text{опт}} = E\eta = 0$. Кроме того, $\eta_{\text{опт}}$ обладает максимальным корреляционным свойством, а именно, справедливы следующие утверждения

Теорема 2. *Оценка $\eta_{опт}$ (2) обладает наибольшим коэффициентом корреляции с η по сравнению с другими оценками вида $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i X_i$ $(i = 1, 2, ..., n)$.*

Теорема 3. *Оценка $\eta_{опт}$ (2) обладает наибольшим коэффициентом корреляции с η по сравнению с другими оценками вида $\sum\limits_{i=1}^{n} \varphi_i(\xi_i)$, где φ_i — произвольные борелевские функции, такие что $E(\varphi_i(\xi_i)) = 0$ $(i = 1, 2, ..., n)$.*

Результаты, предъявленные в настоящей работе, относятся к теории статистической регрессии (см., напр., [1] §5.6, [2] гл. 26–28). Однако ранее, по-видимому, не приводились.

Литература

1. Ивченко Г.И. Математическая статистика / Г.И. Ивченко, Ю.И. Медведев. — М. : Высшая школа, 1992. — 304 с.

2. Кендалл М. Статистические выводы и связи / М. Кендалл, А. Стюарт. — М., 1973. — 472 с.

ПОЧТИ ВЫПУКЛОСТЬ И ОГРАНИЧЕННОСТЬ ДИАМЕТРОВ БЛИЖАЙШИХ ЭЛЕМЕНТОВ [1]

И.Г. Царьков (Москва, МГУ)
tsar@mech.math.msu.su

Для произвольного множества M в некотором линейном нормированном пространстве X через $\varrho(y, M)$ $(y \in X,\ M \subset X)$ обозначим расстояние до множества M, т.е. величину $\inf\limits_{z \in M} \|z - y|$. Через $P_M x$ обозначим множество всех ближайших точек из M для $x \in X$, т.е.

---

[1] Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 16-01-00295-а.

множество $\{y \in M \mid \|y-x| = \varrho(x,M)\}$. Отображение P_M называют метрической проекцией на множество M. Через $\operatorname{conv} M$ и $\overline{\operatorname{conv}}\, M$ обозначим соответственно выпуклую оболочку M и ее замыкание.

Нами будет получена более точная, чем в работе [1], оценка почти выпуклости приближающего множества, у которого в гильбертовом пространстве $\operatorname{diam} P_M x \leqslant \varepsilon$ для всех $x \in X$. Аналогичные оценки почти выпуклости в аналогичной задаче для равномерно гладких и выпуклых пространств также могут быть получены.

В банаховом пространстве X можно рассмотреть величину

$$J(X) = \sup\left\{\frac{R(M,X)}{\operatorname{diam} M} \mid M : 0 < \operatorname{diam} M < \infty\right\},$$

где $R(M,X) = \inf\{R > 0 \mid M \subset B(z,R)\}$ — чебышевский радиус. Число $J(X)$ называют константой Юнга пространства X. Известно, что в конечномерном гильбертовом пространстве H: $\dim H = m$ эта константа равна $J_m = J(H) = \sqrt{\frac{m}{2(m+1)}}$. Для бесконечномерного гильбертова пространства $J_\infty = J(H) = \sqrt{\frac{1}{2}}$.

Теорема 1. *Пусть* H *— гильбертово пространство,* $\dim H = n \in \overline{\mathbb{N}}$*,* $n \geqslant 2$*,* $M \subset H$ *такое аппроксимативно компактное множество, что* $\varrho(x,M) \geqslant a > \varepsilon J_{n-1}$*,* $\operatorname{diam} P_M x \leqslant \varepsilon$ *для всех* $x \in H$*. Тогда* $N = \overline{\operatorname{conv}}\, M \subset \overline{O_a(M)}$*.*

Отметим, что оценка почти выпуклости (радиус окрестности M) точна на классе всех аппроксимативно компактных подмножеств $M \subset H$, для которых $\operatorname{diam} P_M(x) \leqslant \varepsilon$ для всех $x \in H$.

Следствие. *Пусть* H *— гильбертово пространство,* $\dim H = n \in \overline{\mathbb{N}}$*,* $n \geqslant 2$*,* $M \subset H$ *— аппроксимативно компактно,* $\operatorname{diam} P_M(x) \leqslant \varepsilon$ *для всех* x*:* $\varrho(x,M) \geqslant \varepsilon J_{n-1}$*. Тогда граница* $N = \overline{\operatorname{conv}}\, M$ *содержится в* $\overline{O_{\varepsilon J_{n-1}}(M)}$*.*

Литература

1. Moors W. B. Nearly chebyshev sets are almost convex // Set-Valued Var. Anal. Springer Science+Business Media B.V. 2017. P.1–10. DOI 10.1007/s1128-017-0445-4.

ОБ ОДНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ В ТЕОРИИ МАГНИТОСОПРОТИВЛЕНИЯ

Д.А. Чечин (Воронеж, ВГУ)

В классической физике явления электропроводности определяются видом неравновесной функции распределения f в фазовом пространстве $(\vec{p}, \vec{r})$, которая находится из решения кинетического уравнения Больцмана [1]:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \vec{r}}\frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \vec{p}}\frac{d\vec{p}}{dt} = I(f), \tag{1}$$

где $I(f)$ — интеграл столкновений. Замена производных $d\vec{r}/dt$ на $\vec{v}$ и $d\vec{p}/dt$, с использованием второго закона Ньютона, на силу $\vec{F}$, приводит к уравнению вида:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \vec{F}\frac{\partial f}{\partial \vec{p}} = I(f). \tag{2}$$

Интеграл столкновений $I(f)$ связан с конкретными процессами рассеяния. В изотропной модели с упругим рассеянием электронов, когда происходит релаксация импульса без релаксации энергии, обычно применяется релаксационное приближение для интеграла столкновений:

$$I(f) = -(f - f_0)/\tau,$$

где f_0 — равновесная функция распределения, а τ — среднее время между столкновениями. Величина плотности тока выражается в этом случае через функцию распределения следующим образом:

$$\vec{j} = 2e\int \vec{v} f \frac{d\vec{p}}{(2\pi\hbar)^3}. \tag{3}$$

Уравнение движения электрона в магнитном поле имеет вид:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{e}{c}\vec{v} \times \vec{H} = \vec{F}. \tag{4}$$

Интегралами движения являются энергия $\varepsilon = const$, так как

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \vec{p}}\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v}\vec{F} = 0, \tag{5}$$

и проекция импульса $p_z = const$, если магнитное поле направлено по оси Oz. Учитывая уравнения движения (4) в форме

$$\frac{dp_x}{dt} = \frac{e}{c} v_y H, \quad \frac{dp_y}{dt} = -\frac{e}{c} v_x H, \tag{6}$$

получаем:

$$\frac{dp_x^2 + dp_y^2}{dt^2} = \left(\frac{e}{c} H\right)^2 (v_x^2 + v_y^2).$$

Так как $\sqrt{dp_x^2 + dp_y^2} = dl$ есть элемент длины в импульсном пространстве, то

$$\frac{dl}{dt} = \frac{e}{c} H v_\perp, \quad v_\perp = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}.$$

Иначе говоря,

$$dt = \frac{c}{eH} \frac{dl}{v_\perp}, \quad t = \frac{c}{eH} \int \frac{dl}{v_\perp}. \tag{7}$$

Если траектория электрона замкнутая, то этот интеграл можно вычислять по всему контуру, и при этом мы получим период движения:

$$T = \frac{c}{eH} \oint \frac{dl}{v_\perp}. \tag{8}$$

Площадь плоскости $p_z = const$ изображается интегралом $S = \int dp_x dp_y$.

Вместо того, чтобы вычислять такой интеграл непосредственно, можно изобразить в плоскости $p_z = const$ кривые $\varepsilon = const$ и интегрировать вдоль этих контуров и по нормали к ним. Кольцо, образованное двумя контурами с ε, отличающимися на $d\varepsilon$, имеет в данном месте ширину:

$$d\varepsilon \left|\partial\varepsilon / \partial\vec{p}_\perp\right|^{-1} = d\varepsilon / v_\perp.$$

Площадь кольца равна $d\varepsilon \oint dl/v_\perp$ (интеграл берётся вдоль контура), а площадь плоскости $p_z = const$ изображается интегралом

$$S = \int d\varepsilon \oint \frac{dl}{v_\perp}.$$

Сравнивая с (8), находим, что период движения равен

$$T = \frac{c}{eH} \frac{\partial S}{\partial \varepsilon}. \tag{9}$$

Введём так называемую “циклотронную массу”

$$m_c = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial S}{\partial \varepsilon}. \tag{10}$$

С учётом последней формулы период выражается в виде

$$T = \frac{2\pi c m_c}{eH}. \tag{11}$$

Угловая частота $\Omega = 2\pi/T = eH/(m_c c)$ называется ларморовской или циклотронной частотой. Циклотронная масса может быть определена лишь для замкнутых орбит. В присутствии магнитного поля удобно ввести, вместо p_x и p_y, две новые переменные: энергию ε и “время движения по траектории”

$$t_1 = \frac{c}{eH}\int \frac{dl}{v_\perp}.$$

Надо иметь ввиду, что в данном случае это не истинное время, а некоторая функция p_x и p_y, связанная с ними уравнениями (6). Таким образом, получаем

$$\int dp_x dp_y = \int d\varepsilon \frac{dl}{v_\perp}.$$

Но так как $(c/eH)\, dl/v_\perp = dt_1$, то в новых переменных интеграл по импульсам приобретает вид

$$\frac{2}{(2\pi\hbar)^3}\int dp_x dp_y dp_z = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3}\frac{eH}{c}\int dp_z dt_1 d\varepsilon. \tag{12}$$

Кинетическое уравнение при наличии постоянных электрического и магнитного полей может быть написано в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t_1}\dot{t}_1 + \frac{\partial f}{\partial p_z}\dot{p}_z + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}\dot{\varepsilon} = I(f). \tag{13}$$

Для $\dot{\varepsilon}$ имеем

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \vec{p}}\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v}\frac{d\vec{p}}{dt}.$$

В присутствии электрического и магнитного полей

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{e}{c}\vec{v}\times\vec{H} + e\vec{E}, \tag{14}$$

поэтому

$$\dot{\varepsilon} = e\vec{v}\vec{E}, \tag{15}$$

$$\dot{p}_z = eE_z. \tag{16}$$

Переменная t_1 определяется из уравнений (6), которые отличаются от (14) отсутствием электрического поля. Но в металлах для не слишком слабых магнитных полей $(v/c)H$ всегда больше E. Поэтому разница между t_1 и t мала и $dt_1/dt \approx 1$. Итак, мы получаем

$$\frac{\partial f}{\partial t_1} + \frac{\partial f}{\partial p_z} eE_z + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} e\vec{v}\vec{E} = I(f). \tag{17}$$

Будем искать f в виде

$$f = f_0 - \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}\psi. \tag{18}$$

Так как ε, p_z и t_1 — независимые переменные, то надо считать f_0 не зависящим от p_z. Ввиду этого подстановка (18) в (17) даёт в низшем порядке по ψ

$$\frac{\partial \psi}{\partial t_1} - I(\psi) = e\vec{v}\vec{E}. \tag{19}$$

Это общее уравнение, которое решается в разных конкретных случаях. Его надо дополнить граничными условиями по t_1: для замкнутых траекторий функция ψ должна периодически зависеть от t_1. Если же траектория открытая, то функция ψ не обязана быть периодической, но должна быть везде конечной. Эти условия дают однозначное решение уравнения (19).

Литература

1. J. Reichert, R. Ochs, D. Beckmann, H. B. Weber, M. Mayor, and H. v. Lohneysen. *Driving Current through Single Organic Molecules* // Phys. Rev. Lett., **88**, 176804 (2002).

2. Matthew R. Sullivan, Douglas A. Boehm, Daniel A. Ateya, Susan Z. Hua, and Harsh Deep Chopra. *Ballistic magnetoresistance in nickel single-atom conductors without magnetostriction* // Phys. Rev. B, **71**, 024412 (2005).

3. Абрикосов А.А. Основы теории металлов / А.А. Абрикосов. — М. : Наука, 1987.

4. Абрикосов А.А. Квантовый эффект Холла / А.А. Абрикосов. — М. : Мир, 1989.

5. R. Landauer. IBM J. Res. Dev., **1**, 223 (1957).

6. B. J. van Wees, H. van Houten, C. W. J. Beenakker, J. G. Williamson, L. P. Kouwenhoven, D. van der Marel, and C. T. Foxon. Quantized conductance of point contacts in a two-dimensional electron gas // Phys. Rev. Lett., **60**, 848 (1988).

О СКОРОСТИ РОСТА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ОДНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С ПРОИЗВОДНЫМИ РАДОНА–НИКОДИМА

С.А. Шабров, М.В. Шаброва,
Ф.В. Голованева (Воронеж, ВГУ)
shabrov_ s_ a@math.vsu.ru

В работе метод, изложенный в [1], адаптируется для оценки роста собственных значений спектральной задачи

$$\left\{ \begin{array}{l} Lu \equiv (pu''_{xx})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_\sigma + uQ'_\sigma = \lambda M'_\sigma u; \\ u(0) = u'(0) = u(\ell) = u'(\ell) = 0. \end{array} \right. \tag{1}$$

Данная спектральная задача возникает при применении метода Фурье в математической модели, которая описывает малые собственные колебания растянутого стержня, оба конца которого защемлены, и помещенного во внешнюю среду с локализованными особенностями, приводящими к потере гладкости.

Коэффициент $p(x)$ характеризует материал, из которого изготовлен стержень; положителен на отрезке $[0, \ell]$; функция $r(x)$ — сила натяжения струны в точке x; $Q(x)$ определяет упругую реакцию внешней среды, $F(x)$ — внешнюю силу, а $M(x)$ — масса участка $[0, x)$, σ — мера, порождаемая функцией $\sigma(x)$, содержит все особенности системы — это точки, в которых имеются локализованные особенности. Через $S(\sigma)$ обозначим множество точек разрыва функции $\sigma(x)$.

Решение задачи (1) мы ищем в классе E абсолютно непрерывных на $[0, \ell]$ функций $u(x)$, первая производная которых абсолютно непрерывна на $[0, \ell]$; квазипроизводная pu''_{xx} абсолютна непрерывна на $[0, \ell]$; $(pu''_{xx})'_x$ — σ-абсолютно непрерывна на $[0, \ell]$.

Под решением будем понимать функцию, принадлежащую классу E, и удовлетворяющую граничным условиям.

Под собственным значением граничной задачи будем называть всякое число λ для которого существует нетривиальное решение; эту функцию называют собственной функцией, отвечающей этому собственному значению.

Мы предполагаем, что выполняются вполне физические условия: $p(x)$, $r(x)$, $Q(x)$ и $F(x)$ — функции ограниченной на $[0,\ell]$ вариации, $Q(x)$ — неубывающая на $[0,\ell]$ функция и $\inf\limits_{x\in[0,\ell]} p(x) > 0$, $r(x) \geqslant 0$.

Уравнение в (1) определено на специальном расширении $\overline{[0,\ell]}_\sigma$ отрезка $[0,\ell]$, в котором каждая точка $\xi \in S(\sigma)$ заменена на тройку собственных элементов $\{\xi - 0; \xi; \xi + 0\}$.

Множество $\overline{[0,\ell]}_\sigma$ строится следующим образом. На $[0,\ell]$ вводим метрику $\rho(x,y) = |\sigma(x) - \sigma(y)|$. Если $S(\sigma) \neq \varnothing$, то $([0,\ell],\rho)$ является неполным метрическим пространством. Стандартное пополнение и приводит к $\overline{[0,\ell]}_\sigma$.

Доказана теорема.

Теорема 1. *Пусть $p(x)$, $r(x)$, $Q(x)$ и $F(x)$ — σ–абсолютно непрерывны на $[0,\ell]$, $Q(x)$ — не убывает на $[0,l]$ и $\inf\limits_{x\in[0,\ell]} p(x) > 0$, $\inf\limits_{x\in[0,\ell]} r(x) \geqslant 0$. Пусть $\{\lambda_n\}$ — собственные значения задачи* (1). *Тогда ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_n|^{2/5+\delta}} \tag{2}$$

сходится при любом $\delta > 0$.

Эта теорема усиливает результат, полученный в [2].

Литература

1. Ловитт У.В. Линейные интегральные уравнения / У. В. Ловитт. — М.: Гос. изд. тех-теор. лит–ры, 1957. — 267 с.

2. Шабров С.А. О скорости роста собственных значений одной спектральной задачи четвертого порядка с производными по мере / С.А. Шабров, Н.И. Бугакова, Е.А. Шайна // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2018. — № 4. — С. 206–214.

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ МАЛЫХ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ

Е.А. Шайна (Воронеж, ВГУ)
katerinashaina@mail.ru

В работе доказывается, что математическая модель

$$\begin{cases} M'_\sigma(x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \\ = -\dfrac{\partial}{\partial\sigma}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\dfrac{\partial}{\partial\mu}\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial\sigma}\left(r(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) - \dfrac{dQ}{d\sigma}u + f(x,t), \\ \left(pu''_{x\mu}\right)(0,t) - \gamma_1 u'_x(0,t) = 0, \\ \left(pu''_{x\mu}\right)'_x(0,t) - \left(ru'_x\right)(0) + \gamma_2 u(0,t) = 0, \\ \left(pu''_{x\mu}\right)(\ell,t) + \gamma_3 u'_x(\ell,t) = 0, \\ \left(pu''_{x\mu}\right)'_x(\ell,t) - \left(ru'_x\right)(\ell,t) - \gamma_4 u(\ell,t) = 0; \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \varphi_1(x), \end{cases} \qquad (1)$$

возникающая при моделировании малых вынужденных поперечных колебаний системы, состоящей из растянутых стержней, которые соединены шарнирно; в каждой точке шарнирного соединения имеется пружина, реагирующая исключительно на поворот; система находится во внешней среде, локальный коэффициент упругости которой равен dQ; коэффициент $p(x)$ характеризует материал из которого сделан стержень и отвечает за изгибную жесткость; $r(x) \geqslant 0$ — сила натяжения стержневой системы в точке x; функция $\mu(x)$ имеет особенности (ввиде скачков) в точках шарнирного соединения; $f(x,t)$ — сосредоточенная сила (если таковая присутствует), приложенная в точке шарнира в момент времени t, или плотность силы во всех остальных точках; мера σ, порождаемая строго возрастающей функцией $\sigma(x)$, содержит в себе все особенности модели — это и точки шарнирного соединения, и точки в которых локализованы особенности внешней среды, и присутствуют сосредоточенные массы; $M(x)$ — распределение масс на системе, причем скачки $M(x)$ соответствуют случаю сосредоточенных масс. К каждой точке $x = 0$ и $x = \ell$ присоединены еще по две пружины жесткостью γ_1, γ_2 и γ_3, γ_4 соответственно. Первая пружина, присоединенная к левому концу системы, реагирует на крутящий момент,

---

возникающий в точке $x = 0$, а вторая — на смещение левого конца. Аналогично для пружин, находящихся на правом конце.

Через $S(\sigma)$ — обозначим точки разрыва функции $\sigma(x)$; σ-мера каждой точки $\xi \in S(\sigma)$ равна $\sigma\{\xi\} = \sigma(\xi + 0) - \sigma(\xi - 0)$. В точках, принадлежащих $S(\sigma)$, уравнение в (1) принимает вид

$$\Delta M(\xi) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\xi, t) =$$
$$= -\Delta \left(\left(p(x) u''_{x\mu} \right)'_x \right)(\xi, t) + \Delta \left(r u'_x \right)(\xi, t) - u(\xi, t) \Delta Q(\xi) + f(\xi, t), \tag{2}$$

где $f(\xi, t)$ характеризует сосредоточенную силу, приложенную в точке ξ в момент времени t. Помимо (2) в точке ξ «присутствуют» еще три условия:

$$u(\xi - 0, t) = u(\xi + 0, t),$$
$$p(\xi) \frac{\Delta u'_x(\xi, t)}{\Delta \mu(\xi)} = p(\xi - 0) u''_{x\mu}(\xi - 0, t) = p(\xi + 0) u''_{x\mu}(\xi + 0, t).$$

Далее мы будем предполагать, что $S(\sigma) = S(\mu)$, т. е. дополнительных особенностей, порождаемые внешней средой и силой, не возникает.

Решение математической модели (1) мы ищем в классе E функций $u(x, t)$, каждая из которых непрерывна на $[0; \ell] \times [0; T]$; имеет непрерывные производные по переменной t до второго порядка включительно при фиксированном x; при постоянном t $u(x, t)$ абсолютно непрерывна по x на $[0; \ell]$; $u'_x(x, t)$ — μ-абсолютно непрерывна на $[0; \ell]$; $p(x) u''_{x\mu}(x, t)$ — абсолютно непрерывна на $[0; \ell]$; $\left(p u''_{x\mu} \right)'_x (x, t)$ — σ-абсолютно непрерывна на $[0; \ell]$; производные $u'''_{tx\mu}(x, t)$ и $u'''_{x\mu t}(x, t)$ равны почти всюду (в смысле меры $[\mu \times t]$ заданной на прямоугольнике $[0; \ell] \times [0; T]$); производные $u''_{tx}(x, t)$ и $u''_{xt}(x, t)$ равны почти всюду в смысле меры Лебега заданной на $[0; \ell] \times [0; T]$.

Теорема 1. *Пусть $p(x)$, $r(x)$ и $Q(x)$ — σ-абсолютно непрерывны на $[0; \ell]$; $p(x) > 0$, $r(x) \geqslant 0$ и $Q'_\sigma(x) \geqslant 0$, $f(x, t)$ непрерывна по совокупности переменных. Математическая модель (1) не может иметь двух различных решений в классе E.*

Литература

1. Баев, А. Д. О единственности решения математической модели вынужденных колебаний струны с особенностями / А. Д. Баев,

С. А. Шабров, Меач Мон // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2014. — № 1. — С. 50–55.

2. О единственности классического решения математической модели вынужденных колебаний стержневой системы с особенностями / А. Д. Баев, С. А. Шабров, Ф. В. Голованёва, Меач Мон // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2014. — № 2. — С. 74–80.

3. Шабров, С. А. Об одной математической модели малых деформаций стержневой системы с внутренними особенностями / С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2013. — № 1. — С. 232–250.

4. Шабров С.А. О скорости роста собственных значений одной спектральной задачи четвертого порядка с производными по мере / С.А. Шабров, Н.И. Бугакова, Е.А. Шайна // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. : Физика, математика. — 2018. — № 4. — С. 206–214.

О КАНТОРОВОЙ КОМПОНЕНТЕ СПЕКТРА ОПЕРАТОРА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ

А.Ш. Шалданбаев, М.Т. Шоманбаева, И.О. Оразов, Ж.Б. Бектаева (Шымкент, ЮКГУ)
shaldanbaev51@mail.ru, mtshomanbaeva@mail.ru

Самосопряженный оператор A в гильбертовом пространстве H разлагается в виде

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda dE(\lambda), \tag{1}$$

где $dE(\lambda)$ — операторная мера, состоящая из трех компонент:

$$E(\lambda) = E_c(\lambda) + E_a(\lambda) + E_k(\lambda),$$

где $E_c(\lambda)$ — скачкообразная функция, $E_a(\lambda)$ — абсолютно непрерывна. Функция $E_a(\lambda)$ равна интегралу Лебега от своей производной, а производная $E_k(\lambda)$ равна нулю для почти всех λ. (Функция Кантора является функцией типа $E_k(\lambda)$). Скачки $E_c(\lambda)$ происходят в собственных значениях оператора A. Спектр A называется абсолютно непрерывным в интервале I, если $(v, E_\lambda v)$ абсолютно непрерывная функция в I для каждого v в гильбертовом пространстве

H; в противном случае спектр будет кусочным. Кажется разумным предположение, что спектры гамильтониана атомов и молекул, исключая собственные значения, всегда абсолютно непрерывны, иначе говоря, декомпозитные произведения $(v, E_\lambda v)$ всегда состоят из первых двух членов (1). Однако это не доказано, кроме некоторых случаев, подобных атому водорода, для которых известно явное выражение для $E(\lambda)$ [1]. В связи с этим представляют интерес операторы, обладающие канторовым составляющим спектра, каковым является изученный нами спектр оператора теплопроводности с отклоняющимся аргументом [2].

Постановка задачи. Пусть $\Omega \in R^2$ — четырехугольник, ограниченный отрезками: $AB : 0 \leqslant t \leqslant T, x = 0; BC : 0 \leqslant x \leqslant l, t = T, CD : 0 \leqslant t \leqslant T, x = l, DA : 0 \leqslant x \leqslant l, t = 0$. Через $C^{2,1}(\Omega)$ обозначим, множество $u(x,t)$ функций, дважды непрерывно дифференцируемых по x, и единожды по t в области Ω. Под границей области Ω понимаем совокупность отрезков $\Gamma = AB \cup AD \cup CD$. Изучить свойства спектра оператора, порожденного в области Ω дифференциальным выражением

$$Lu = u_t(x, T - t) + u_{xx}(x,t) + au_x, \tag{2}$$

a — const, и краевыми условиями

$$u|_{t=0} = 0, u|_{x=0} = 0, u|_{x=l} = 0. \tag{3}$$

Под оператором $\overline{L}$ понимается замыкание этого пока незамкнутого оператора.

Теорема 1. *(а) Если $\frac{T\pi}{2l^2}$ — иррациональное число, то спектр оператора*

$$Lu = u_t(x, T - t) + u_{xx}(x,t),$$

$$u|_{t=0} = u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0.$$

совпадает с числовой осью $-\infty, +\infty$. Спектр состоит из бесконечного числа собственных значений и из предельных точек собственных значений. Оператор $\overline{L}$ обратим, но $\left(\overline{L}\right)^{-1}$ неограничен.

(б) Если $\frac{T\pi}{2l^2}$ — рациональное число и $\frac{1}{4} \notin \frac{T\pi}{2l^2}, m = 1, 2, \ldots$, то оператор $\overline{L}$ ограниченно обратим. Спектр оператора $\overline{L}$ состоит из бесконечного множества собственных значений и их предельных точек, которые также бесконечны и не имеют предельной точки, точнее, на каждом ограниченном сегменте содержится

лишь конечное число предельных точек множества собственных значений $\{\lambda_{m,n}\}, m = 1, 2, ...; n = 1, 2, ...$.

(в) Если $\frac{T\pi}{2l^2}$ *— рациональное число и* $\frac{1}{4} \in \frac{T\pi}{2l^2}$, *то обратный оператор* $\left(\overline{L}\right)^{-1}$ *не существует,* $\lambda = 0$ *является собственным значением. Спектр состоит из бесконечного множества собственных значений и их предельных точек, которые также бесконечны и разбросаны от* $-\infty$ *до* $+\infty$. *Каждый ограниченный замкнутый сегмент содержит лишь конечное число предельных точек собственных значений* $\{\lambda_{m,n}\}, m = 1, 2, ...; n = 1, 2, ...$. *Ноль может быть бесконечнократным собственным значением.*

В спектральном разложении оператора $\overline{L}$ отсутствует абсолютно непрерывная компонента.

Литература

1. Рихтмайер Р. Принципы современной математической физики / Р. Рихтмайер. — М. : Мир, 1982. — 488 с.

2. Orazov I. About the nature of the spectrum of the periodic problem for the heat equation with a deviating argument / I. Orazov, A. Shaldanbayev, M. Shomanbayeva // Hindawi Publishing Corporation. Abstract and Applied Analysis. — Vol. 2013. — Article ID 128363.

ФОРМУЛА СЛЕДА ЗАДАЧИ КОШИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ПЕРЕМЕННЫМ ОТКЛОНЕНИЕМ АРГУМЕНТА

А.Ш. Шалданбаев, М.Т. Шоманбаева, Б.А. Шалданбай, А. Бейсебаева (Шымкент, ЮКГУ)
shaldanbaev51@mail.ru, mtshomanbaeva@mail.ru

Рассмотрим в пространстве $H = L^2(0, 1)$ задачу Коши

$$y'(x) = \lambda y(x^{\alpha}), x \in (0, 1], \tag{1}$$

$$y(0) = 0, \tag{2}$$

где $0 < \alpha < 2$ — фиксированная постоянная, λ — спектральный параметр. Нетрудно убедиться, что обратный оператор задачи (1)–(2) существует и является оператором Гильберта–Шмидта, поэтому его квадрат будет ядерным оператором, обладающим конечным

следом. С помощью формулы Гаала [1] нам удалось вычислить этот след.

Теорема 1.

а) Если $0 < \alpha < 1$, *то* $trK^2 = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$;

б) Если $1 \leqslant \alpha < 2$, *то* $trK^2 = 0$.

Замечание 1. При $\alpha \geqslant 2$ обратный оператор K не является оператором класса Гильберта–Шмидта, поэтому наши методы бессильны.

Замечание 2. Функция $y(x) = x^{\overline{(1-\alpha)}^{\,1}}$ является собственной для задачи Коши (1)–(2).

Литература

1. Brislawn C. Kernels of trace class operators / C. Brislawn // American Mathematical Society. — Vol. 104, no. 4. — December 1988. — P. 1181–1190.

2. Iserless A. On the generalized functional-differential equation / A. Iserless // European J.Appl.Math. — 1993. — № 4. — P. 1–38.

3. Нерсесян А.Б. К теории интегральных уравнений типа Вольтерра / А.Б. Нерсесян // ДАН СССР. — 1964. — Т. 155, № 5. — С. 1006–1009.

4. Kato T. Functional–differential equation $\dot{y} = ay(\lambda t)$ $+by(t)$ / T. Kato, J.B. Mcleod // Bull. Amer. Math. Soc. — 1971. — Vol. 77, № 6. — P. 891—937.

КРИТЕРИИ ВОЛЬТЕРРОВОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПАНТОГРАФА

А.Ш. Шалданбаев, М.И. Акылбаев, М.Т. Шоманбаева, А.А. Шалданбаева (Шымкент, ЮКГУ)

shaldanbaev51@mail.ru, mtshomanbaeva@mail.ru

Такие уравнения, как уравнение пантографа, начиная с 1970 годов, изучались в работах Т.Като [1], А.Изерлеса [2] и других авторов. Уравнение пантографа возникает в самых разных областях: астрофизике (В.А.Амбарцумян, поглощение света межзвездной материей), технике (Дж.Окендон, А.Б.Тайлер, 1971, математическая модель контактного провода электроснабжения подвижного состава), биологии (А.Дж.Холл, Г.С.Уэйк, 1989, моделирование процесса роста и деление клеток). В этих работах рассматривались вопросы

разрешимости начальной задачи, асимптотического поведения решений на бесконечности, существования периодических и почтипериодических решений, в основном для уравнения первого порядка (уравнение пантографа $\dot{y} = ay(\lambda t) + by(t)$) и различные ее обобщения.

В настоящей работе методами работ [3], [4] исследована задача Коши

$$y'(x) = \lambda y(\alpha x), 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{1}$$

$$y(0) = 0, \tag{2}$$

где $\alpha > 0$ — фиксированная постоянная, λ — спектральный параметр. Обратный оператор A задачи (1)-(2) является оператором Гильберта-Шмидта, поэтому его квадрат будет ядерным, обладающим конечным следом. Имеет место следующая

Теорема 1.

а) Если $0 < \alpha \leqslant 1$*, то* $trA^2 = 0$*;*

б) Если $alpha > 1$*, то* $trA^2 = \frac{1}{\alpha^2}(1 - \frac{1}{\alpha})$.

Если ядерный оператор вольтерров, то по теореме Лидского [5] его след равен нулю, поэтому имеет место неравенство $0 < \alpha \leqslant 1$. Достаточность этого условия следует из теоремы Нерсесяна [4].

Литература

1. Kato T., Mcleod J.B. Functional–differential equation $\dot{y} = ay(\lambda t) + by(t)$.// Bull. Amer. Math. Soc. — 1971. — V. 77, № 6. — p.891—937.

2. Iserless A. On the generalized functional-differential equation. // European J.Appl.Math. — 1993. —- 4. – p. 1–38.

3. Brislawn C. Kernels of trace class operators. // American Mathematical Society. 1988. — V.104, № 4. — p. 1181–1190.

4. Нерсесян А.Б. К теории интегральных уравнений типа Вольтерра / А.Б. Нерсесян // ДАН СССР. — 1964. — Т. 155, № 5. — С. 1006–1009.

5. Лидский В.Б. Несамосопряженные операторы, имеющие след / В.Б. Лидский // ДАН СССР. — 1959. — Т. 125, № 3. — С. 485.

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ДИССИПАТИВНЫЕ СИСТЕМЫ СО МНОГИМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

М.В. Шамолин (Москва, НИИ механики
МГУ им. М.В. Ломоносова)
shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru

В задачах динамики изучаются механические системы со многими степенями свободы с диссипацией (с пространством положений — многомерным многообразием). Их фазовыми пространствами становятся касательные расслоения к данным многообразиям. Так, например, изучение n-мерного обобщенного сферического маятника в неконсервативном поле сил приводит к динамической системе на касательном расслоении к $(n-1)$-мерной сфере, при этом метрика специального вида на ней индуцирована дополнительной группой симметрий [1, 2]. В данном случае динамические системы, описывающие движение такого маятника, обладают знакопеременной диссипацией, и полный список первых интегралов состоит из трансцендентных (в смысле комплексного анализа) функций, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Выделим также класс задач о движении точки по многомерной поверхности, при этом метрика на ней индуцирована евклидовой метрикой всеобъемлющего пространства. В ряде случаев в системах с диссипацией также удается найти полный список первых интегралов, состоящий из трансцендентных функций. Полученные результаты особенно важны в смысле присутствия в системе именно неконсервативного поля сил.

Вообще же, для систем с диссипацией трансцендентность функций (в смысле наличия существенно особых точек) как первых интегралов наследуется из нахождения в системе притягивающих или отталкивающих предельных множеств (см. также [1, 2]).

В работе показана интегрируемость некоторых классов динамических систем на касательном расслоении к многомерному многообразию (об аналогичных исследованиях на касательных расслоениях к многообразиям размерностей 2, 3, и 4 см. [3–5]). При этом силовые поля обладают так называемой переменной диссипацией и обобщают ранее рассмотренные.

Литература

1. Шамолин М. В. Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения / М. В. Шамолин // Фундамент. и прикл. матем. — 2008. — Т. 14, вып. 3. — С. 3—237.

2. Шамолин М. В. Многообразие случаев интегрируемости в динамике маломерного и многомерного твердого тела в неконсервативном поле сил / М. В. Шамолин // Итоги науки и техники. Сер. «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры». — Т. 125. — М.: ВИНИТИ, 2013. — С. 5–254.

3. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия / М. В. Шамолин // Доклады РАН. — 2017. — Т. 475. — № 5. — С. 519–523.

4. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия / М. В. Шамолин // Доклады РАН. — 2017. — Т. 477. — № 2. — С. 168–172.

5. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия / М. В. Шамолин // Доклады РАН. — 2018. — Т. 479. — № 3. — С. 270–276.

ОБ ОДНОЗНАЧНОМ ПРОДОЛЖЕНИИ РОСТКОВ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Н.А. Шананин (Москва, ГУУ)
nashananin@inbox.ru

Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$ и определенная на нем комплекснозначная функция $u(x) \in C^2(\Omega)$ является классическим решением квазилинейного уравнения

$$(P(u) =) \sum_{k=1}^{n} a_k(x,u) \frac{\partial u}{\partial x_k} = f(x,u), \qquad (1)$$

в котором коэффициенты $a_k(x,u) \in C^2(\Omega \times \mathbb{C})$ и $f(x,u) \in C^1(\Omega \times \mathbb{C})$ — комплекнозначные функции. В соответствии с разложением коэффициентов $a_k(x,u) = a_k^1(x,u) + i\, a_k^2(x,u)$ на вещественную a_k^1 и мнимую a_k^2 части определим на Ω два векторных поля: $X_{l,u} =$

$\sum_{k=1}^{n} a_k^l(x,u(x))\frac{\partial}{\partial x_k}$, $l=1,2$. Предположим, что внешнее произведение $X_{1,u}(x)\wedge X_{2,u}(x)\neq 0, \forall x\in\Omega$. Тогда отображение $x\to\mathcal{L}_{P,u}$, ставящее точке x в соответствие линейное подпространство, натянутое на векторы $X_{1,u}(x)$ и $X_{2,u}(x)$, задает двумерное распределение $\mathcal{L}_{P,u}$ в касательном пространстве. Предположим, что оно инволютивно. Пусть Γ — непрерывная кривая, содержащаяся в одном из максимальных интегральных многообразий $\mathcal{L}_{P,u}$.

Теорема 1. *Если функция $v(x)\in C^1(\Omega)$ является решением уравнения* (1) *в некоторой окрестности кривой* Γ*, то из равенства ростков $v_{x^*}=u_{x^*}$ в некоторой точке $x^*\in\Gamma$ следует равенство ростков $u_x=v_x$ во всех точках кривой* Γ.

Теорема доказана в статье [1]. Условия, налагаемые в теореме только на старшую часть уравнения, достаточны для однозначного продолжение ростков решений вдоль интегральных кривых распределения $\mathcal{L}_{P,u}$. Отметим, что при нарушении условия инволютивности существенную роль начинают играть младшие члены.

Литература

1. Шананин Н.А. Об однозначном продолжении ростков решений дифференциальных уравнений уравнений первого порядка вдоль кривых / Н.А. Шананин // Матем. заметки — 2017. — Т. 102, вып. 6. — С. 917–930.

ОЦЕНКИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С НЕЛОКАЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ[1]

А.Н. Шелковой (Воронеж, ВГТУ)
shelkovoj.aleksandr@mail.ru

Рассматривается дифференциальный оператор, действующий в гильбертовом пространстве $L_2[0,1]$, и порождаемый дифференциальным выражением

$$(\mathcal{L}y)(t)=-\ddot{y}(t) \tag{1}$$

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00197).

и нелокальными краевыми условиями

$$y(0) = \int\limits_0^{2\pi} a_0(t)y(t)dt; \; y(1) = \int\limits_0^{2\pi} a_1(t)y(t)dt. \tag{2}$$

Здесь a_0 и a_1 - функции из $L_2[0,1]$.

Для исследования спектра оператора $\mathcal{L}$ рассмотрим сопряженный ему оператор $\mathcal{L}^*$, который задается дифференциальным выражением

$$(L^*x)(t) = -\ddot{x}(t) \; + \; [\dot{x}(1)a_1(t) \; - \; \dot{x}(0)a_0(t)] \tag{3}$$

и краевыми условиями

$$x(0) = x(1) = 0. \tag{4}$$

Методом подобных операторов получены оценки собственных значений и собственных функций исследуемого оператора.

Литература

1. Шелковой А.Н. Спектральные свойства дифференциальных операторов, определяемых нелокальными краевыми условиями / А.Н. Шелковой // Вопросы науки. — 2016. — Т. 3. — С. 83–90.

2. Шелковой А.Н. Метод подобных операторов в исследовании интегро-дифференциальных операторов с квадратично суммируемым ядром / А.Н. Шелковой // Вопросы науки. — 2016. — Т. 2. – С. 68–80.

ОБ ОЦЕНКАХ ОСТАТКОВ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ ПРИ СПЕЦИАЛЬНЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА КОЭФФИЦИЕНТЫ[1]

В.Б. Шерстюков (Москва, НИЯУ МИФИ)
shervb73@gmail.com

В недавней работе [1] изучалось поведение остатков степенных рядов с положительными логарифмически выпуклыми коэффициентами. Интерес к вопросу был вызван одной специальной задачей из теории классических полиномов Бернштейна [2].

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-01-00236.

Рассмотрим степенной ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^k, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Предположим, что коэффициенты a_k удовлетворяют условиям

$$a_k > 0, \quad a_{k+1}^2 \leqslant a_k\, a_{k+2}, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}; \qquad \sum_{k=0}^{\infty} a_k < \infty. \tag{2}$$

Обозначим через

$$r_m(x) \equiv \sum_{k=m}^{\infty} a_k\, x^{k-m}, \qquad m \in \mathbb{N}, \tag{3}$$

нормированные остатки ряда (1). Как показано в [1], при ограничениях (2) для каждого $m \in \mathbb{N}$ верна оценка

$$r_m(x) \leqslant \frac{a_m\, r_m}{a_m + (1-x)\, r_{m+1}} \equiv \frac{a_m}{1 - (r_{m+1}/r_m)\, x}, \qquad x \in [0,1], \tag{4}$$

где

$$r_m \equiv r_m(1) = \sum_{k=m}^{\infty} a_k, \qquad m \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

Результат (4) допускает следующее усиление.

Теорема. *Пусть коэффициенты степенного ряда* (1) *подчинены ограничениям* (2). *Тогда для нормированных остатков* (3) *при каждом* $m \in \mathbb{N}$ *верна оценка*

$$r_m(x) \leqslant \frac{a_m}{1 - (1/l_m(x))\, x}, \qquad x \in [0,1], \tag{6}$$

где

$$l_m(x) \equiv \frac{a_m}{a_{m+1}}\,(1-x) + \frac{r_m}{r_{m+1}}\, x,$$

а величина r_m *определена по формуле* (5).

Поскольку из (2) следуют неравенства

$$\frac{a_m}{a_{m+1}} \geqslant \frac{r_m}{r_{m+1}}, \qquad m \in \mathbb{N},$$

то оценка (6) влечет прежнюю оценку (4). Теорема позволяет уточнить результаты работ [1], [2], связанные с оценками уклонения полиномов Бернштейна от порождающей функции типа модуля.

Литература

1. Попов А. Ю. Оценка сверху остатка степенного ряда с положительными коэффициентами специального вида / А. Ю. Попов // Челябинский физико-математический журнал. — 2017. — Т. 2, № 2. — С. 193–198.

2. Тихонов И. В. Полиномы Бернштейна: старое и новое / И. В. Тихонов, В. Б. Шерстюков, М. А. Петросова // Математический форум. Т. 8, ч. 1. Исследования по математическому анализу. — Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2014. (Итоги науки. Юг России) — С. 126–175.

ЛОКАЛЬНО ЧЕБЫШЕВСКИЕ МНОЖЕСТВА В КОНЕЧНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ[1]

К.С. Шкляев (Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова)
konstantin.shklyaev@inbox.ru

Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — банахово пространство, A — подмножество X. Обозначим $\rho(x, A) = \inf\,\{\|x-a\| : a \in A\}$ — расстояние от элемента $x \in X$ до A, $P_A(x) = \{y : \|x-y\| = \rho(x, A)\}$ — метрическая проекция точки x на множество A. Множество A называется *чебышевским*, если для каждого $x \in X$ проекция $P_A(x)$ состоит ровно из одного элемента. Открытый шар пространства X радиуса r с центром в точке x обозначим $B(x; r)$.

Множество A называется *локально чебышевским*, если для каждой точки $x \in A$ существуют $r(x) > 0$ и чебышевское множество $F_x \subset X$ такое, что $A \cap B(x; r(x)) \subset F_x \subset A$.

Теорема. *Пусть A — компактное связное локально чебышевское множество в конечномерном нормированном пространстве X. Тогда A — чебышевское множество.*

Теорема не обобщается на случай произвольных бесконечномерных банаховых пространств. Пример связного локально чебышевского, но не чебышевского множества, основанный на примере Ч. Данхэма несвязного чебышевского множества в пространстве $C[0; 1]$, был построен А. Флеровым.

В докладе предполагается обсудить различные варианты определения локально чебышевского множества, а также доказательство теоремы.

---

[1] Работа поддержана грантом РФФИ (проект № 18-01-00333) и грантом Президента РФ поддержки ведущих научных школ (проект НШ 6222.2018.1).

Литература

1. Флеров А. Локально чебышевские множества на плоскости / А. Флеров // Матем. заметки. — 97:1 (2015). — С. 142–149.

ОБ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ И НЕКОТОРЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ

Ю.Н. Штейников (Москва, ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН)
yuriisht@gmail.com

В докладе будут представлены некоторые вычислительные аспекты компьютерной алгебры для исследования полиномиальных систем.

Также планируется представить результаты о некоторых важных применениях базисов Гребнера и интересных их приложениях.

О ПРИЗНАКЕ ЖОРДАНА ДЛЯ ОБОБЩЁННЫХ СИСТЕМ ХААРА

В.И. Щербаков (Жуковский Московской области, МТУСИ)
kafmathan@mail.ru

Пусть $p_0 = 1, \{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ — целочисленная последовательность с $p_n \geqslant 2$ и $m_n = \prod\limits_{k=o}^{n} p_k (n = 0, 1, \ldots)$. Всякое натуральное число n единственным образом можно представить в виде

$$n = \sum_{k=0}^{s} a_k m_k = a_s m_s + n', \tag{1}$$

где a_k и s — целые с $0 \leqslant a_k < p_{k+1}, m_s \leqslant n < m_{s+1}, 1 \leqslant a_s < p_{s+1}$ и $0 \leqslant n' < m_s$, а любое число $x \in [0, 1]$ можно разложить по формуле

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{m_n}, \text{ где } x_n \text{ — целые с } 0 \leqslant x_n < p_n. \tag{2}$$

Если $x - \{p_n\}$ — иррационально, а также $x = 0$ или $x = 1$, то его разложение по формуле (2) единственно; для $x = \frac{l}{m_n}$ существует два его представления в виде равенства (2), одно из которых

конечно ($x_k = 0$ для всех $k > n$); его мы обозначим за $\frac{l}{m_n}$, а другое — бесконечно ($x_k = p_k - 1$ при $k > n$), которое будем обозначать как $\frac{l}{m_n}-$. Получилась абелева группа последовательностей $G = \{\{x_n\}_{n=1}^{\infty} | x_n = 0, 1, \ldots, p_n - 1\}$ с операцией $\dot{+}$ покоординатного сложения по модулю p_n и обратной операцией $\dot{-}$, в которой все $\{p_n\}$-рациональные точки “раздвоились”.

Положив $\frac{l}{m_n} - < \frac{l}{m_n}$, с $[0, 1]$ на G переносится упорядочивание точек и, следовательно, понятие вариации функции (под функцией будем понимать отображение группы последовательностей G во множество комплексных чисел $\mathbb{C}$). Обозначим за $V(E, f)-$ вариацию, а за $osc(E, f)-$ колебание функции $f(t)$ на множестве $E \subseteq G$.

Подгруппы $[0, \frac{1}{m_n}-]$ задают систему окрестностей нуля в G, и тогда на G задана топология, относительно которой на G определяются предел и непрерывность.

С [0, 1] на G переносятся понятия меры и интеграла Лебега, ортогональных и ортонормированных систем функций. Обозначим за $L(G)$ множество интегрируемых на G функций. Пусть $\{\chi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}-$ обобщённая система Хаара: $\chi_0(x) \equiv 1$;

$$\chi_{m_k}(x) = \begin{cases} \sqrt{m_k} \exp \frac{2i\pi x_{k+1}}{p_{k+1}} & \text{, если } x \in [0, \frac{1}{m_k}-] \\ \qquad\qquad 0 & \text{для остальных } x. \end{cases} \quad \text{и}$$

$\chi_n(x) = (\chi_{m_s}(x \dot{-} \frac{n'}{m_s})^{a_s}$, где x_{k+1} определены равенством (2), а n', s, a_s и m_s- в формуле (1) . Имеют место следующие теоремы:

Теорема 1. (признак Дини-Липшица для обобщённых систем Хаара (см. [1])) *Если справедливо условие*

$$osc(x \dot{+} [\frac{1}{m_{n+1}}, \frac{1}{m_n} -], f) = o(\frac{1}{\ln p_{n+1}}), \tag{3}$$

то ряд Фурье от функции $f(t) \in L(G)$ *по обобщённой системе Хаара* $\{\chi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ *сходится к ней в точке* $x \in G$.

Простым следствием теоремы 1 является

Теорема 2. *При выполнени условия*

$$V(x \dot{+} [\frac{1}{m_{n+1}}, \frac{1}{m_n} -], f) = o(\frac{1}{\ln p_{n+1}}) \tag{4}$$

ряд Фурье от функции ограниченной вариации $f(t)$ *по обобщённой системе Хаара* $\{\chi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ *сходится к ней в точке* $x \in G$.

Однако условие (4) нельзя улучшить даже для непрерывных функций ограниченной вариации, ибо верна следующая

Теорема 3. *Для неограниченных образующих последовательностей* $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ *существует непрерывная функция ограниченной вариации на* G *такая,что*

$$V(x\dot{+}[\frac{1}{m_{n+1}}, \frac{1}{m_n}-], f) = O(\frac{1}{\ln p_{n+1}}),$$

но её ряд Фурье по обобщённой системе Хаара $\{\chi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ *расходится в точке* $x \in G$.

Таким образом, условие (3) нельзя улучшить для функций ограниченной вариации, а признак Жордана не отличается (во всяком случае, не улучшает) от условия Дини-Липшица (3),

Литература

1. Щербаков В.И. Признак Дини-Липшица для обобщённых систем Хаара / В.И. Щербаков // Известия Саратовского университета. Новая серия. Математика. — 2016. — Т. 16, вып. 4. — С. 435–448.

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ЦЕЛЫХ РЕШЕНИЙ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

А.Я. Янченко, В.А. Подкопаева (Москва, НИУ «МЭИ»)
YanchenkoAY@mpei.ru

В последние десятилетия (начиная примерно с 70-х годов двадцатого века) появилось ряд работ, где исследуются алгебраические дифференциальные уравнения, имеющие целые решения специального вида (например, многочлены или целые функции, имеющие конечное число нулей). С этими результатами можно ознакомиться по монографии В.Н. Горбузова ([1]).

Авторами данной работы разработана некоторая техника, позволившая в той или иной степени описывать алгебраические уравнения, имеющие одним из решений целую функцию конечного порядка (без каких-либо других ограничений на нее) (см., например, [2]). Применение этой техники к алгебраическим уравнениям вида $P(z, y, y') = 0$ позволяет получить следующий результат.

Теорема. *Пусть* $P(z, \omega_1, \omega_2)$ *— ненулевой многочлен с комплексными коэффициентами. Пусть уравнение* $P(z, y, y') = 0$ *имеет в качестве одного из решений целую функцию конечного порядка* $y = f(z)$. *Тогда функция* $f(z)$ *является решением линейного*

однородного дифференциального уравнения вида

$$a_n(z)y^{(n)} + \ldots + a_0(z)y = 0,$$

где $\{a_j(z)\}$ *— многочлены с комплексными коэффициентами, причем эти коэффициенты являются рациональными функциями от коэффициентов исходного многочлена* P*.*

Литература

1. Горбузов В.Н. Целые решения алгебраических дифференциальных уравнений / В.Н. Горбузов. — Гродно : ГРБУ, 2006. — 258 с.

2. Янченко А.Я. О целых функциях — решениях одного класса алгебраических дифференциальных уравнений / А.Я. Янченко, В.А. Подкопаева // Сибирские электр. матем. известия. — 2018. — PDF POI 10.17377/SEMI 2018.15.104. — С. 1284–1291.

ON THE BOUSSINESQ APPROXIMATION FOR POLYMER FLUID FLOWS WITH TEMPERATURE-DEPENDENT HEAT CONDUCTIVITY

E.S. Baranovskii, M.A. Artemov (Voronezh, VSU)
esbaranovskii@gmail.com

We consider the Boussinesq approximation for steady flows of low concentrated aqueous polymer solutions [1, 2] in a bounded domain $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ under the no-slip condition on $\partial\Omega$ and mixed boundary conditions for the temperature:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{3} v_i \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x_i} - \mu\Delta\boldsymbol{v} - \varkappa \sum_{i=1}^{3} v_i \frac{\partial \Delta\boldsymbol{v}}{\partial x_i} + \nabla p = \beta\theta\boldsymbol{g} \ \text{ in } \Omega, \\ \operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0 \ \text{ in } \Omega, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{3} v_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i} - \operatorname{div}\{k(\theta)\nabla\theta\} = \omega \ \text{ in } \Omega, \\ \boldsymbol{v} = \mathbf{0} \ \text{ on } \partial\Omega, \\ k(\theta)\dfrac{\partial\theta}{\partial\mathbf{n}} = \psi \ \text{ on } S, \\ \theta = 0 \ \text{ on } \partial\Omega\backslash S, \end{cases} \tag{A}$$

where $\boldsymbol{v}$ and p stand for the velocity and the pressure, respectively, θ is the deviation from the average temperature value, μ is the viscosity,

---

$\varkappa$ is the relaxation viscosity, β is the temperature expansion coefficient, ω denotes a heat source, $\boldsymbol{g}$ is the gravitational acceleration, $k(\theta)$ is the thermal conductivity, S is a fixed part of $\partial\Omega$, ψ represents the heat flux in the direction of the unit outward normal $\mathbf{n}$ to S.

In system (A), the unknowns are $\boldsymbol{v}$, θ, and p, while all other quantities are assumed to be given.

We are interested in weak solutions to problem (A). Let us introduce the following functional spaces:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{V}^m(\Omega) &:= \{\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{H}^m(\Omega) : \quad \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0, \ \boldsymbol{u}|_{\partial\Omega} = \boldsymbol{0}\}, \quad m \in \mathbb{N}, \\ Y(\Omega) &:= \{\eta \in H^1(\Omega) : \quad \eta|_{\partial\Omega\setminus S} = 0\}. \end{aligned}$$

Definition. One says that a pair $(\boldsymbol{v}, \theta) \in \boldsymbol{V}^2(\Omega) \times Y(\Omega)$ is a *weak solution* of problem (A) if the following equalities

$$-\sum_{i=1}^{3} \int_\Omega v_i \boldsymbol{v} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial x_i}\, d\boldsymbol{x} - \mu \int_\Omega \Delta \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\varphi}\, d\boldsymbol{x} + \varkappa \sum_{i=1}^{3} \int_\Omega v_i \Delta \boldsymbol{v} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial x_i}\, d\boldsymbol{x} \\ = \beta \int_\Omega \theta \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{\varphi}\, d\boldsymbol{x},$$

$$\sum_{i=1}^{3} \int_\Omega v_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \eta\, d\boldsymbol{x} + \int_\Omega k(\theta) \nabla\theta \cdot \nabla\eta\, d\boldsymbol{x} = \int_S \psi\eta\, dS + \int_\Omega \omega\eta\, d\boldsymbol{x}$$

hold for any $\boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{V}^1(\Omega)$ and $\eta \in Y(\Omega)$.

The main result of this work is the following

Theorem. *Assume that* $\partial\Omega \in \mathcal{C}^3$, $\operatorname{meas}(\partial\Omega\setminus S) > 0$*,* $\mu > 0$*,* $\varkappa > 0$*,* $\beta > 0$*,* $\omega \in L^2(\Omega)$*,* $\psi \in L^2(S)$*, the function* k *is continuous, and*

$$0 < k_0 \leqslant k(\tau) \leqslant k_1 \quad \forall \tau \in \mathbb{R}.$$

Then problem (A) *has at least one weak solution* $(\boldsymbol{v}, \theta)$ *such that*

$$\mu \int_\Omega |\nabla \boldsymbol{v}|^2\, d\boldsymbol{x} + \mu\varkappa \int_\Omega |\Delta \boldsymbol{v}|^2\, d\boldsymbol{x} \leqslant \beta \int_\Omega \theta \boldsymbol{g} \cdot (\boldsymbol{v} - \varkappa \Delta \boldsymbol{v})\, d\boldsymbol{x},$$

$$\int_\Omega k(\theta) |\nabla\theta|^2\, d\boldsymbol{x} = \int_S \psi\theta\, dS + \int_\Omega \omega\theta\, d\boldsymbol{x}.$$

Remark. Our results provide an extension of the results obtained in the papers [2, 3], where the thermal convection is studied for a simplified version of the model of aqueous polymer solutions.

References

1. Pavlovskii V. A. On the theoretical description of weak water solutions of polymers // Dokl. Akad. Nauk SSSR. 1971. V. 200. P. 809–812 (in Russian).

2. Oskolkov A. P. Some nonstationary linear and quasilinear systems occurring in the investigation of the motion of viscous fluids // J. Math. Sci. 1978. V. 10. P. 299–335.

3. Sviridyuk G. A. Solvability of a problem of the thermoconvection of a viscoelastic incompressible fluid // Soviet Math. (Iz. VUZ). 1990. V. 34. P. 80–86.

ON RANDOM NONSMOOTH MULTIVALENT GUIDING FUNCTIONS[1]

Yu. Bezmelnitsyna, S. Kornev (Voronezh, VSPU)

kornev_vrn@mail.ru; bezmelnicyna@inbox.ru

Let (Ω, Σ, μ) be a complete probability space and $I = [0, T]$. We consider the periodic problem for a differential equation of the form:

$$z'(\omega, t) = f\big(\omega, t, z(\omega, t)\big) \quad \text{for a.e.} \quad t \in I, \tag{1}$$

for all $\omega \in \Omega$, where $f \colon \Omega \times I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ is a given map.

In order to study of problem (1) we use the method of random nonsmooth multivalent guiding functions. The main ideas of the method of guiding functions were formulated by A.M. Krasnoselskii and A.I. Perov (see, e.g., [1]). The notion of guiding function was then generalized in several directions and applied to various problems (see, e.g., [2-6]).

By applying the random topological degree theory [6] we introduce the notions of random nonsmooth multivalent guiding functions and use them to prove the existence of periodic solutions to problem (1).

References

1. Krasnosel'skii M.A. The Operator of translation along the trajectories of differential equations / M.A. Krasnosel'skii. — Providence. R.I. : Amer. Math. Soc., 1968. — 294 p.

---

[1] The work of the second author is supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (project № 1.3464.2017/4.6) and the RFBR (project № 17-51-52022).

2. Borisovich Yu.G. Introduction to the theory of multivalued maps and differential inclusions / Yu.G. Borisovich, B.D. Gelman, A.D. Myshkis, V.V. Obukhovskii. — Moscow : Librokom, 2011. — 224 p.

3. Kornev S.V. On the method of multivalent guiding functions to the periodic problem of differential inclusions / S.V. Kornev // Automation and Remote Control. — 2003. — V. 64. — P. 409–419.

4. Kornev S.V. On nonsmooth multivalent guiding functions / V.V. Obukhovskii // Differential Equations. — 2003. – V. 39. – P. 1578–1584.

5. Kornev S.V. Multivalent guiding function in a problem on existence of periodic solutions of some classes of differential inclusions / S.V. Kornev // Russian Mathematics (Iz. VUZ). — 2016. — V. 11. — P. 14–26.

6. Andres J. Random topological degree and random differential inclusions / J. Andres, L. Górniewicz // Topological Methods and Nonlinear Analysis. — 2012. — V. 40. — P. 337–358.

DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH SEPARATION OF VARIABLES IN THE RIGHT HAND PART

Yu. Eidelman (Tel-Aviv, Tel-Aviv University)
eideyu@post.tau.ac.il

We consider differential equations in the Banach spaces given in the form

$$v'(t) = Av + \varphi(t)p,$$

where A is an unbounded operator, p is an element of the Banach space and $\varphi(t)$ is a scalar function. We present results on the Cauchy problem and different inverse (identification) problems for such equations. Some of results are extended on the degenerate equations

$$(Mv)'(t) = Av + \varphi(t)p$$

with a singular operator M.

For the Cauchy problem we obtain the well-posedness for the nonsmooth right hand parts of the given form. In the inverse problem we assume that the element p or the scalar function $\varphi(t)$ are unknown and some additional conditions are imposed.

This is a joint work with I.Tikhonov and A.Favini.

A DIRECT AND INVERSE PROBLEM FOR A CLASS STURM-LIOUVILLE OPERATOR[1]

Kh.R. Mamedov (Mersin, Mersin University, Turkey)
hanlar@mersin.edu.tr

We consider the equation

$$-y'' + q(x)y = \lambda^2 \rho(x)y \tag{1}$$

on the half line $(0, \infty]$ with the boundary condition

$$y'(0) - hy(0) = 0 \tag{2}$$

where $q(x)$ is a real-valued function satisfying the condition

$$\int\limits_0^\infty (1+x)\,|q(x)|\,dx < \infty. \tag{3}$$

h is an arbitrary real number, λ is a complex parameter, $\rho(x)$ is a positive piecewise-constant with a finite number of points of discontinuity.We note that in this study the inverse problem of the scattering has been solved completely.In this paper, we investigate the direct and inverse scattering problem for the boundary value problem (1)-(3), in the case $\rho(x)$=1, was completely solved in [1-3]. When $\rho(x) \neq 1$, it was studied in [4] and [5]. In these papers, solution of inverse scattering problem by using the transformation operator was reduced to solution of two inverse problems on the intervals $(0, a]$ and $(a, \infty]$. The discontinuous version by using the new(nontriangular) representation of Jost solution of equation (1) completely solved by [6]. In this case the discontinuity of the function $\rho(x)$ strongly influences the structure of representation of the Jost solution and the main equation o the inverse problem. Uniqueness of the solution of the inverse problem for (1) when $q(x)$=0 were given by [7] and [8]. Inverse problem for a wave equation with a piecewise- constant coefficient was solved by [9] and [10].

Литература

1. Marchenko V.A., Sturm-Liouville operators and their application, Naukova Dmka, Kiev, 1977; English trans. Birkhauser, 1986.

---

[1] This study was supported by the Research Fund of Mersin University in Turkey

2. Levitan B.M., On the solution of the inverse problem of quantum scattering theory, Mathematical Notes 1975,17(4):611-624.

3.Levitan B.M., Inverse Sturm-Liouville problems. VSP, Zeist, The Netherlands; 1987.

4.Gasymov M.G., The direct and inverse problem of spectral analysis for a class of equations with a discontinuous coefficient. In Non-Classical Methods in Geophysics. Edited by: Lavrentev M.M. Nauka, Novosibirsk, Russia; 1977:37-44.

5. Darwish A.A., The inverse problem for a singular boundary value problem. New Zeland Journal of Mathematics 1993, 22: 37-66.

6. Guseinov I.M., Pashaev RT: On an inverse problem for a second-order differential equation. Uspekhi Matematicheskikh Nauk 2002.

7. Tihonov A.N., On the uniqueness of the solution of the problem of electric prospecting. Doklady Akademii Nauk SSSR 1949, 69: 797-800.

8. Alimov S.A.,Tihonov's works on inverse problems for the Sturm-Liouville equation. Uspekhi Matematicheskikh Nauk 1976,31(6): 84-88. English translation in Russian Mathematical Surveys, vol. 31, pp. 87–92, 1976.

9. Lavrentev M.M., An inverse problem for the wave equation with a piecewise-constant coefficient. Sibirskii Matematicheskii Zhurnal 1992, 33(3):101-111, 219. translation in Siberian Mathematical Journal, vol. 33, no. 3, pp. 452–461, 1992.

10. Sedipkov A., Inverse spectral problem for the Sturm-Liouville operator with discontinuous potential,Journal of Inverse and Ill-Posed Problems 20(2),2012.

ON THE EIGENVALUE PROBLEMS FOR PERTURBED DIFFERENTIAL OPERATORS

I.N. Parasidis, E. Providas (Greece, TEI of Thessaly)
paras@teilar.gr, providas@teilar.gr

We study spectral properties of a class of boundary value problems involving a perturbed linear differential operator with multipoint and integral boundary conditions. We show that the eigenvalues and the correlated eigenfunctions of the perturbed problem can be constructed, under certain prerequisites, from the eigenvalues and the corresponding eigenfunctions of the simpler unperturbed problem, and reversely. The results presented are applicable to the investigation of boundary value problems for integro-differential and loaded differential equations. The

---

latter appear in underground fluid and gas dynamics, mathematical biology, economics, and ecology [1]. Further studies in spectral problems for loaded differential equations with nonlocal boundary conditions, one can see in [2] and the references cited in there. The exact solution of integro-differential and loaded differential equations with nonlocal boundary conditions is considered in [3].

Let X be a complex Banach space, $A : X \overset{on}{\rightarrow} X$ a linear closed mth-order differential operator and $X_A = (D(A), || \cdot ||_{X_A})$ a Banach space with graph norm. Consider the equation

$$Au - \lambda^2 u = 0, \tag{1}$$

along with the abstract boundary conditions

$$\Phi(u) = VG(u) + P\Psi(u), \quad u \in D(A), \tag{2}$$

where the vectors $\Phi = \operatorname{col}(\Phi_1, \ldots, \Phi_m)$, $G = \operatorname{col}(G_1, \ldots, G_n)$, $\Psi = \operatorname{col}(\Psi_1, \ldots, \Psi_l)$, whose components are functionals which belong to X_A^*, and V, P denote respectively $m \times n$ and $m \times l$ matrices with arbitrary constant elements.

Let the general solution of (1) be expressed as

$$u = C_1 u_1(x, \lambda) +, \ldots, + C_m u_m(x, \lambda), \tag{3}$$

where $u_1(x, \lambda), \ldots, u_m(x, \lambda)$ are a fundamental set of solutions of the homogeneous equation (1). Substituting (3) into (2) we get the equations

$$\left[\Phi_\lambda(u) - VG_\lambda(u) - P\Psi_\lambda(u)\right] C = 0. \tag{4}$$

where $C = \operatorname{col}(C_1, \ldots, C_m)$ is a vector with constants to be determined and

$$\Phi_\lambda(u) = \begin{pmatrix} \Phi_1\left(u_1(x,\lambda)\right) & \ldots & \Phi_1\left(u_m(x,\lambda)\right) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \Phi_m\left(u_1(x,\lambda)\right) & \ldots & \Phi_m\left(u_m(x,\lambda)\right) \end{pmatrix},$$

$$G_\lambda(u) = \begin{pmatrix} G_1\left(u_1(x,\lambda)\right) & \ldots & G_1\left(u_m(x,\lambda)\right) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ G_n\left(u_1(x,\lambda)\right) & \ldots & G_n\left(u_m(x,\lambda)\right) \end{pmatrix},$$

$$\Psi_\lambda(u) = \begin{pmatrix} \Psi_1\left(u_1(x,\lambda)\right) & \ldots & \Psi_1\left(u_m(x,\lambda)\right) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \Psi_l\left(u_1(x,\lambda)\right) & \ldots & \Psi_l\left(u_m(x,\lambda)\right) \end{pmatrix}.$$

This system of equations admits nontrivial solutions if and only if

$$\det\left[\Phi_\lambda(u) - VG_\lambda(u) - P\Psi_\lambda(u)\right] = 0. \tag{5}$$

The values of λ which satisfy the characteristic equation (5), when they exist, are the eigenvalues of the boundary value problem (1), (2). If λ_k are the eigenvalues of the problem (1), (2), then the corresponding eigenfunctions are given by

$$u^{(k)}(x,\lambda_k) = \sum_{i=1}^{m} C_i u_i(x,\lambda_k), \quad k = 0,1,2,\dots \tag{6}$$

where $C_i = C_i(\lambda_k)$ solve Eq. (4).

Consider now a perturbation of the operator A and the boundary value problem

$$Au + \lambda^2 g\Psi(u) - \lambda^2 u = 0, \tag{7}$$

$$\Phi(u) = VG(u), \quad u \in D(A), \tag{8}$$

where, in addition, we assume $\dim\ker A = m$ and take the vector $g = (g_1,\dots,g_l) \in (\ker A)^l$. Also, let I_l symbolizes the $l \times l$ identity matrix. The next results can be proved.

Theorem 1. *If* $\det W = \det[I_l - \Psi(g)] \neq 0$, *the following are true:*
(i) The perturbed boundary value problem (7), (8) by means of the transformation $v = u - g\Psi(u)$ *can be reduced to the boundary value problem*

$$Av - \lambda^2 v = 0, \tag{9}$$

$$\Phi(v) = VG(v) + P\Psi(v), \quad v \in D(A), \tag{10}$$

where $P = [VG(g) - \Phi(g)]W^{-1}$.
(ii) If λ_k *and* $v^{(k)}$ *are the eigenvalues and the related eigenfunctions of the problem (9), (10), then* λ_k *and* $u^{(k)} = v^{(k)} + g[I_l - \Psi(g)]^{-1}\Psi(v^{(k)})$ *are the eigenvalues and the related eigenfunctions of the problem (7), (8).*
(iii) If λ_k *and* $u^{(k)}$ *are the eigenvalues and the associated eigenfunctions of the problem (7), (8), then* λ_k *and* $v^{(k)} = u^{(k)} + g\Psi(u^{(k)})$ *are the eigenvalues and the corresponding eigenfunctions of the problem (9), (10).*

Corollary 1. *In Theorem 1 and when g satisfies Eq. (8), we have* $P = [VG(g) - \Phi(g)]W^{-1} = 0$ *and hence the problem (9), (10) becomes*

$$Av - \lambda^2 v = 0,$$

$$\Phi(v) = VG(v), \quad v \in D(A),$$

which is the unperturbed problem of the boundary value problem (7), (8).

Theorem 2. *Let the functionals* $\Phi_1, \ldots, \Phi_m$ *be biorthogonal to the functions* $z_1, \ldots, z_m$*, where* $z = (z_1, ..., z_m)$ *is a basis of* $\ker A$*. Let* $\widehat{A}$ *be a correct restriction of* A *defined by*

$$\widehat{A} \subset A, \quad D(\widehat{A}) = \{u \in D(A) : \Phi(u) = 0\}.$$

Then:
(i) The spectral problem

$$Au - g\Psi(u) = \lambda^2 u, \tag{11}$$

$$\Phi(u) = VF(Au), \quad u \in D(A), \tag{12}$$

where the vector of functionals $F = \mathrm{col}(F_1, \ldots, F_n) \in (X^*)^n$*, has the eigenvalue* $\lambda = 0$ *and the eigenvector* $u = 0$ *if and only if*

$$\det L = \det[I_l - \Psi(\widehat{A}^{-1}g) - \Psi(z)VF(g)] \neq 0.$$

(ii) The spectral problem (11), (12) has the eigenvalue $\lambda = 0$ *and an eigenvector* $u \neq 0$ *if and only if* $\det L = 0$.

Bibliography

1. Nakhushev A.M. Loaded equations and their applications / M.: Nauka, 2012.

2. Lomov I.S. Loaded Differential Operators: Convergence of Spectral Expansions / Differential Equations. — 2014. — Vol. 50, No. 8. — pp. 1070—1079.

3. Parasidis I.N., Providas E., Dafopoulos V. Loaded Differential and Fredholm Integro-Differential Equations with nonlocal integral boundary conditions / Applied Math. and control science, vestnik.pstu.ru, 2018. — N.3. — pp. 31–50.

Именной указатель

Artemov M.A., 302
Baranovskii E.S., 302
Bezmelnitsyna Yu., 304
Eidelman Yu. , 305
Kornev S., 304
Mamedov Kh.R., 306
Parasidis I.N., 307
Providas E., 307

А
Абдурагимов Г.Э., 16
Акишев Г., 17
Акылбаев М.И., 291
Алмохамед Муатаз, 19
Анучина Ю.А., 21
Арутюнян Л.М., 22
Асхабов С.Н., 23
Атанов А.В., 24
Афанасенкова Ю.В., 26
Афанасова М.С., 206

Б
Бабайцев А.А., 33
Бабошин С.Д., 173
Баев А.Д., 29, 33
Баскаков А.Г., 37
Беднаж В.А., 38
Безмельницына Ю.Е., 40
Бейсебаева А., 290
Бектаева Ж.Б., 288
Бильченко Г.Г. (мл.), 41, 45
Бильченко Г.Г. (ст.), 47
Бильченко Н.Г., 41, 45
Бободжанов А.А., 53
Бондаренко Н.П., 54
Бородин П.А., 55
Бородин С.Л., 275
Булатов М.В., 56
Булатова Р.Р., 57
Булинская Е.В., 58
Бурлуцкая М.Ш., 60
Бурушева Л.Ш., 63
Бутерин С.А., 64, 65
Бутов В.В., 66
Бырдин А.П., 67

В
Валовик Д.В., 68
Васильева А.А., 69
Вахитова Е.В., 70
Вахитова С.Р. , 70
Вельмисов П.А., 73
Верещагин В.Н., 75, 77
Вирченко Ю.П., 78, 80
Владимирова О.В., 82
Войтицкий И.О., 87
Волосивец С.С., 89
Ву Нгуен Шон Тунг, 92
Высоцкая И.А., 95

Г
Габдуллин М.Р., 96

Галатенко В.В., 98
Галеев Э.М., 101
Гаркавенко Г.В., 102
Гетманова Е.Н., 103
Гималтдинова А.А., 104
Гладышев Ю.А., 26, 105
Глызин С. Д., 107
Голованева Ф.В., 284
Головко Н.И., 215, 273
Голубов Б.И., 89
Горбенко О.Д., 269
Горюнов В.Е., 108

Д
Давыдова М.Б., 29, 33, 109
Данилин А.Р., 111
Данченко В.И., 113, 114
Данченко Д.Я., 113, 114
Джабраилов А.Л., 23
Дикарев Е. Е., 115
Додонов А.Е., 116, 117
Долгих А.Н., 118, 119
Долгих Т.Ф., 120
Думачев В.Н., 66
Дюжина Н.А., 121

Е
Евтушенко А.А., 181
Елецких И.А., 122
Елфимова А.В., 109
Ельчанинова Г.Г., 122
Ершова Е.М., 123
Ефремова Л.С., 124

Ж
Жук Л.В., 125
Жук Т.А., 215, 273

З
Завгородний М.Г., 21
Зайцева Н.В., 126
Закора Д.А., 128
Зверева М.Б., 129
Звягин А.В., 130
Зубова С.П., 131

И
Игнатьев М.Ю., 132
Илолов М., 133

К
Кабанцова Л.Ю., 136
Калитвин А.С., 137, 138
Калитвин В.А., 139
Калманович В.В., 105, 140
Каменский М.И., 129
Капицына Т.В., 142
Каплиева Н.А., 269
Касымова Ё.Ф., 276
Качалов В.И., 144
Кильдибаева С.Р., 146
Киричек В.А., 147
Ковалева М.И., 82
Козко А.И., 148
Колесников В.С., 150
Колесникова И.В., 82
Колесов А. Ю., 107
Коновалова М.А., 151
Конягин С.В., 152
Копачевский Н.Д., 87, 154, 155
Коржавина М.С., 156
Корнев В.В., 160
Корнев С.В., 40
Коровина М.В., 164
Королев Г.М., 168
Коростелева Д.М., 229, 243
Короткий В.А., 171
Костин Д.В., 173
Костина Т.И., 173
Крейн М.Н., 174

Кривошеева О.А., 175
Криштал И.А., 37
Кувшинников А.Е., 177
Кудрявцева О.С., 178
Кулешов А.А., 179
Курбатов В.Г., 180
Курбатова И.В., 180
Курсеева В.Ю., 68
Кутерин Ф.А., 181

Л
Лапшина М.Г., 188
Лепихин С.А., 194
Лийко В.В., 182
Лобанова Н.И., 183
Лобода А.В., 24
Ломовцев Ф.Е. , 184
Лукашенко В.Т., 186
Лукашенко Т.П., 98
Лыков К.В., 187
Ляхов Л.Н., 188

М
Малафеев О.А., 189, 190
Малюгина М.А., 65
Мельников Р.А., 227
Миронов А.Н., 191
Миронова Л.Б., 191
Молгачев А.А., 73
Москалев П.В., 192
Мохамад А.Х., 193
Мусакаев Н.Г., 275

Н
Насыров А.А., 194
Никитина А.А., 195
Новиков С.Я., 196

О
Огарков В.Б., 252
Оразов И.О., 288
Орешина М.Н., 197
Орлова А.С., 198

П
Панков В.В., 199
Парфенов А.П., 189
Переходцева Э.В., 203
Петросова М.А., 261
Петросян Г.Г., 206
Пискарев С.И., 208
Плотников М.Г., 209
Подкопаева В.А., 301
Покладова Ю.В., 73
Половинкин И.П., 210
Половинкина М.В., 210, 211
Полякова Д.А., 212
Прач В.С., 67
Преображенская М.М., 213
Прокопьева Д.Б., 215

Р
Работинская Н.И., 29
Раецкая Е.В. , 131, 217
Раецкий К.А, 218
Райцин А.М., 219
Расулов А.Б., 221
Рединских Н.Д., 190
Рогач Д.А., 222
Родикова Е.Г., 38
Родин В.А., 223
Розов Н. Х., 107
Романова Е.Ю., 225
Рощупкин С.А., 188
Рыманова Т.Е., 122
Рыхлов В.С., 226

С
Саввина О.А., 227
Садовничий В.А., 98
Самохин В.Н., 57
Самсонов А.А., 229, 243

Сапронов Ю.И., 82
Сапронова Т.Ю., 230
Сафонов В.Ф., 53
Сафронова М.И., 233
Сафронова Т.М., 233
Свинина С.В., 234
Семенова Т.Ю., 237
Сёмкина Е.В., 155
Сергеева А.М., 221
Сергзы Г.Н., 239
Серегина Е.В., 140, 266
Сидоренко А.А., 67
Симонова М.А., 109
Симоновская Г.А., 240
Синегубов С.В., 223
Смирнов В.Ю., 164
Солиев Ю.С., 241
Соловарова Л.С., 56
Соловьёв П.С., 229, 243
Соловьёв С.И., 229, 243
Солодов А.П., 244
Степанищева В.С., 245
Степович М.А., 140, 171, 266
Стородубцева Т.Н. , 248, 252
Страхов С.И., 253
Струков В.Е., 255
Струкова И.И., 256
Субботин А.В., 78, 80
Сумин В.И., 156

Т
Терехин П.А., 257
Тихонов И.В., 245, 258, 261
Трусова Н.И., 138
Турбин М.В., 119
Туртин Д.В., 266

У
Усков В.И., 268
Ускова Н.Б., 37
Ускова О.Ф., 269
Устюжанинова А.С., 119

Ф
Фарков Ю.А., 270
Федоров Ю.С., 221
Фомин В.И., 271
Фролова Е.С., 273

Х
Харченко В.Д., 33
Хасанов М.К., 275
Хасанов Ю.Х., 276
Хацкевич В.Л. , 277
Хромов А.П., 160

Ц
Царьков И.Г., 278
Цветкович Д.Г., 258

Ч
Черноусова Н.В., 233
Чечин Д.А., 280
Чечина С.А., 29, 33
Чечкин Г.А., 57
Чиглинцев И.А., 194

Ш
Шабров С.А., 284
Шаброва М.В., 284
Шабуров А.А., 111
Шайна Е.А., 286
Шалданбаев А.Ш., 288, 290, 291
Шалданбаева А.А., 291
Шалданбай Б.А., 290
Шамолин М.В., 293
Шананин Н.А., 294
Шелковой А.Н., 295
Шерстюков В.Б., 258, 261, 296
Шкляев К.С., 298

Шоманбаева М.Т., 288, 290, 291
Штейников Ю.Н., 299

Щ
Щербаков В.И., 299

Я
Янченко А.Я., 301

Научное издание

СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ И СМЕЖНЫЕ ПРОБЛЕМЫ

Материалы Международной конференции Воронежская зимняя математическая школа

(28 января – 2 февраля 2019 г.)

Издано в авторской редакции

Верстка и подготовка оригинал-макета *С. А. Шаброва*

Подписано в печать 27.12.2018. Формат 60×84/16.
Усл. п.л. 18,3. Уч.–изд. л. 18,6. Тираж 200 экз. Заказ 11.

Издательский дом ВГУ
394018 Воронеж, пл. Ленина, 10
Отпечатано с готового оригинал-макета в типографии
Издательского дома ВГУ
394018 Воронеж, ул. Пушкинская, 3