Воронежский государственный университет
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук

СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ И СМЕЖНЫЕ ПРОБЛЕМЫ

**Материалы
международной конференции
Воронежская зимняя математическая школа
(30 января – 4 февраля 2025 г.)**

Воронеж
Издательский дом ВГУ
2025

УДК 517.53(97; 98)
ББК 22.16
С56

Конференция поддержана Воронежским государственным университетом

Программный комитет:
Б. С. Кашин (председатель), П. А. Бородин, $\boxed{\text{Б. И. Голубов}}$, Е. М. Семенов, А. П. Хромов (заместители председателя), А. И. Аптекарев, В. Н. Дубинин, М. И. Дьяченко, В. Г. Звягин, М. И. Каменский, Г. А. Карагулян, С. В. Конягин, Т. П. Лукашенко, С. Р. Насыров, С. Я. Новиков, В. А. Костин, В. Г. Кротов, Г. А. Курина, Е. С. Половинкин, В. Ю. Протасов, М. А. Скопина, Ф. А. Сукочев, В. Н. Темляков, А. А. Шкаликов, А. С. Бондарев (ученый секретарь)

Оргкомитет:
Б. С. Кашин (председатель), М. Ш. Бурлуцкая, Д. В. Костин, А. П. Хромов (заместители председателя), Н. Ю. Антонов, С. В. Асташкин, А. В. Боровских, П. А. Бородин, А. В. Звягин, С. П. Сидоров, А. П. Солодов, В. Н. Темляков, И. В. Колесникова (технический секретарь.)

С56 **Современные методы теории функций и смежные проблемы** : материалы международной конференции: Воронежская зимняя математическая школа (30 января – 4 февраля 2025 г.) / Воронежский государственный университет ; Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова ; Математический институт им. В. А. Стеклова РАН. — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2025. — 436 с.

ISBN 978-5-9273-4189-4

В сборнике представлены материалы докладов и лекций, включенных в программу Воронежской зимней математической школы, проводимой Воронежским госуниверситетом совместно с Московским государственным университетом им. М. В. Ломоносова, Математическим институтом им. В. А. Стеклова РАН. Тематика охватывает широкий спектр проблем действительного и комплексного анализа, теории аппроксимаций, спектральной теории операторов, оптимального управления теории краевых задач, методов математического моделирования, проблем преподавания математики в высшей и средней школе.

УДК 517.53(97; 98)
ББК 22.16

© Воронежский государственный университет, 2025
© Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, 2025
© Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, 2025

ISBN 978-5-9273-4189-4

© Оформление. Издательский дом ВГУ, 2025

Организаторы

Воронежский государственный университет

Московский государственный университет

Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Steklov International Mathematical Center

Содержание

Contents

О РОДОСЛОВНОЙ БОРИСА НИКОЛАЕВИЧА САДОВСКОГО

Л.П. Петрова (Воронеж, ВГУ)
lpp1950@mail.ru

После открытия мемориальной доски М.А. Красносельского на улице Театральной мы с Борисом Николаевичем Садовским и Ириной Николаевной Прядко возвращались в главный корпус ВГУ на кафедру. Борис Николаевич спросил нас, сильно ли плохо он выступил с речью на открытии. Мы с Прядко удивились, ответив, что речь его была вполне нормальной и даже, можно сказать, хорошей. Садовский настойчиво возразил: «Нет, я выступил плохо - что намечал сказать о Марке Александровиче, почему-то не сказал, а нёс всякую ерунду, которую и не планировал. Но, я рад, что вы этого не заметили, и, надеюсь, остальные тоже не сильно заметили».

Помня об этом случае, я боялась, что так же не сумею толком рассказать на семинаре по истории воронежской математики о Б.Н. Садовском то, что намечала. Так оно и вышло. Рассказ мой был бессвязным и незавершённым. Пользуясь предоставленной мне возможностью изложить свой рассказ «письменно» постараюсь исправить свои ошибки, а заодно добавить ещё некоторые сведения, найденные в интернете.

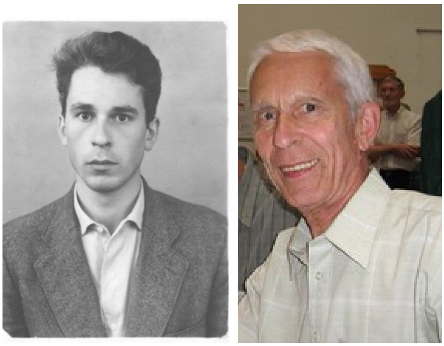


Рис 1. Борис Николаевич Садовский

Начну с того, что Борис Николаевич смолоду обладал особенным, открытым и немного удивлённым взглядом увлечённого человека, который он смог сохранить и в зрелом возрасте. Вопрос о том,

© Петрова Л.П., 2025

насколько этот взгляд объясняется характером Бориса Николаевича, а насколько наследием предков, сподвигли меня к изучению его корней. Не все ветви предков Бориса Николаевича мне удалось в равной степени выявить, но по которой из них передался ему столь особенный взгляд, мне стало очевидным.

Не буду навязывать своего мнения, а прокомментирую повествование добытыми в интернете и в личных архивах фотографиями, чтоб каждый читатель мог сам проследить за «взглядом».

1. Ардашевы.

История рода Ардашевых тянется с XVII века от выходца из Казани Ардаша (тюркское значение этого имени – «благополучие», «успех», персидское значение – «владыка огня», однако словом «ардаш» в Персии называли шёлк самого низкого качества).

Фёдор Никитич Ардашев, прапрадед Б.Н. родился в 1773 (или в 1774) году, жена его Евдокия Ильинична была на 3 года моложе. Фёдор Никитич был православным священником Троицкой церкви села Волчье Вятского уезда Вятской губернии (ныне – Кировская область). К 1816 году в семье было пятеро детей: Дорофей, Никанор, Мариамна, Александр и Анна (упоминается, что всего в семье было 7 детей).

Ардашев Александр Федорович, прадед Б.Н. родился 24 августа по старому стилю 1812, умер 8 февраля 1870 года (за 3 месяца до рождения младшего сына Владимира). В 1830-1836 гг. А.Ф. Ардашев учился в Вятской духовной семинарии. Но пожелал работать не в церковной, а в государственной системе. Служил в Пермской казенной палате. Продвигался в классных чинах медленнее, чем было обычно для чиновников с университетским образованием, вплоть до надворного советника (произведен 26 января 1862 г., чин 7-го класса), равнозначного военному чину подполковника. Это повышение дало А.Ф. Ардашеву личное дворянство (потомственное дворянство в эти годы получали лишь чиновники начиная с 4-го класса). С середины 60-х годов Ардашев стал прихварывать, и в конце 1864 г. вышел в отставку с небольшой пенсией (106 руб. 14 коп. в год). Умер 8 февраля 1870 г. А.Ф. Ардашев имел награды: Знак отличия беспорочной службы за 15 лет и темно-бронзовую медаль в память войны 1853–1856 гг. Жена Ардашева (Бланк) Любовь Александровна. У Ардашевых было восемь детей: Федор (1859 – 1892), Алексей (1861– ?); Александр (1863 – 1933); Дмитрий (1865 – 1915); Георгий (между 1866 и 1869 – после 1918); Виктор (между 1866 и 1869 – 15 января

1918); Евдокия (в тот же период – после 1920-х); Владимир (1870 – 1911). Все они родились в Перми.

Рис 2. Братья (не все) Ардашевы с семьями

Братья Ардашевы были людьми примечательными. Они честно служили России, отличались демократизмом; те из них, кто дожил до революционных событий 1917 года, оказались не в ладах с властью, которую возглавил их двоюродный брат, Владимир Ильич Ульянов (Ленин). Младшим братом в семье Ардашевых был Владимир.

Владимир Александрович Ардашев **дед Б.Н.** родился в Перми 25 мая 1870 года спустя три месяца после кончины своего отца надворного советника А.Ф. Ардашева. Будучи одновременно беременными, сёстры Мария Александровна Ульянова и Любовь Александровна Ардашева договорились, что если у них родятся мальчики, то они назовут их Владимирами.

По окончании гимназии в 1889 г. Владимир Ардашев поступил вместе с Владимиром Ульяновым на юридический факультет Казанского университета. Спустя год Ульянова отчислили из университета за участие в студенческих волнениях. Ардашев в знак протеста и солидарности просил его тоже отчислить. В 1890 г. Владимир Ардашев перешел на юридический факультет Императорского Санкт-Петербургского университета и окончил его с самыми высокими оценками в 1893 г., получив диплом 1-й степени. По совету брата Александра он обратился к председателю Екатеринбургского окружного суда с просьбой предоставить ему работу, как дипломированному юристу. По прибытии в Екатеринбург Владимир в том же 1893 г. был зачислен в Екатеринбургскую окружную судебную палату младшим кандидатом, через два года стал старшим кандидатом (следовательские должности) затем – судебным следователем. Ему довелось служить судебным следователем в Екатеринбурге, Камышлове, Ирбите, Шадринске, Верхотурье и в их уездах. Большую часть времени Владимир работал в Камышлове и его уезде, а в мае —- июне 1896 г. даже исполнял должность городского судьи в Камышлове. К концу 90-х годов Ардашев получил, как специалист по судебно-следственным делам, широкую известность. 15 декабря 1901 г. он получил высокое назначение на должность «товарища» (т.е. заместителя) прокурора Екатеринбургского судебного округа, после чего окончательно поселился в Екатеринбурге.

В мае 1910 г. Владимира Ардашева повысили по службе, он стал членом окружного суда. Карьера его была успешной, а в чинах стремительной. В 26 лет (в 1896 г.) он стал уже титулярным советником (9-й класс), в 1901 г. — коллежским асессором, в 1904 г. — надворным советником, в следующим году – коллежским советником, а через несколько лет представлен в статские советники (утверждение пришло с задержкой – в 1912 г., после его смерти) с правом на получение личного дворянства. 5 июня 1897 г. В.А. Ардашев получил свою первую награду - серебряную медаль в память царствования императора Александра III - а 1 января 1907 г. Владимиру Александровичу пожалован орден св. Анны III степени.

Женился Владимир в 38-летнем возрасте на Марии Алексеевне Скачковой, родившейся 15 сентября 1882 г. в Красноярске, дочери почетного гражданина Камышлова. Супруги жили в достатке, в большом доме жены. У них было две дочери - Ольга (родилась 5 апреля 1908 г.) и Лидия (25 февраля 1910 г.). У Лидии при крещении крестными были Георгий и Ксения - дети Александра Ардашева.

Жизненный путь Владимира Ардашева прервался внезапно. Вернувшись из служебной поездки в Камышлов, он заболел и слёг, а в ночь на 12 декабря 1911 года скончался от воспаления лёгких (врачам не удалось его спасти).

2. Бланки.

На этой ветви родословной Бориса Николаевича я остановлюсь совсем коротко, о ней много известно благодаря тому, что она является так же родословной ветвью Владимира Ульянова (Ленина).

Мойша Ицкович (после крещения в православие – Дмитрий Иванович) Бланк **прапрапрадед Б.Н.** – мещанин-ростовщик, торговец. В одном из документов дата его рождения – март-апрель 1763 или 1764 гг., в другом (его письмо императору Николаю I от 18 сентября 1846 г. с указанием на свой 90-летний возраст) – 1756. г. У Мойши (Дмитрия) Бланк было трое детей: сыновья Абель (после крещения – Дмитрий) и Израиль (после крещения – Александр), а также дочь Любовь. Крещение братьев произошло 10 июля 1820 г., восприемниками (крестными) были: у Абеля сенатор Д.О. Баранов, граф А.И. Апраксин у Израиля. Учились братья Бланки с большим рвением, успешно, в 1824 г. окончили медицинскую академию со званием лекарей.

Александр Дмитриевич Бланк **прапрадед Б.Н.** предположительно родился в 1801–1804 гг. Был женат на Анне Иоганновне (Ивановне) Гроссшопф. У них родилось шестеро детей: сын Дмитрий (9 сентября 1830 – 19 января 1850 предположительно покончил с собой), дочери Анна (30 августа 1831 – 1897), Любовь (20 августа 1832 – 24 декабря 1895), Екатерина (25 декабря 1833 – 1883), Мария (22 февраля 1835 – 2 июля 1916) и Софья (24 июня 1836 – 9 августа 1897). Александр Дмитриевич Бланк был успешным врачом-хирургом, в отставку он вышел в чине статского советника. Этот чин дал ему потомственное дворянство, которое не получили лишь две младшие его дочери Мария и Софья, так как родились после повышения требований к чиновникам для получения дворянства. Умер Александр Дмитриевич в 1870 году в своем имении Кокушкино Казанской губернии.

Любовь Александровна Бланк **прабабушка Б.Н.**. Мачеха Катерина Ивановна дала детям своей сестры, как и сама Анна, основные знания, в том числе нескольких иностранных языков: немецкого, английского и французского. Первым мужем Л.А. Бланк был Александр Фёдорович Ардашев. После его смерти поселилась в Кокушкино, управляла именьем, растила и воспитывала детей. Вторым мужем

Любови Александровны стал А. П. Пономарёв, общих детей у них не было.

3. Скачковы.

Максим Михайлович Скачков **прапрадед Б.Н.** – купец в первом поколении, к 1874 году заявивший капитал по первой гильдии. Скачков относился к полупривилегированному сословию, выше которого были только дворяне и духовенство. Купцам первой гильдии разрешалось вести заграничную торговлю, владеть фабриками, заводами и морскими судами. О статусе семьи Скачковых свидетельствовал и добротный каменный дом в центре Екатеринбурга, стоявший по версии одного источника на месте нынешнего Второго Дома Советов по 8 Марта, по версии другого источника – на Фетисовской улице (ныне ул. Б. Ельцина). Сына Максима Скачкова Николая с тяжелой формой паранойи поместили в столичную клинику. А у сына Алексея врачи установили хроническую болезнь сердца, которая сделала его «меланхоликом, не переносившим хладнокровно самых малейших неприятностей и огорчений».

Алексей Максимович Скачков **прадед Б.Н.** предположительно 1854 года рождения – человек с непростой судьбой. Учился Алексей в элитной мужской гимназии Его Императорского Величества Александра II, начавшей свою работу с октября 1861 года. Гимназия располагалась в трехэтажном здании на главном проспекте Екатеринбурга, здесь обучались дети чиновников, заводчиков и купцов. В 1872 г. власти обвинили нескольких педагогов гимназии в симпатиях к народническим идеям и запрети-ли преподавать, уволили и директора. Новый директор Яков Иванович Предтеченский ужесточил дисциплину в гимназии.

В 1874 году Алексей Скачков обучался в шестом классе гимназии. Успеваемость его была настолько слабой, что когда в апреле директор гимназии Яков Предтеченский застукал Скачкова курящим в туалете, то решил с ним не церемониться. По существовавшим тогда правилам, в случае изгнания учащегося из гимназии за дисциплинарное нарушение никакая другая гимназия в России не могла его принять для продолжения обучения. Именно с такой формулировкой Предтеченский и решил отчислить Алексея. Подросток долго и безуспешно умолял директора изменить формулировку. 5

мая Алексей вновь пришел в кабинет к Предтеченскому и два раза выстрелил в него из револьвера. Несмотря на полученные ранения, директор смог встать и выбежать в коридор. Вдогонку он получил еще три пули, после которых уже не двигался. Сбежавшиеся на шум люди задержали стрелка, который «в сильно возбужденном состоянии едва мог выговорить несколько слов». Предтеченский умер через несколько дней. А разбирательство дела Алексея Скачкова затянулось на несколько лет. Адвокат юноши строил защиту на якобы имеющейся наследственной предрасположенности Алексея к психической болезни. Экспертом предварительного заключения выступили лечащий Алексея врач В.А. Туржанский с коллегами, они провели полное обследование Алексея Скачкова и «не нашли в нем расстройства умственных способностей», выявив у него лишь порок сердца и туберкулез. Суд 22 декабря 1876 г. вынес приговор гласивший: «...екатеринбургского купеческого сына Алексея Максимова Скачкова, 18 лет, по лишении всех особенных лично и по состоянию присвоенных прав и преимуществ сослать на житье в Енисейскую губернию с воспрещением всякой отлучки из места, назначенного для его жительства в продолжение трех лет, и потом выезда в другие губернии или области Сибири в продолжение десяти лет...».

Женился Алексей (по-видимому, в ссылке) на Александре Осиповне. У них был единственный ребёнок – дочь Мария. После ссылки Алексей Скачков поселился в Камышлове, ближайшем городе к Екатеринбургу городе. Государственная служба Алексея Максимовича началась 20 января 1902 г. с должности гласного Камышловской городской думы. 18 июня 1906 г. он был избран на следующий четырехлетний срок, а 27 мая 1908 г. Скачков был избран на должность городского головы на оставшийся до следующих выборов срок. 7 марта 1910 г. Алексей Максимович вновь избран гласным городской думы на очередной срок, а уже 22 мая он был выдвинут из состава думы на пост городского головы на 1910–1914 гг. Кроме своей думской деятельности А.М. Скачков активно участвовал в общественной жизни Камышлова. 3 октября 1906 г. Он был избран почетным мировым судьей по Камышловскому уезду, и 8 октября 1909 г. Алексей Максимович снова был избран почетным мировым судьей по уезду на следующий срок. С 18 июня 1908 г. он состоял председателем Камышловского сиротского суда. Всех его общественных должностей и не перечислить. А. М. Скачков также занимался садоводством. Самыми удивительными в его саду были яблони. Крупные, крепкие, красивые — они хорошо переносили уральскую зиму.

Алексей Максимович Скачков был почётным гражданином Камышловки за свои заслуги.
права его семье получать пенсию в размере его оклада (такое право наступало после 25 лет выслуги). Но стараниями руководства окружного суда, в порядке исключения, Министерством юстиции пенсия семье была определена в размере 600 рублей в год (по 200 руб. на вдову и дочерей), с единовременным пособием в 2 200 рублей. Таким образом до большевистского переворота, жизнь Марии Алексеевны с детьми была обеспеченной.

Рис 3. Родители Б.Н. Садовского

Мария второй раз вышла замуж за П. Плешкова. Во времена правления Колчака Плешкова назначили начальником уголовного розыска Екатеринбурга. Расследование обстоятельств гибели императора Николая II и царской семьи возглавлял бывший до него начальник угро надворный советник А. Кирста. Он продолжал расследование после увольнения тайно от судебных властей Екатеринбурга, а в официальных документах следствия в дальнейшем фигурировал новый начальник угро П. Плешков. В 1919 году после ухода Колчака из Екатеринбурга Плешков был расстрелян большевиками. Перед казнью ему разрешили проститься с семьёй. В памяти Ольги и Лидии Ардашевых сцена прощания оставила глубокий след (им было на тот момент 11 и 9 лет соответственно). С потерей второго мужа для Марии Алексеевны настали трудные времена. Не обнаружено мной, в каком именно году, она с дочерьми перебралась в Казань. Там она сдавала комнату студентам. Одним из постояльцев был Садовский Николай Вениаминович (будущий отец Б.Н.). Садовские приютили детей родственников (скорее всего со стороны Ардашевых), чьи мужья ушли на фронт (у Николая Вениаминовича была бронь).

Лидия Владимировна Садовская (Ардашева) **мама Б.Н.** родилась 25 февраля 1910 г.. По-видимому, окончила Казанский университет, вышла замуж за Садовского Н.В.. Работала в том же институте в Оренбурге, что и Николай Вениаминович на кафедре неорганической химии. По рассказам Б.Н. дом, сад и все хозяйственные дела держались на ней, а во время войны в доме родителей было много детей, так как кроме своих трёх (Вадима, Натальи и Бориса)

Николай Вениаминович Садовский **отец Б.Н.** родился 7 января 1909 г. в семье ветеринарного врача в селе Поисева Мензилинского района Татарской АССР. В 1931 г. он окончил Казанский ветеринарный институт и в течение года работал практикующим ветеринарным врачом. С 1932 г. начал работать ассистентом кафедры хирургии Оренбургского сельскохозяйственного института. В 1941 г. Николай Вениаминович защитил кандидатскую диссертацию на тему «О проводниковой аналгезии в области головы лошади и крупного рогатого скота», а в 1957 г. в качестве докторской диссертации защитил написанный им оригинальный учебник для ветеринарных вузов «Основы топографической анатомии сельскохозяйственных животных и краткий практикум по оперативной хирургии», изданный в 1953 г.. Был награжден орденами «Трудового Красного Знамени» и «Знак Почета», шестью медалями. Почетное звание «Заслуженный деятель науки РФ» ему присвоено в 1972 г. Умер в 1997г. В Оренбурге.

Не могу утверждать, что все изложенные мной факты достоверны на 100 процентов. О близких родственниках Ленина в советское время многое замалчивалось, а некоторые сведения искажались с целью утвердить мнение, что Ленин происходил не из зажиточного класса буржуев и был близок к простому народу. Лет 8 назад я безуспешно пыталась найти сведения о жизни и карьере Владимира Ардашева. В некоторых публикациях его судьбу путали с судьбой брата Виктора, в других приводились совсем краткие сведения. Сейчас в интернете можно найти более адекватные публикации, тем не менее даже в одной и той же из них порой я находила противоречивые сведения. Приходилось выбирать то, что мне казалось более-менее близким к истине. В заключении не могу не отметить, что Борис Николаевич унаследовал от своих предков всё самое лучшее – ум, трудолюбие, порядочность, достоинство, ставшие неотъемлемыми чертами его характера, которые, как нельзя лучше, подчёркивались его открытым, пытливым, внимательным взглядом.

ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ

Е.В. Абрамова, С.А. Унучек (Москва, НИУ МЭИ)
AbramovaYV@mpei.ru, UnuchekSA@mpei.ru

Рассмотрим соболевское пространство функций

$$\mathcal{W}_2^n(\mathbb{R}) = \{x(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}) : x^{(n-1)}(\cdot) \text{ - локально абсолютно непрерывна}, x^{(n)}(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})\}, n \in \mathbb{N}.$$

Пусть $n_0 = 0, n_1, n_2, k_1, k_2 \in \mathbb{N}$, $0 < k_1 < n_1 < k_2 < n_2$. Для каждой функции $x(\cdot) \in \mathcal{W}_2^{n_2}(\mathbb{R})$ приближенно известны производные n_1-го и n_2-го порядков и сама функция. Это означает, что известны функции $y_0(\cdot)$, $y_1(\cdot)$ и $y_2(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$ такие, что $\|x^{(n_j)}(\cdot) - y_j(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant \delta_j$, $j = 0, 1, 2$. Ставится задача одновременного оптимального восстановления производных k_1-го и k_2-го порядков функции $x(\cdot) \in \mathcal{W}_2^{n_2}(\mathbb{R})$, $0 < k_1 < n_1 < k_2 < n_2$.

Под методами восстановления будем понимать всевозможные отображения $\varphi\colon (L_2(\mathbb{R}))^3 \to (L_2(\mathbb{R}))^2$. Погрешностью метода φ будем называть величину

$$e(\mathcal{W}_2^{n_2}(\mathbb{R}), \overline{K}, \overline{\delta}, \varphi) = \sup_{\substack{x(\cdot)\in\mathcal{W}_2^{n_2}(\mathbb{R}),\ \overline{Y}\in(L_2(\mathbb{R}))^3 \\ \|x^{(n_j)}(\cdot)-y_j(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}\leqslant\delta_j,\ j=0,1,2}} \sqrt{\sum_{j=1}^{2} p_j \|x^{(k_j)}(\cdot) - \varphi_j(\overline{Y})(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}},$$

где $\overline{K} = (k_1, k_2)$, $\overline{\delta} = (\delta_0, \delta_1, \delta_2)$, $\overline{Y} = (y_0(\cdot), y_1(\cdot), y_2(\cdot))$, $\varphi = (\varphi_1(\overline{Y}), \varphi_2(\overline{Y}))$. Здесь $p = (p_1, p_2)$, $p_1, p_2 \geqslant 0$ — весовые коэффициенты, варьируя которые можно отдавать предпочтение более точному восстановлению производной какого-либо порядка. Погрешностью оптимального восстановления называется величина

$$E(\mathcal{W}_2^{n_2}(\mathbb{R}), \overline{K}, \overline{\delta}) = \inf_{\varphi\colon (L_2(\mathbb{R}))^3 \to (L_2(\mathbb{R}))^2} e(\mathcal{W}_2^{n_2}(\mathbb{R}), \overline{K}, \overline{\delta}, \varphi).$$

Метод $\widehat{\varphi}$, минимизирующий эту погрешность, называется оптимальным методом.

Положим $\widehat{\lambda}_0 = p_1 \left(\frac{\delta_2}{\delta_0}\right)^{2k_1/n_2} \left(1 - \dfrac{k_1}{n_2}\right) + p_2 \left(\frac{\delta_2}{\delta_0}\right)^{2k_2/n_2} \left(1 - \dfrac{k_2}{n_2}\right)$, $\widehat{\lambda}_2 = p_1 \dfrac{k_1}{n_2} \left(\frac{\delta_2}{\delta_0}\right)^{2(k_1/n_2 - 1)} + p_2 \dfrac{k_2}{n_2} \left(\frac{\delta_2}{\delta_0}\right)^{2(k_2/n_2 - 1)}$.

© Абрамова Е.В., Унучек С.А., 2025

Теорема 1. *Если* $\delta_1 \geqslant \delta_2^{\frac{n_1}{n_2}} \delta_0^{1-\frac{n_1}{n_2}}$, *погрешность оптимального восстановления равна* $E(\mathcal{W}_2^{n_2}(\mathbb{R}), \overline{K}, \overline{\delta}) = \sqrt{\widehat{\lambda}_0\delta_0^2 + \widehat{\lambda}_2\delta_2^2}$.
Метод $\widehat{\varphi} = (\widehat{\varphi_1}(\overline{Y}), \widehat{\varphi_2}(\overline{Y}))$ *такой, что его преобразование Фурье*

$$F\widehat{\varphi_s}(\overline{Y}) = (i\xi)^{k_s}\left(1 - \alpha_s(\xi)\right)Fy_0(\xi) + (i\xi)^{k_s-n_2}\alpha_s(\xi)Fy_2(\xi), s = 1, 2,$$

где

$$\alpha_s(\xi) = \frac{\widehat{\lambda}_2\xi^{2n_2} + \theta_s(\xi)|\xi|^{n_2}\sqrt{\widehat{\lambda}_0\widehat{\lambda}_2\left(\widehat{\lambda}_0 + \widehat{\lambda}_2\xi^{2n_2} - p_1\xi^{2k_1} - p_2\xi^{2k_2}\right)}}{\widehat{\lambda}_0 + \widehat{\lambda}_2\xi^{2n_2}},$$

$\theta_s(\cdot)$– *произвольные функции из* $\mathbf{L}_\infty(\mathbf{R})$, *удовлетворяющие условию* $p_1\xi^{2k_1}\theta_1^2(\xi) + p_2\xi^{2k_2}\theta_2^2(\xi) \leqslant 1$, *является оптимальным.*

Литература

1. Магарил-Ильяев Г.Г. О наилучших методах восстановления производных на соболевских классах / Г.Г. Магарил-Ильяев, К.Ю. Осипенко // Известия РАН. Сер. : Математика. — 2014. — Т. 78, № 6. — С. 83–102.

2. Магарил-Ильяев Г.Г. Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации / Г.Г. Магарил-Ильяев, К.Ю. Осипенко // Функц. анализ и его приложения. — 2003. — № 37. — С. 51–64.

3. Унучек С.А. Оптимальное восстановление производной функции по неточно заданным производным других порядков и самой функции / С.А. Унучек // Владикавказский математический журнал. — 2016. — Т. 18, вып. 3. — С. 60–71.

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ВОССТАНОВЛЕНИИ РЕШЕНИЯ ОДНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Е.В. Абрамова, С.А. Унучек (Москва, НИУ МЭИ)
abramova_ elena@inbox.ru

Рассматривается задача оптимального восстановления решения интегрального уравнения Фредгольма II рода с ядром $K(x,t) = |x-t|$ по приближенно заданным коэффициентам Фурье правой части. Найдена погрешность оптимального восстановления, указано семейство оптимальных методов.

© Абрамова Е.В., Унучек С.А., 2025

Обозначим через $\mathbb{T}$ отрезок $[-\pi,\, \pi]$ с идентифицированными концами. Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма II рода:

$$y(x) + \int_{-\pi}^{\pi} |x-t|\, y(t)\, dt = f(x).$$

Мы ставим задачу о нахождении решения этого уравнения по приближенно заданному конечному набору коэффициентов Фурье функции $f(\cdot)$.

Точная постановка задачи такова. Пусть r — натуральное число. Зададим класс функций $W_2^r(\mathbb{T}) = \{f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}) :\ f^{(r-1)}(\cdot)$ — абс. непр. на $\mathbb{T}$, $\|f^{(r)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} \leqslant 1\}$. Представление рядом Фурье функции $f(\cdot) \in W_2^r(\mathbb{T})$ имеет вид:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{inx}, \quad \text{где} \quad c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\, dx.$$

Пусть нам известны приближенные значения $2N+1$ коэффициентов ряда Фурье функции $f(\cdot)$, то есть известны числа $g_{-N}, \ldots, g_0$, $g_1, \ldots, g_N$ такие, что $\sum\limits_{n=-N}^{N} |c_n(f) - g_n|^2 \leqslant \delta^2$, $\delta > 0$. Мы хотим по этой информации восстановить решение исходной задачи (по возможности) наилучшим образом.

В качестве *методов восстановления* будем рассматривать произвольные отображения $m\colon \mathbb{C}^{2N+1} \to L_2(\mathbb{T})$. Величина

$$E_{2N+1}(W_2^r(\mathbb{T}), \delta) = \inf_m \sup_{\substack{f(\cdot)\in W_2^r(\mathbb{T}),\ g\in\mathbb{C}^{2N+1},\\ \sum\limits_{n=-N}^{N} |c_n(f)-g_n|^2 \leqslant \delta^2}} \|y(\cdot) - m(g)(\cdot)\|_2$$

называется *погрешностью оптимального восстановления* а метод $\widehat{m}$, на котором достигается нижняя грань, называется *оптимальным методом восстановления.* Точное решение уравнения можно записать так:

$$y(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \eta_n c_n(f) e^{inx}, \text{ где } \eta_n = \begin{cases} \dfrac{1}{1+\pi^2}, & n = 0, \\ 1, & n - \text{четное},\ n \neq 0, \\ \dfrac{n^2}{n^2-4}, & n - \text{нечетное}. \end{cases}$$

Пусть $\mu_n = \eta_n^2,\ \nu_n = n^{2r}$. Обозначим $\lambda = \max\limits_{n>N} \dfrac{\mu_n}{\nu_n}$,

$$M = co\{\{(\nu_n, \mu_n)\}_{n\in\mathbb{Z}_+}\} + \{(\nu_n,\, \nu\lambda) | \nu \geqslant 0\},$$

где $co\,\Omega$ — выпуклая оболочка множества Ω. Определим функцию $\theta(\cdot)$ на $[0, +\infty)$ так: $\theta(\nu) = \max\{\mu | (\nu, \mu) \in M\}$. Здесь $\theta(\nu)$ — вогнутая ломаная. Пусть q — количество точек излома ломаной $\theta(\nu)$, $0 = \nu_0 < \nu_{k_1} < \nu_{k_2} < \ldots < \nu_{k_q}$ — их аргументы.

Теорема 1. *При всех $\delta > 0$ погрешность оптимального восстановления*

$$E_{2N+1}(W_2^r(\mathbb{T}), \delta) = \delta\theta^{1/2}(\delta^{-2}).$$

Если δ^{-2} принадлежит тому промежутку на $\mathbb{R}_+$, где $\theta(\cdot)$ задается уравнением $\theta(\nu) = \lambda_1 + \lambda_2\nu$, то для $\alpha_0 = \eta_0$ и всех α_n, $1 \leqslant n \leqslant N$, удовлетворяющих условию

$$\frac{|\eta_n - \alpha_n|^2}{n^{2r}\lambda_2} + \frac{|\alpha_n|^2}{\lambda_1} \leqslant 1,$$

следующие методы являются оптимальными:

$$\widehat{m}(g)(\nu) = \sum_{|n|\leqslant N} \alpha_n g_n e^{in\nu}$$

Литература

1. Магарил-Ильяев Г.Г. Выпуклый анализ и его приложения / Г.Г. Магарил-Ильяев — М. : УРСС, 2020 — 180 с.

2. Осипенко К. Ю. О восстановлении решения задачи Дирихле по неточным исходным данным / К. Ю. Осипенко // Владикавказский мат. журнал —2004. —№ 4. — С. 55–62.

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ БАНАХОВЫМИ ПРЕДЕЛАМИ[1]

Н.Н. Авдеев (Воронеж, ВГУ)
nickkolok@mail.ru, avdeev@math.vsu.ru

Обозначим через ℓ_∞ пространство ограниченных последовательностей с обычными полуупорядоченностью и нормой

$$\|x\| = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k|,$$

[1] Исследование выполнено за счет гранта Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС» (проект No 22-7-2-27-3)

© Авдеев Н.Н., 2025

где $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел. Банахов предел — естественное обобщение предела с пространства сходящихся последовательностей c на ℓ_∞. Существование банаховых пределов было анонсировано С. Мазуром в 1929 г.; доказательство приведено в книге С. Банаха [1].

Линейный функционал $B \in \ell_\infty^*$ называется банаховым пределом (пишем: $B \in \mathfrak{B}$), если:

1. $B \geqslant 0$, т. е. $Bx \geqslant 0$ для $x \geqslant 0$ (положительность),
2. $B\mathbb{I} = 1$, где $\mathbb{I} = (1, 1, \ldots)$ (нормированность),
3. $B(x_1, x_2, \ldots) = B(x_2, x_3, \ldots)$ (трансляционная инвариантность).

Если линейный оператор H таков, что $BH = B$ для некоторого $B \in \mathfrak{B}$, то оператор H называют *эберлейновым*, а банахов предел B называют *инвариантным относительно* H и пишут: $B \in \mathfrak{B}(H)$. Например, оператор $\sigma_2(x_1, x_2, x_3, ...) = (x_1, x_1; x_2, x_2; x_3, x_3; ...)$ эберлейнов. За подробностями отсылаем читателя к [2]. Существует ли настолько «хороший» банахов предел B_0, что $B_0 \in \mathfrak{B}(H)$ для всех эберлейновых операторов H сразу?

Ответ отрицателен. Пусть $B \in \mathfrak{B}$, $G_B x = (Bx, Bx, Bx, ...)$. Тогда оператор G_B называется оператором, *порождённым* банаховым пределом B и является эберлейновым (и, более того, B-регулярным в смысле [3], т.е. для любого $B_1 \in \mathfrak{B}$ верно $B_1 G_B \in \mathfrak{B}$). Однако $\mathfrak{B}(G_B) = \{B\}$.

Простейшие свойства порождённых операторов ($0 \leqslant \lambda \leqslant 1$):

$$G_{B_1} G_{B_2} = G_{B_2}, \qquad G_{\lambda B_1 + (1-\lambda) B_2} = \lambda G_{B_1} + (1-\lambda) G_{B_2}.$$

Линейный оператор $G_{\{B_k\}}$, определённый как $(G_{\{B_k\}} x)_n = B_n x$, будем называть *мультипорождённым* последовательностью банаховых пределов $\{B_k\} \subset \mathfrak{B}$. Мультипорождённый оператор является B-регулярным и потому эберлейновым. Мультипорождённый оператор не имеет матричного представления.

Прямая задача об инвариантности: по заданному оператору H описать $\mathfrak{B}(H)$. Порождённый оператор интересен в первую очередь тем, что конструктивно решает обратную задачу об инвариантности: позволяет для любого банахова предела построить линейный оператор, относительно которого этот банахов предел инвариантен. Мультипорождённые (и в частности порождённые) операторы позволяют строить интересные конструкции, иллюстрирующие свойства банаховых пределов. Например, пусть $B \in \mathfrak{B}(\sigma_2)$, $H_B x = (x_1, Bx, x_2, Bx, x_3, Bx, ...)$. Тогда $B \in \mathfrak{B}(H_B)$.

Литература

1. Banach S. Théorie des opérations linéaires. / S. Banach. — Reprint of the 1932 original — Sceaux: Éditions Jacques Gabay. — 1993. — iv+128 pp. — ISBN: 2-87647-148-5.

2. Semenov E. M., Sukochev F. A. Invariant Banach limits and applications. / Journal of Functional Analysis. — 201. — т. 259, No 6. — с. 1517–1541.

3. Alekhno E., Semenov E., Sukochev F., Usachev A. Invariant Banach limits and their extreme points. / Studia Math. — т. 242, No 1. — 2018. — с. 79–107.

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ ВОЛАТИЛЬНОСТИ

Я.Ю. Агранович (Воронеж, ВГУ)

Agranovich.yan@gmail.com

Рассматривается модель волатильности, основанная на реализованных показателях, построенных с использованием внутридневных и высокочастотных биржевых данных (HEAVY - High-frequency-based Volatility models). Данный способ моделирования волатильности, был предложен в работе (Shephard, Sheppard, 2010). Оценки вариации цен включают реализованную дисперсию и реализованное ядро. Такая модель позволяет синхронизировать оценки волотильности с изменениями самой волатильности.

Пусть $r_1, r_2, ..., r_T$ — последовательность дневной доходности финансовых активов и соответствующая последовательность их дневных реализованых оценок: $RM_1, RM_2, ..., RM_T$.

В качестве: RM_t будем использовать реализованную ядерную оценку.

$$RM_t = \sum_{h=-H}^{H} K(\frac{h}{H+h})\gamma_h,\ \gamma_h = \sum_{j=|h|+1}^{n} p_{j,t}p_{j-|h|,t}$$

с весовой функцией Парзена

$$K(b) = \begin{cases} 1-6b^2+6|b|^3, & |b| \leqslant \frac{1}{2} \\ 2(1-|b|^3), & \frac{1}{2} < |b| \leqslant 1 \\ 0, & |b| > 1, \end{cases}$$

© Агранович Я.Ю., 2025

$p_{j,t}$ — внутридневные приращения цен, выбор параметра H обеспечивает асимптотическую несмещённость и состоятельность оценки. Такая оценка является робастной к шуму в высокочастотных данных, а так же является гарантированно неотрицательной.

Обозначим $RM_t = x_t$ и запишем модель в виде:

$$\begin{pmatrix} r_t^2 \\ x_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_t^r \varepsilon_t \\ \mu_t^x \eta_t \end{pmatrix},$$

где $E\left\{\begin{pmatrix} \varepsilon_t \\ \eta_t \end{pmatrix} \quad \Gamma_{t-1}\right\} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, μ_t — условные математические ожидания.

Теперь запишем двумерное условное математическое ожидание:

$$\begin{pmatrix} \mu_t^r \\ \mu_t^x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_r \\ \omega_x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_r & 0 \\ 0 & \alpha_x \end{pmatrix} \times x_{t-1} + \begin{pmatrix} \beta_r & 0 \\ 0 & \beta_x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mu_{t-1}^r \\ \mu_{t-1}^x \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \omega_r \\ \omega_x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_r & 0 \\ 0 & \alpha_x \end{pmatrix} \times (x_{t-1} - \mu_{t-1}^x) + \begin{pmatrix} \beta_r & \alpha_r \\ 0 & \beta_x + \alpha_x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mu_{t-1}^r \\ \mu_{t-1}^x \end{pmatrix},$$

где матрица $\begin{pmatrix} \beta_r & \alpha_r \\ 0 & \beta_x + \alpha_x \end{pmatrix}$ управляет памятью двумерного случайного процесса, при этом элемент β_r является его моментумом, а $\beta_x + \alpha_x$ отвечает за персистентность выбранной реализованной оценки.

Для учёта асимметрии введём в каждую модель по два дополнительных слагаемых. В результате получим:

$$\mu_t^r = \omega_r + \alpha_r x_{t-1} + \beta_r \mu_{t-1}^r + \varphi_r x_{t-1} i_{t-1} + \delta_r r_{t-1},$$
$$\mu_t^x = \omega_x + \alpha_x x_{t-1} + \beta_x \mu_{t-1}^x + \varphi_x x_{t-1} i_{t-1} + \delta_x r_{t-1}$$

Таблица 1: Оценки коэффициентов HEAVY моделей данных

модель	ω	α	β	φ	δ
Heavy	4,99E-06	0,192216	0,727415	0,223429	-0,001608
s.e.	2,31E-06	0,068308	0,060230	0,088873	0,000323
Heavy-r	4,80E-06	0,238411	0,590563	0,306945	-0,000575
s.e.	9,57E-07	0,034535	0,039864	0,053564	0,000131

В ходе исследования использованы данные по индексам SP500. Расчёт реализованных оценок условной дисперсии производился по ценам закрытия пятиминутных интервалов отдельно для каждого дня, остальные расчёты производились по ценам закрытия дневного интервала.

В таблице представлены оценки неизвестных коэффициентов, рассмотренных моделей

Следует отметить, что все оценки коэффициентов модели являются статистически значимыми (на уровне $\alpha = 0,05$) и модели вполне могут быть использованы для построения прогноза волатильности.

ОБ ОЦЕНКАХ ЛИНЕЙНЫХ ПОПЕРЕЧНИКОВ ОБОБЩЕННОГО КЛАССА НИКОЛЬСКОГО–БЕСОВА В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОРЕНЦА–ЗИГМУНДА[1]

Г. Акишев (Астана, КФ МГУ)
akishev_g@mail.ru

Пусть $\bar{p} = (p_1, \dots p_m)$, $\bar{\tau} = (\tau_1, \dots \tau_m)$, $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \dots \alpha_m)$ and $p_j, \tau_j \in (1, \infty)$, $\alpha_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, ..., m$. Через $L^*_{\overline{p},\overline{\alpha},\overline{\tau}}(\mathbb{T}^m)$ обозначим анизотропное пространство Лоренца–Зигмунда — всех измеримых по Лебегу функций m переменных f имеющих период 2π по каждой переменной и для которых величина

$$\|f\|^*_{\bar{p},\bar{\alpha},\bar{\tau}} := \Big[\int_0^1 \Big[\dots \Big[\int_0^1 \left(f^{*_1,\dots,*_m}(t_1,...,t_m)\right)^{\tau_1}$$

$$\times \Bigg(\prod_{j=1}^{m} \big(1 + |\log_2 t_j|\big)^{\alpha_j} t_j^{\frac{1}{p_j} - \frac{1}{\tau_j}}\Bigg)^{\tau_1} dt_1\Big]^{\frac{\tau_2}{\tau_1}} \dots\Big]^{\frac{\tau_m}{\tau_{m-1}}} dt_m\Big]^{\frac{1}{\tau_m}}$$

конечна, где $f^{*_1,\dots,*_m}(t_1,...,t_m)$ — невозрастающая перестановка функции $|f(2\pi\overline{x})|$ по каждой переменной $x_j \in [0,1)$ при фиксированных остальных переменных (см. [1]). $a_{\overline{n}}(f)$—коэффициенты Фурье функции $f \in L_1(\mathbb{T}^m)$ по системе $\{e^{i\langle\overline{n},\overline{x}\rangle}\}$ и $\langle\overline{y},\overline{x}\rangle = \sum\limits_{j=1}^{m} y_j x_j$, $\rho(\overline{s}) := \left\{\overline{k} = (k_1,...,k_m) \in \mathbb{Z}^m :\ 2^{s_j-1} \leqslant |k_j| < 2^{s_j}, j = 1,...,m\right\}$, $\delta_{\overline{s}}(f,\overline{x}) := \sum\limits_{\overline{n}\in\rho(\overline{s})} a_{\overline{n}}(f)\, e^{i\langle\overline{n},\overline{x}\rangle}$.

Пусть $r_j > 0$, $b_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, m$ и дана функция $\Omega_{\overline{r}}(\overline{t}) := \prod_{j=1}^{m} t_j^{r_j}\left(\log(2/t_j)\right)^{b_j}$, $t_j \in (0,\, 1]$, $\Omega_{\overline{r}}(\overline{t}) = 0$, если $t_1 \cdot ... \cdot t_m = 0$, $\overline{r} =$

[1] Работа выполнена в рамках грантового финансирования Комитета науки Министерства науки и высшего образования РК (Проект AP19677486).

© Акишев Г., 2025

$(r_1, ..., r_m)$. Рассматривается обобщенный класс Никольского–Бесова

$$S^{\Omega_{\overline{r}}}_{\overline{p},\overline{\alpha},\overline{\tau},\overline{\theta}}B = \Big\{ f \in \mathring{L}^{*}_{\overline{p},\overline{\alpha},\overline{\tau}}(\mathbb{T}^m) : \ \Big\| \Big\{ \Omega^{-1}_{\overline{r}}(2^{-\overline{s}}) \|\delta_{\overline{s}}(f)\|^{*}_{\overline{p},\overline{\alpha},\overline{\tau}} \Big\}_{\overline{s}\in\mathbb{Z}^m_+} \Big\|_{l_{\overline{\theta}}} \leqslant 1 \Big\},$$

где $\Omega_{\overline{r}}(2^{-\overline{s}}) = \Omega_{\overline{r}}(2^{-s_1}, ..., 2^{-s_m})$, $\overline{\theta} = (\theta_1, ..., \theta_m)$, $1 \leqslant \theta_j \leqslant +\infty$.

Оценки линейных поперечников классов Соболева и Никольского–Бесова в различных пространствах установлены многими авторами (например см. библиографию в [2] и [3], [4]).

В докладе будут представлены оценки линейного поперечника $\lambda_M\big(S^{\Omega_{\overline{r}}}_{\bar{p},\bar{\alpha},\bar{\tau}^{(1)},\bar{\theta}}B,\ L^{*}_{\bar{q},\bar{\beta},\bar{\tau}^{(2)}}\big)$, $\overline{q} = (q_1, \ldots, q_m)$, $\overline{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_m)$, $\overline{b} = (b_1, ..., b_m)$, $\overline{\tau}^{(i)} = (\tau^{(i)}_1, \ldots, \tau^{(i)}_m)$, $i = 1, 2$. В частности,

Теорема 1. *Пусть* $1 < p_j \leqslant 2 < q_j < \infty$, $p^{'}_j = p_j/(p_j - 1)$, $\max_{j=1,...,m} q_j < \min_{j=1,...,m} p^{'}_j$, $1 < \tau^{(i)}_j < \infty$, $i = 1, 2$, $\alpha_j, \beta_j, b_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, ..., m$ *и* $0 < r_{j_0} - \frac{1}{p_{j_0}} = \min\{r_j - \frac{1}{p_j} :\ j = 1, ..., m\}$, $A = \{j = 1, ..., m : r_j - \frac{1}{p_j} = r_{j_0} - \frac{1}{p_{j_0}},\ j = 1, ..., m\}$, $j_1 = \min\{j \in A\}$. *Если* $1 \leqslant \theta_j \leqslant 2$ *для* $j = 1, ..., m$, *то*

$$\lambda_M\big(S^{\Omega_{\overline{r}}}_{\bar{p},\bar{\alpha},\bar{\tau}^{(1)},\bar{\theta}}B,\ L^{*}_{\bar{q},\bar{\beta},\bar{\tau}^{(2)}}\big) \leqslant C\frac{(\log M)^{(|A|-1)(r_{j_0}+\frac{1}{2}-\frac{1}{p_{j_0}})+\sum\limits_{j\in A}(b_j-\alpha_j)}}{M^{r_{j_0}+\frac{1}{2}-\frac{1}{p_{j_0}}}}$$

при $b_j - \alpha_j \geqslant 0$, $j \in A$ *и* $b_j - \alpha_j \in \mathbb{R}$, $j \notin A$.

В случае $\overline{b} = \overline{0}$ для класса $S^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\alpha},\overline{\tau}^{(1)},\overline{\theta}}B$ малой гладкости в пространстве Лебега $L_q(\mathbb{T}^m)$ справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть* $1 < p_j \leqslant 2 < q \leqslant p^{'}_j$, $j = 1, ..., m$ *и* $0 < r_{j_0} + \frac{1}{q} - \frac{1}{p_{j_0}} = \min\{r_j + \frac{1}{q} - \frac{1}{p_j} :\ j = 1, ..., m\}$, $A = \{j = 1, ..., m : r_j + \frac{1}{q} - \frac{1}{p_j} = r_{j_0} + \frac{1}{q} - \frac{1}{p_{j_0}}\}$. *Если* $\frac{1}{p_{j_0}} - \frac{1}{q} < r_{j_0} < \frac{1}{p_{j_0}}$, *то*

$$\lambda_M\big(S^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{\alpha},\bar{\tau}^{(1)},\bar{\theta}}B, L_q\big) \leqslant C\bigg(\frac{(\log M)^{(|A|-1)}}{M}\bigg)^{\frac{q}{2}(r_{j_0}+\frac{1}{q}-\frac{1}{p_{j_0}})}$$

$$\times(\log M)^{-\sum\limits_{j\in A}\alpha_j+\sum\limits_{j\in A\setminus\{j_1\}}(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta_j})_+}, \text{ где } a_+ = \max\{a, 0\}.$$

Литература

1. Blozinski A.P. Multivariate rearragements and Banach function spaces with mixed norms / A.P. Blozinski // Trans. Amer. Math. Soc. — 1981. — Vol. 263. — P. 146–167.

2. Dinh Dung. Hyperbolic cross approximation/ Dinh Dung , V.N. Temlyakov , T. Ullrich // ArXiv: 1601. 03978v1[math.NA] 15 Jan, 2016. — P. 1–154.

3. Vasil'eva A.A. Kolmogorov and linear widths of the weighted Besov classes with singularity at the origin /A.A. Vasil'eva// J. Approx. Theory. —2013. — Vol. 167. — P. 1–41.

4. Малыхин Ю. В. Произведение октаэдров плохо приближается в метрике $l_{2,1}$ /Ю. В. Малыхин, К. С. Рютин // Мат. зам. 2017. Т. 101, № 1. С. 85–90.

ОБ АНАЛОГЕ ТЕОРЕМЫ СРАВНЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ С «РАСЩЕПЛЕННЫМИ» МЕРАМИ

И.А.Х. Ал-Гарайхоли (Воронеж, ВГУ)

evan.abd3@gmail.com

В работе доказывается аналог теоремы Штурма для уравнений

$$-\frac{d}{d[\sigma]_3}\left(p_1\frac{du}{d[\mu]_2}\right)+u\frac{dQ_1}{d[\sigma]_3}=0, \tag{1}$$

$$-\frac{d}{d[\sigma]_3}\left(p_2\frac{du}{d[\mu]_2}\right)+u\frac{dQ_2}{d[\sigma]_3}=0. \tag{2}$$

Уравнения в точках разрыва мер понимаются следующим образом:

$$-\left[\left(p_iu'_{[\mu]_2}\right)(\tau_1^\xi)-\left(p_iu'_{[\mu]_2}\right)(\xi-0)\right]+ \\ +u(\xi-0)\left[Q_i(\tau_1^\xi)-Q_i(\xi-0)\right]=0,$$

$$-\left[\left(p_iu'_{[\mu]_2}\right)(\tau_2^\xi)-\left(p_iu'_{[\mu]_2}\right)(\tau_1^\xi)\right]+ \\ +u(\xi)\left[Q_i(\tau_2^\xi)-Q_i(\tau_1^\xi)\right]=0,$$

$$-\left[\left(p_iu'_{[\mu]_2}\right)(\xi+0)-\left(p_iu'_{[\mu]_2}\right)(\tau_2^\xi)\right]+ \\ +u(\xi+0)\left[Q_i(\xi+0)-Q_i(\tau_2^\xi)\right]=0,$$

$(i=1,2)$.

© Ал-Гарайхоли И.А.Х., 2025

Решение уравнений мы ищем в классе E: $[\mu]$–абсолютно непрерывных на $[0;\ell]$ функций, первая $[\mu]$–производная которых $[\sigma]$–абсолютно непрерывна на $[0;\ell]$.

Нам удобней считать, что $\mu(x)$ определена на множестве $\overline{[0;\ell]}_\mu$ в котором каждая точка $\xi \in S(\mu)$ заменена на тройку собственных элементов. Так как для восстановления функции (с точностью до постоянной константы) после дифференцирования, необходимо «помнить» оба скачка функции $u(x)$, которые вообще говоря различны. Поэтому, производная функции $u(x)$ по мере $\mu(x)$, которую мы обозначим через $\frac{du}{d[\mu]_2}$, чтобы подчеркнуть, что она в точке ξ принимает два упорядоченных значения, определена на множестве $\overline{[0;\ell]}_\mu^{(2)}$ в котором каждая точка $\xi \in S(\mu)$ заменена на пару собственных значений (помимо предельных $\xi \pm 0$). Обозначать мы будем через τ_1^ξ и τ_2^ξ.

Точку s, принадлежащую множеству $\overline{[0;\ell]}_\mu$, мы назовем нулевой точкой решения $u(x)$ однородного уравнения (1), если $u(s) = 0$. Аналогично определяется нулевая точка однородного уравнения (2).

Точку τ_1^ξ назовем нулевым местом решения $u(x)$ однородного уравнения (1) (или (2)), если $u(\xi - 0) \cdot u(\xi) < 0$; точку τ_2^ξ назовем нулевым местом решения $u(x)$ однородного уравнения (1) (или (2)), если $u(\xi) \cdot u(\xi + 0) < 0$.

Нулевые точки и нулевые места мы будем называть нулями решения.

Будем говорить, что нулевая точка ξ_1 функции $u_1(x)$ лежит левее нулевой точки ξ_2 функции $u_2(x)$, если либо $\xi_1 < \xi_2$ в обычном смысле, либо $\xi_1 = \xi_2 = \xi \in S(\mu)$ и

$$\frac{\begin{vmatrix} u_1(\xi - 0) & u_1(\xi) \\ u_2(\xi - 0) & u_2(\xi) \end{vmatrix}}{(u_1(\xi) - u_1(\xi - 0)) \cdot (u_2(\xi) - u_2(\xi - 0))} > 0,$$

если точка τ_1^ξ является нулевой, или

$$\frac{\begin{vmatrix} u_1(\xi) & u_1(\xi + 0) \\ u_2(\xi) & u_2(\xi + 0) \end{vmatrix}}{(u_1(\xi + 0) - u_1(\xi)) \cdot (u_2(\xi + 0) - u_2(\xi))} > 0,$$

если нулевой является точка τ_2^ξ.

Справедлива теорема.

Теорема. *Пусть* $p_i(x)$ — $[\sigma]$*–абсолютно непрерывны на* $\overline{[0;\ell]}_{\mu}^{(2)}$, *и для* x, *принадлежащих множеству* $\overline{[0;\ell]}_{\mu}^{(2)}$ *справедливы неравенства* $p_1(x) \geqslant p_2(x) > 0$ *и* $\dfrac{dQ_1}{d[\sigma]_3} \geqslant \dfrac{dQ_2}{d[\sigma]_3}$. *Пусть* $u(x)$ — *нетривиальное решение (1)) и* $\xi_1 < \xi_2$ — *его нулевые точки в* $[0;\ell]$. *Тогда любое нетривиальное решение* $v(x)$ *уравнения (2)) меняет в* (ξ_1, ξ_2) *знак.*

В работе используется подход, предложенный Ю.В. Покорным, к поточечной трактовке уравнения, который был применен им и его учениками к исследованию решений уравнений второго порядка [1]–[3].

Литература

1. Покорный, Ю. В. Осцилляционная теория Штурма–Лиувилля для импульсных задач / Ю. В. Покорный, М. Б. Зверева, С. А. Шабров // Успехи математических наук. — 2008. — Т. 63, № 1 (379). — С. 98–141.

2. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю. В. Покорный, О. М. Пенкин, В. Л. Прядиев и др. — М. : Физматлит, 2004. — 272 с.

3. Осцилляционный метод Штурма в спектральных задач / Ю. В. Покорный, Ж. И. Бахтина, М. Б. Зверева, С. А. Шабров. — М. : Физматлит, 2009. — 192 с.

АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Х.Ф. Алзамили, Э.Л. Шишкина

(Белгород, БелГу и Воронеж, ВГУ)

alzamili.khitam@mail.ru

Будем иметь дело с n-мерным евклидовым пространством $\mathbb{R}^n$, открытым ортантом

$$\mathbb{R}^n_+=\{x=(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \ x_1>0,\ldots,x_n>0\}.$$

Изучается проблема аналитичности по времени решения $u=u(x,t)$, $x \in \mathbb{R}^n_+$, $t > 0$ начальной задачи для сингулярного уравнения теплопроводности

$$u_t = \Delta_\gamma u, \qquad u = u(x,t),$$

© Алзамили Х.Ф., Шишкина Э.Л., 2025

где

$$\Delta_\gamma u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\gamma_1}{x_1}\frac{\partial u}{\partial x_1} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} + \frac{\gamma_n}{x_n}\frac{\partial u}{\partial x_n}$$

с вещественными аналитическими начальными данными $u(x,0){=}\varphi(x)$. Функция

$$E_\gamma(x,t) = \frac{1}{2^{|\gamma|}\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}\begin{cases} t^{-\frac{n+|\gamma|}{2}}e^{-\frac{|x|^2}{4t}} & \text{если } t>0; \\ 0 & \text{если } t\leqslant 0. \end{cases}$$

является фундаментальным решением многомерного сингулярного уравнения теплопроводности $u_t = \Delta_\gamma u$. Если $x{=}(x_1,...,x_n) \in \mathbb{C}^n$ и $t{\in}\mathbb{C}^1\backslash\{0\}$, то $E_\gamma(x,t)$ аналитична по каждой переменной $x_1,...,x_n$ для каждой ветви $t^{\frac{n+|\gamma|}{2}}$, если $(n{+}|\gamma|)$ нечетно, то аналитична по t.

Многомерный обобщенный сдвиг определяется равенством

$$({}^\gamma\mathbf{T}_x^y f)(x) = {}^\gamma\mathbf{T}_x^y f(x) = ({}^{\gamma_1}T_{x_1}^{y_1}...{}^{\gamma_n}T_{x_n}^{y_n}f)(x),$$

где каждый одномерный обобщенный сдвиг ${}^{\gamma_i}T_{x_i}^{y_i}$ для $i{=}1,...,n$ имеет вид

$$({}^{\gamma_i}T_{x_i}^{y_i}f)(x){=}\frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{\gamma_i}{2}\right)}\times$$

$$\times\int\limits_0^\pi f(x_1,...,x_{i-1},\sqrt{x_i^2{+}\tau_i^2{-}2x_iy_i\cos\varphi_i},x_{i+1},...,x_n)\ \sin^{\gamma_i-1}\varphi_i\,d\varphi_i.$$

Пространство $L_p^\gamma(\mathbb{R}_+^n)$, $1\leqslant p<\infty$ состоит из измеримых на $\overline{\Omega}_+$ функций, четных по каждой из своих переменных x_i, $i=1,...,n$ таких, что если $f{\in}L_p^\gamma(\mathbb{R}_+^n)$, то

$$\int\limits_{\Omega_+}|f(x)|^p x^\gamma dx<\infty, \qquad x^\gamma=\prod_{i=1}^n x_i^{\gamma_i}.$$

Пусть $C_{ev,b}(\mathbb{R}_+)$ — пространство всех ограниченных непрерывных функций, непрерывно продолжаемых на отрицательные значений переменных $x_1,...,x_n$ как четная функция по каждой переменной $x_1,...,x_n$ на Ω_+, тогда при $\varphi\in C_{ev,b}(\mathbb{R}_+)$, функция

$$u(x,t)=(E_\gamma(x,t-t_0)*\varphi)_\gamma(x)=\int\limits_0^\infty({}^\gamma T_x^y E_\gamma(x,t-t_0))\varphi(y)y^\gamma dy$$

удовлетворяет сингулярному уравнению теплопроводности $u_t = \Delta_\gamma u$ и начальным данным $u(x,t_0) = \varphi(x)$. Для этого это достаточно, чтобы $\varphi(x)e^{-\alpha|x|^2} \in L_1^\gamma(\mathbb{R}^n_+)$ для некоторого $\alpha > 0$ и $0 < t - t_0 < \frac{1}{4\alpha}$. Действительно, обобщенная свертка свертка будет существовать для комплексных x и t при условии, что $0 < \mathrm{Re}\,(t - t_0) < \frac{1}{4\alpha}$.

В области $\Omega_+ \subset \mathbb{R}^n_+$ функция $u \in C^\infty_{ev}$ имеет **порядок B-гармоничности ρ и тип B-гармоничности** τ, если для каждого компактного $K \subset \Omega_+$ и каждого $\varepsilon > 0$ существует константа $C^\gamma_{K,\varepsilon}$ такая, что

$$\limsup_{p\to\infty}\left(\frac{||\Delta^p_\gamma||_{\gamma,K}}{((2p)!)^{1-\frac{1}{\rho}}}\right)^{\frac{1}{2p}} \leqslant \tau.$$

Пусть $u(x,t)$ — аналитическое решение сингулярного уравнения теплопроводности $u_t = \Delta_\gamma u$ в области $D \subset \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}^n_+ \times \mathbb{C}$). При фиксированном t_0 функция $u(x,t_0)$ называется **пространственным сечением функции** u в точке t_0.

Теорема 1. *Для того чтобы функция $\varphi(x)$ была пространственным сечением аналитического решения задачи для сингулярного уравнения теплопроводности $u = u(x,t)$ необходимо и достаточно, чтобы $\varphi(x)$ имела порядок B-гармоничности $\rho = 2$ и тип B-гармоничности $\tau \leqslant \infty$.*

СУЩЕСТВОВАНИЕ, ЕДИНСТВЕННОСТЬ И ПОВЫШЕННАЯ СУММИРУЕМОСТЬ ГРАДИЕНТА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЗАРЕМБЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА СО СНОСОМ[1]

Ю.А. Алхутов, Г.А. Чечкин

(Владимир, ВлГУ, Москва, МГУ)

yurij-alkhutov@yandex.ru chechkin@mech.math.msu.su

В ограниченной строго липшицевой области $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, введем соболевское пространство функций $W^1_2(D,F)$, где $F \subset \partial D$ — замкнутое множество, как пополнение бесконечно дифференцируемых в замыкании D функций, равных нулю в окрестности F, по норме

$$\| u \|_{W^1_2(D,F)} = \left(\int\limits_D v^2\,dx + \int\limits_D |\nabla v|^2\,dx \right)^{1/2}.$$

[1] Первая часть работы выполнена первым автором в рамках государственного задания ВлГУ (проект FZUN-2023-0004), а результаты второго автора во второй части работы поддержаны грантом РНФ (проект № 20-11-20272).

© Алхутов Ю.А., Чечкин Г.А., 2025

Полагая $G = \partial D \setminus F$, рассмотрим задачу Зарембы

$$\mathcal{L}u := \Delta u + b \cdot \nabla u = l \ \text{ в } \ D, \quad u = 0 \ \text{ на } \ F, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \ \text{ на } \ G, \qquad (1)$$

где $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ означает внешнюю нормальную производную функции u, вектор-функция $b(x) = (b_1(x), \ldots, b_n(x))$ удовлетворяет условию

$$b_j(x) \in L_p(D), \quad p > 2 \text{ при } n = 2, \quad p \geqslant n \text{ при } n > 2, \qquad (2)$$

а l является линейным функционалом в пространстве, сопряженном к $W_2^1(D, F)$.

Под решением задачи (1) понимается функция $u \in W_2^1(D, F)$, для которой выполнено интегральное тождество

$$\int\limits_D \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx - \int\limits_D (b \cdot \nabla u) \varphi \, dx = -l(\varphi)$$

для всех пробных функций $\varphi \in W_2^1(D, F)$.

Используя теорему Рисса о представлении функционала в гильбертовых пространствах, нетрудно показать, что функционал l можно записать в виде

$$l(\varphi) = -\sum_{i=1}^{n} \int\limits_D f_i \varphi_{x_i} \, dx,$$

где $f_i \in L_2(D)$. Поэтому в силу интегрального тождества для каждого конкретного функционала решение задачи (1) можно понимать в смысле интегрального соотношения

$$\int\limits_D \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx - \int\limits_D (b \cdot \nabla u) \varphi \, dx = \int\limits_D f \cdot \nabla \varphi \, dx$$

для всех пробных функций $\varphi \in W_2^1(D, F)$, в котором компоненты вектор-функции $f = (f_1, \ldots, f_n)$ являются функциями из $L_2(D)$.

Ключевую роль в работе играет условие на структуру множества носителя данных Дирихле F. Для формулировки результата нам потребуется понятие ёмкости. Определим для компакта $K \subset \mathbb{R}^n$ ёмкость $C_q(K)$, которая при $1 < q < n$ определяется равенством

$$C_q(K) = \inf \Bigg\{ \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\nabla \varphi|^q \, dx : \ \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \ \varphi \geqslant 1 \text{ на } K \Bigg\}.$$

Ниже $B_r^{x_0}$ означает открытый n-мерный шар радиуса r с центром в точке x_0 и полагается $q = \dfrac{p}{p-1}$ при $n = 2$, $p > 2$ и $q = \dfrac{2n}{n+2}$ при $n > 2$, $p \geqslant n$. Предполагается выполнение следующего условия: для произвольной точки $x_0 \in F$ при $r \leqslant r_0(D)$ справедливо неравенство

$$C_q(F \cap \overline{B}_r^{x_0}) \geqslant c_0 r^{n-q}, \tag{3}$$

в котором положительная постоянная c_0 не зависит от x_0 и r.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Если выполнены условия* (2) *и* (3), *то задача Зарембы* (1) *однозначно разрешима в* $W_2^1(D, F)$ *и для ее решения справедлива оценка*

$$\| \nabla u \|_{L_2(D)} \leqslant C \|f\|_{L_2(D)}$$

с постоянной C, зависящей только от коэффициентов оператора $\mathcal{L}$, области D и размерности пространства.

Сформулируем теперь второе утверждение.

Теорема 2. *Если* $n = 2$, *выполнены условия* (2), (3) *и* $f \in \Big(L_{2+\delta_0}(D)\Big)^2$, *где* $\delta_0 > 0$, *то существуют положительные постоянные* $\delta(p, \delta_0) < \delta_0$ *и* C *такие, что для решения задачи* (1) *справедлива оценка*

$$\int\limits_D |\nabla u|^{2+\delta} dx \leqslant C \int\limits_D |f|^{2+\delta}\, dx, \tag{4}$$

где C зависит только от δ_0, величины c_0 из (3), *а также от области D и $\|b\|_{L_p(D)}$.*

Если $n > 2$, *выполнены условия* (2), (3) *и* $f \in \Big(L_{2+\delta_0}(D)\Big)^n$, *где* $\delta_0 > 0$, *то существуют положительные постоянные* $\delta(n, p, \delta_0) < \delta_0$ *и C такие, что для решения задачи* (1) *справедлива оценка* (4), *где C дополнительно зависит от размерности пространства n.*

Аналогичные результаты для линейного уравнения без сноса см. в [1] и [2], резултаты для p-лапласиана см. в [3]. А результаты в области с малыми отверстиями см. в [4].

Литература

1. Alkhutov Yu.A. On the Boyarsky–Meyers Estimate of a Solution to the Zaremba Problem /Yu.A. Alkhutov, G.A. Chechkin, V.G. Maz'ya // Arch Rational Mech Anal. — 2022. — V. 245, № 2. — P. 1197–1211.

2. Чечкин Г.А. Оценка Боярского–Мейерса для дивергентных эллиптических уравнений второго порядка. Два пространственных примера /Г.А. Чечкин, Т.П. Чечкина // Проблемы математического анализа. — 2022. — Т. 119. — С. 107–116.

3. Алхутов Ю.А. Многомерная задача Зарембы для уравнения $p(\cdot)$-Лапласа. Оценка Боярского-Мейерса /Ю.А. Алхутов, Г.А. Чечкин // Теоретическая и математическая физика. — 2024. — Т. 218, № 1. — С. 3–22.

4. Chechkin G.A. The Meyers Estimates for Domains Perforated Along the Boundary // Mathematics. — 2021. — V. 9, № 23. — Art.No 3015.

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ ДИНАМИКИ УПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ

М.А. Анкилов, А.С. Андреев (Ульяновск, УлГУ)
mankilov.2000@mail.ru

Рассматривается плоская задача о малых колебаниях упругой пластины, динамика которой описывается уравнением:

$$M\ddot{w}(x,t) + Dw''''(x,t) + \beta_0 w(x,t) = 0, \quad x \in [0,l],\, t \geqslant 0. \qquad (1)$$

Здесь $w(x,t)$ — функция, описывающая деформацию пластины; штрих обозначает производную по координате x, а точка — производную по времени t; M, D — масса и изгибная жесткость пластины; l — длина пластины; β_0 — коэффициент жесткости основания.

Пусть концы пластины закреплены шарнирно:

$$w(0,t) = 0,\ w(l,t) = 0,\ w''(0,t) = 0,\ w''(l,t) = 0. \qquad (2)$$

Зададим также начальные условия:

$$w(x,0) = f_1(x), \quad \dot{w}(x,0) = f_2(x), \qquad (3)$$

которые должны быть согласованы с краевыми условиями (2).

Введем функционал типа Ляпунова

$$\Phi = \int_0^l \left\{ M\dot{w}^2 + Dw''^2 + \beta_0 w^2 \right\} dx. \qquad (4)$$

© Анкилов М.А., Андреев А.С., 2025

Для функции $w(x,t)$, являющейся решением уравнения (1), с учетом условий (2) производная $\dot{\Phi}=0$. Интегрируя от 0 до t, получим $\Phi(t)=\Phi(0)$. Таким образом, согласно (3) получим равенство

$$\Phi=\int_0^l \left\{Mf_2^2(x)+Df_1''^2(x)+\beta_0 f_1^2(x)\right\}dx. \tag{5}$$

Решение уравнения (1) будем искать методом Галеркина [1], подчинив искомую функцию $w(x,t)$ краевым условиям (2):

$$w_m(x,t)=\sum_{k=1}^m a_k(t)g_k(x),\ g_k(x)=\sin\gamma_k x,\ \gamma_k=\frac{\pi k}{l}. \tag{6}$$

Учитывая ортогональность функций $\{g_k(x)\}_{k=1}^m$, из ортогональности невязки уравнения (1) и начальных условий (3) к этим функциям запишем систему уравнений и начальных условий для $a_n(t)$:

$$M\ddot{a}_n(t)+\left(D\gamma_n^4+\beta_0\right)a_n(t)=0,\quad n=1,...,m, \tag{7}$$

$$a_n(0)=\frac{2}{l}\int_0^l f_1(x)g_n(x)dx,\ \dot{a}_n(0)=\frac{2}{l}\int_0^l f_2(x)g_n(x)dx. \tag{8}$$

Согласно (6) получим равенство $w(x,t)=w_m(x,t)+R_m(x,t)$, где остаточный член $R_m(x,t)$ будем искать в виде

$$R_m(x,t)=a_{m+1}(t)g_{m+1}(x). \tag{9}$$

Функцию $a_{m+1}(t)$ определяем из уравнений (4), (5), которые в силу ортогональности базисных функций приводят к уравнению:

$$M\dot{a}_{m+1}^2(t)+\left(D\gamma_{m+1}^4+\beta_0\right)a_{m+1}^2(t)=-\sum_{k=1}^m\left(M\dot{a}_k^2(t)+\right. \tag{10}$$

$$\left.+\left(D\gamma_k^4+\beta_0\right)a_k^2(t)\right)+\frac{2}{l}\int_0^l\left\{Mf_2^2(x)+Df_1''^2(x)+\beta_0 f_1^2(x)\right\}dx.$$

Таким образом, решая задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (7) с начальными условиями (8), найдем $a_n(t)$, $n=1,...,m$, подставляя которые в уравнение (10) найдем $a_{n+1}(t)$. Следовательно, погрешность приближенного решения (6) вычисляется по формуле:

$$\varepsilon=|w(x,t)-w_m(x,t)|=|R_m(x,t)|\leqslant|a_{m+1}(t)|\leqslant\max_t|a_{m+1}(t)|. \tag{12}$$

С помощью математической системы Mathematica произведены численные эксперименты, доказывающие на этой простой задаче о свободных колебаниях упругой пластины-полосы достоверность предложенного численно-аналитического метода определения погрешности приближенного решения, полученного с помощью метода Галеркина.

Литература

1. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина / К. Флетчер. — М. : Мир, 1988. — 352 с.

АЛГЕБРЫ РАЗРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ И ИХ НЕПРЕРЫВНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

А.Б. Антоневич, И.Л. Люксембург
(Минск, БГУ; Институт математики НАН РБ)
antonevich@bsu.by, josef2016kolbasidze@mail.ru

Объектом исследования является алгебра $R(X)$ всех комплексно-значных функций, которые определены на упорядоченном (линейно) бикомпакте X, непрерывных слева в каждой точке, непрерывных в $\widehat{0}$ и $\widehat{1}$ ($\widehat{0}$ и $\widehat{1}$ обозначим минимальный и максимальный элемент X), и имеющих предел справа. Непрерывность слева и предел справа понимается нами в смысле пределов направленностей[4]. Здесь мы ограничимся исследованием упорядоченных бикомпактов без скачков[1], это естественное требование в рассматриваемой задаче, поскольку непрерывность слева и предел справа имеют смысл, если любая окрестность точки содержит точки слева и справа. Операции сложения, произведения, а также умножения на скаляр вводятся стандартно, а норму определим следующим образом: $\|f\| = \sup\limits_{x\in X}|f(x)|$. Согласно общей теории коммутативных банаховых алгебр[см. с. 11,3], эта алгебра изоморфна алгебре всех непрерывных функций на вспомогательном топологическом пространстве, которое является пространством максимальных идеалов $\mathfrak{M}(R(X))$ этой алгебры. Целью работы является выявление связей между структурой X и $\mathfrak{M}(R(X))$.

Итак, пусть X — упорядоченный бикомпакт без скачков и пусть $\mathfrak{l} = \{x \in X : \widehat{0} < x < \widehat{1}\}$. Построим $\mathfrak{X} = \{\widehat{0}, \widehat{1}, \mathfrak{l} \times \{0,1\}\}$ и введем на этом множестве топологию, порожденную отношением порядка:

1) $\widehat{0} < x < \widehat{1}\ \forall x \in \mathfrak{X}$.

2) Если $x_1, x_2 \neq \widehat{0}, \widehat{1}$, $x_1 = (z_1; y_1)$, $x_2 = (z_2; y_2)$, тогда $x_1 > x_2$, если $z_1 > z_2$ или если $z_1 = z_2$ и $y_1 > y_2$.

© Антоневич А.Б., Люксембург И.О., 2025

Множество $\mathfrak{X}$, порядок и соответственно топологию на нем, можно кратко описать на языке арифметики порядковых типов. В данном случае X имеет тип $1+\lambda+1$, где λ — порядковый тип $\mathfrak{l}$, а $\mathfrak{X}$ имеет тип $1+2\cdot\lambda+1$. Справедлива следующая

Теорема 1. *$\mathfrak{X}$ бикомпактно и гомеоморфно $\mathfrak{M}(R(X))$.*

Пусть $C(\mathfrak{X})$ — алгебра непрерывных комплекснозначных функций на $\mathfrak{X}$ с равномерной нормой. Изоморфизм φ, переводящий $f \in R(X)$ в $\widehat{f} \in C(\mathfrak{X})$ строится по правилам:

1) $\widehat{f}(\widehat{0}) = f(\widehat{0})$ 2) $\widehat{f}(\widehat{1}) = f(\widehat{1})$ 3) $\widehat{f}(x;0) = f(x)$

4) $\widehat{f}(x;1) = f^+(x)$, где $f^+(x)$ предел f в точке x справа.

Из построения φ следует, что $M_x(f) = f(x)$ и $M_x^+(f) = f^+(x)$ являются мультипликативными функционалами алгебры $R(X)$.

В результате предыдущих исследований [5],[6] обнаружено, что в случае $X=[0;1]$ пространство максимальных идеалов $R(X)$ гомеоморфно пространству «две стрелки»(обозначается далее $\mathfrak{T}$). Которое имеет интересную топологическую структуру и изучалось ранее с разных точек зрения, впервые оно было описано Александровым и Урысоном в их классической работе[2] и использовалось как контрпример для одной из метризационных теорем. Впоследствии обнаруживались все новые и новые свойства $\mathfrak{T}$, в частности известно, что $\mathfrak{T}$ — сепарабельно, не имеет счетной базы, вполне несвязно, совершенно нормально, но не метризуемо, не является диадическим бикомпактом. Последнее удалось установить после отрицательного разрешения гипотезы о диадических бикомпактах Есениным-Вольпиным, а также серии работ Александрова, Пономарева, Шанина и других.

Литература

1. Александров П.С. Введение в теорию множеств и общую топологию / П.С. Александров. — М. : Наука, 1977. — 368 с.

2. Александров П.С. Мемуар о компактных топологических пространствах / П.С. Александров, П.С. Урысон. — М. : Наука, 1971. — 144 с.

3. Гельфанд И.М. Коммутативные нормированные кольца / И.М. Гельфанд, Д.А. Райков, Г.Е. Шилов. — УМН, 1:2(12) 1946. — 316 с.

4. Алекснядрян Р.А Общая топология / Р.А. Александрян, Э.А. Мирзаханян. — М. : Высш. школа, 1979. — 336 с.

5. Люксембург И.Л. Пространства максимальных идеалов алгебр разрывных функций / И.Л. Люксембург // XIV Белорусская математическая конференция : материалы междунар. науч. конф. В 3 ч. Ч. 1 — Минск : Беларуская навука, 2024. — С. 68–69.

6. Люксембург И.Л. Непрерывное представление алгебр разрывных функций / И.Л. Люксембург // 81-я научная конференция студентов и аспирантов БГУ : материалы конф. В 3 ч. Ч. 1 — Минск : БГУ, 2024. — С. 218-222.

О ВАРИАЦИОННОМ ПРОИСХОЖДЕНИИ УРАВНЕНИЯ БИХАРИ НА ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ГРАФЕ

Н.Д. Арахов, В.Л. Прядиев, Н.Н. Рябцева (Воронеж, ВГУ; Воронеж, ВГУ; Белгород, Белгородский университет потребительской кооперации)
arahovnikita@gmail.com; pryad@mail.ru; riabceva-nn@yandex.ru

В работах [1], [2], [3] изучались качественные свойства решений дифференциального уравнения (X — промежуток из $\mathbb{R}$)

$$y'' + p(x)f(y)g(y') = 0,\ x \in X, \tag{1}$$

в предположении, что $p \in C(X)$, $\inf\limits_X p > 0$, $f \nearrow$ и $\varphi, g \in \mathcal{F}$, где $\varphi(y) = f(y)/y$, а $\mathcal{F}$ - множество положительных функций из $C(\mathbb{R})$, неубывающих на $(-\infty; 0]$ и невозрастающих на $[0; +\infty)$. В этих предположениях уравнение (1) назовём уравнением Бихари на X.

Рассмотрим теперь понимаемые в соответветсвии с [4] ориентированный геометрический граф Γ с рёбрами γ_j, $j = \overline{1, m}$, и множеством J внутренних вершин и дифференциальное уравнение Бихари на нём:

$$y'' + p(x)f_j(y)g_j(y') = 0,\ x \in \gamma_j,\ j = \overline{1, m}, \tag{2}$$

решения которого предполагаются непрерывными на замыкании $\overline{\Gamma}$. Дополнительные условия трансмиссии в точках из J укажем позднее. Поставим для уравнения (2) обратную задачу вариационного исчисления, то есть задачу о существовании не имеющей нулей функции $\mu = \mu(x, y, y')$ такой, что дифференциальное уравнение

$$\mu(x, y, y')\big[y'' + p(x)f_j(y)g_j(y')\big] = 0,\ x \in \gamma_j,\ j = \overline{1, m}, \tag{3}$$

при некоторых условиях трансмиссии будет уравнением Эйлера для некоторого функционала вида $\Phi(y) = \displaystyle\int_\Gamma F(x, y(x), y'(x))\, dx$ (см. в [5] теорему 1). В случае, когда $\overline{\Gamma}$ — отрезок с $J = \varnothing$, результат решения этой задачи представлен в [6].

© Арахов Н.Д., Прядиев В.Л., Рябцева Н.Н., 2025

Теорема. *Пусть* $\forall j = \overline{1,m} : p\big|_{\gamma_j} = const$. *Тогда обратная задача вариационного исчисления для уравнения (2) разрешима — достаточно положить* $F(x,y,y')\big|_{x\in\gamma_j} = A_j H_j(y) K_j(y')$, *где* $H_j(y) = = \exp\left(-p\int_0^y f(s)\,ds\right)$, $K_j(y') = y' \cdot \left[\int_{\mathrm{sign(y')}}^{y'} \frac{1}{t^2}\exp\left(-\int_0^t \frac{\sigma\,d\sigma}{g(\sigma)}\right)dt + \right.$ $\left. +B_{j,\mathrm{sign(y')}}\right]$ *при* $y' \neq 0$ *и* $K_j(0) = -1$, *а* $A_j \neq 0$, $B_{j,1}$, $B_{j,-1}$ *— константы, причём* $B_{j,-1} - B_{j,1} = 2 - \int_{-1}^{1} \frac{1}{t^2}\left[\exp\left(-\int_0^t \frac{\sigma\,d\sigma}{g(\sigma)}\right) - 1\right] dt$. *При этом* $\mu(x,y,y')\big|_{x\in\gamma_j} = \frac{A_j}{g_j(y')}\exp\left(-p\int_0^y f(s)\,ds - \int_0^{y'} \frac{\sigma\,d\sigma}{g(\sigma)}\right)$, *а условия трансмиссии для уравнения Эйлера (3) будут иметь вид:*

$$\sum_{j|\overline{\gamma}_j \in a} \varkappa_j(a) A_j H_j(y(a)) K_j'(y_j'(a)) = 0, \;\; a \in J,$$

где $\varkappa_j(a) = 1$, *если* γ_j *ориентировано к* a, $\varkappa_j(a) = -1$, *если* γ_j *ориентировано от* a, *и* $y_j'(a) = \left(y\big|_{\overline{\gamma_j}}\right)'(a)$.

Литература

1. Bihari I. Oscillation and monotonity concerning non-linear differential equations of the second order / I. Bihari // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. — 1958. — № 9. — P. 83–104.

2. Bihari I. Note to an extension of a Sturmain comparison theorem / I. Bihari // Stud. Sci. Math. Hung. — 1985. — V. 20, № 1-4. — P. 15–19.

3. Прядиев В.Л. Априорные оценки решения одной нелинейной краевой задачи / В.Л. Прядиев. — Воронеж : Воронеж. ун-т, 1992. — 18 с. — Деп. в ВИНИТИ 05.08.92, № 2577-В92.

4. Покорный Ю.В. Дифференциальные уравнения на геометрических графах. / Ю.В. Покорный, О.М. Пенкин, В.Л. Прядиев, А.В. Боровских, К.П. Лазарев, С.А. Шабров. — М. : ФИЗМАТЛИТ. — 2004. — 272 с.

5. Покорный Ю.В. Об интегрировании в вариационных неравенствах на пространственных сетях / Ю.В. Покорный, И.Ю. Покорная, В.Л. Прядиев, Н.Н. Рябцева // Мат. заметки. — 2007. — Т. 81, № 6. — С. 904-911.

6. Арахов Н.Д. Об уравнении $y''(x) + p(x)f(y(x))g(y'(x)) = 0$, как об уравнении Эйлера в вариационном исчислении / Н.Д. Арахов, В.Л. Прядиев // Воронежская зимняя математическая школа

С. Г. Крейна —- 2024 : матер. междунар. Воронеж. зим. мат. школы, посвящ. памяти В. П. Маслова (Воронеж, 26-30 января 2024 г.). — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2024. — С. 42–43.

СУЩЕСТВОВАНИЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ И ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С ИНДЕФИНИТНЫМ ВЕСОМ

Т.Б. Асадов (Баку, Бакинский Государственный Университет)
tofig-as@mail.ru

Пусть непрерывные функции f, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовлетворяют следующим условиям:

(i) существует положительная постоянная M такая, что $\left|\frac{f(s)}{s}\right| \leqslant M$, $s \in \mathbb{R},\ s \neq 0$;

(ii) существуют положительные постоянные g_0 и g_∞ такие, что $g_\infty < g_0$ и

$$g(s) = g_0 s + g_1(s),\ g(s) = g_\infty s + g_2(s),\ s \in \mathbb{R},$$

где $\lim\limits_{|s|\to 0} \frac{g_1(s)}{s} = g_0$, $\lim\limits_{|s|\to +\infty} \frac{g_2(s)}{s} = g_\infty$;

(iii) $sf(s) \leqslant 0,\ sg_1(s) \leqslant 0,\ sg_2(s) \leqslant 0,\ s \in \mathbb{R}$.

Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^N$, $N > 1$, с гладкой границей $\partial\Omega$. Рассмотрим нелинейную краевую задачу

$$\begin{cases} -\sum\limits_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right) + c(x)u(x) = ra(x)g_0u(x) + \\ \qquad\qquad rf(u(x)) + rg_1(u(x)),\ x \in \Omega, \\ u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

где действительные функции $a_{ij}(x)$ $i, j = 1,\ 2,\ \ldots, N$ лежат в $C^1(\Omega)$, дифференциальный оператор $Lu \equiv -\sum\limits_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)$ равномерно эллиптичен в $\overline{\Omega}$, $c(x)$ – неотрицательная непрерывная функция на $\overline{\Omega}$, $a(x)$ – непрерывная функция на $\overline{\Omega}$, которая меняет знак в Ω, r – действительный ненулевой параметр.

В этой заметке, определим интервал параметра r, в котором существуют положительные и отрицательные решения задачи (1).

© Асадов Т.Б., 2025

Предположим, что $\alpha \in (0,1)$ задано, а p– действительное число такое, что $p > n$ и $\alpha < 1 - n/p$. Пусть E– Банахово пространство $\{u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}) : u = 0 \text{ на } \partial\Omega\}$ с обычной нормой $||\cdot||_{C^{1,\alpha}}$. Для каждого $\sigma \in \{+,-\}$ и каждого $\nu \in \{+,-\}$ определим множество $P_\sigma^\nu = \{u \in E : \nu u > 0$ в Ω, $\nu \frac{\partial u}{\partial n} < 0$ на $\partial\Omega$ и $\sigma \int\limits_\Omega a(x) u^2(x) dx > 0\}$, где $\frac{\partial u}{\partial n}$ – внешняя нормальная производная функции u на $\partial\Omega$. Множества P_+^+, P_+^-, P_-^+ и P_-^- являются открытыми подмножествами в E (см. [1]).

В силу [2, Теорем 2.1 и 2.2] линейная задача на собственные значения

$$\begin{cases} Lu(x) = \lambda a(x) u(x), \ x \in \Omega, \\ u(x) = 0, \ x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

имеет положительное и отрицательное главные собственные значения λ_1^+ и λ_1^-, соответственно, которые являются простыми; соответствущие им собственные функции $u_1^+(x)$ и $u_1^-(x)$ лежат в $P_+ = P_+^+ \cup P_+^-$ и $P_- = P_-^+ \cup P_-^-$, соответственно.

Для каждого $\sigma \in \{+,-\}$ пусть $d_1^\sigma = \frac{\sigma \int\limits_\Omega a(x)(u_1^\sigma(x))^2 dx}{\int\limits_\Omega (u_1^\sigma(x))^2 dx}$.

Теорема 1. *Предположим, что выполняются условия* $g_0 > M d_1^+$, $\frac{g_0}{g_0 - g_\infty} > d_1^+$. *Если выполняется также условие*

$$\frac{\lambda_1^+}{g_0 - M d_1^+} < r < \frac{\lambda_1^+}{g_0 - (g_0 - g_\infty)\, d_1^+},$$

то существуют решения $u_{1,+}^+$ *и* $u_{1,+}^-$ *задачи (1) такие, что* $u_{1,+}^+ \in P_+^+$ *и* $u_{1,+}^- \in P_+^-$, *соответсвенно, если выполняется условие*

$$\frac{\lambda_1^-}{g_0 - M d_1^-} < r < \frac{\lambda_1^+}{g_0 - (g_0 - g_\infty)\, d_1^-},$$

то существуют решения $u_{1,-}^+$ *и* $u_{1,-}^-$ *задачи (1) такие, что* $u_{1,+}^+ \in P_-^+$ *и* $u_{1,+}^- \in P_-^-$, *соответсвенно.*

Литература

1. Z.S. Aliyev. Global bifurcation of positive soluti
ons from zero in nonlinearizable elliptic problems with indefinite weight / Z.S. Aliyev, Sh.M. Hasanova // J. Math. Anal. Appl. — 2020. — V. 491, No. 1. — P. 1-12.

2. Z.S. Aliyev. Global bifurcation of a second order nonlinear elliptic problem with an indefinite weight function / Z.S. Aliyev, Sh.M. Hasanova // Proc. Inst. Math. Mech. Natl. Acad. Sci. Azerb. — 2016. — V. 42, No. 1. — P. 116–125.

КОМБИНАТОРНЫЕ АСПЕКТЫ ТЕОРЕМЫ БЕРНШТЕЙНА—КУШНИРЕНКО

Е.А. Асташов (Москва, МГУ)
ast-ea@yandex.ru

Теорема Бернштейна—Кушниренко (см. [1]) позволяет определить число решений системы алгебраических уравнений общего положения в терминах многогранников Ньютона её уравнений. Применение этой теоремы к системам, число решений которых может быть определено из алгебраических соображений, позволяет достаточно просто получать некоторые комбинаторные тождества, комбинаторные доказательства которых относительно сложны. В докладе будут представлены некоторые результаты такого типа, в частности, связанные с числами Стирлинга второго рода (см. [2]).

Литература

1. Бернштейн Д.Н. Число корней системы уравнений / Д.Н. Бернштейн // Функциональный анализ и его приложения. — 1975. — Т. 9, вып. 3. — С. 1–4.

2. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику / С.В. Яблонский — М. : Наука, 1986. — 384 с.

НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С ПЕРЕМЕННЫМ НИЖНИМ ПРЕДЕЛОМ ИНТЕГРИРОВАНИЯ[1]

С.Н. Асхабов (Грозный, ЧГПУ, ЧГУ; Долгопрудный, МФТИ)
askhabov@yandex.ru

В вещественных пространствах Лебега $L_p(a,b)$, $1 < p < \infty$, рассматриваются три различных класса нелинейных интегральных уравнений дробного порядка с переменным нижним пределом интегрирования:

$$\lambda \cdot F\big(x, u(x)\big) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_x^b \frac{u(t)\,dt}{(t-x)^{1-\alpha}} = f(x), \tag{1}$$

$$u(x) + \lambda \cdot \int\limits_x^b \frac{F\big(t, u(t)\big)\,dt}{(t-x)^{1-\alpha}} = f(x), \tag{2}$$

© Асташов Е.А., 2025

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 22-11-00177).

© Асхабов С.Н., 2025

$$u(x)+\lambda\cdot F\left(x,\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_x^b\frac{u(t)\,dt}{(t-x)^{1-\alpha}}\right)=f(x), \tag{3}$$

где $\lambda>0$, $0<\alpha<1$ и $\Gamma(\alpha)$ есть гамма функция Эйлера.

Предполагается, что функция $F(x,t)$, порождающая нелинейность в указанных уравнениях, определена при $x\in[a,b]$, $t\in\mathbb{R}$ и удовлетворяет условиям Каратеодори: она измерима по x при каждом фиксированном $t\in\mathbb{R}$ и непрерывна по t почти для всех $x\in[a,b]$. В зависимости от рассматриваемого класса уравнений, будем предполагать, что нелинейность $F(x,t)$ для почти всех $x\in[a,b]$ и всех $t\in\mathbb{R}$ удовлетворяет либо условиям:

1) $|F(x,t)|\leqslant c(x)+d_1|t|^{p-1}$, где $c(x)\in L^+_{p'}(a,b)$, $d_1>0$;

2) $F(x,t_1)\leqslant F(x,t_2)$, если $t_1<t_2$;

3) $F(x,t)\cdot t\geqslant d_2|t|^p-D(x)$, где $d_2>0$, $D(x)\in L^+_1(a,b)$,

либо условиям:

4) $|F(x,t)|\leqslant g(x)+d_3|t|^{1/(p-1)}$, где $g(x)\in L^+_p(a,b)$, $d_3>0$;

5) $F(x,t_1)<F(x,t_2)$, если $t_1<t_2$;

6) $F(x,t)\cdot t\geqslant d_4|t|^{p/(p-1)}-D(x)$, где $d_4>0$, $D(x)\in L^+_1(a,b)$,

где $p'=p/(p-1)$ и $L^+_p(0,1)$ означает множество всех неотрицательных функций из $L_p(0,1)$.

Методом монотонных (по Браудеру-Минти) операторов доказываются следующие три теоремы.

Теорема 1. *Пусть $1<p<2$ и $\alpha=2/p-1$. Если нелинейность $F(x,t)$ удовлетворяет условиям 1)–3), то при любом $f\in L_{p'}(a,b)$ уравнение (1) имеет единственное решение в $L_p(a,b)$.*

Теорема 2. *Пусть $2<p<\infty$ и $\alpha=1-2/p$. Если нелинейность $F(x,t)$ удовлетворяет условиям 1) и 2), то при любом $f\in L_p(0,1)$ уравнение (2) имеет единственное решение в $L_p(a,b)$.*

Теорема 3. *Пусть $1<p<2$ и $\alpha=2/p-1$. Если нелинейность $F(x,t)$ удовлетворяет условиям 4)–6), то при любом $f\in L_p(a,b)$ уравнение (3) имеет единственное решение в $L_p(a,b)$.*

Следуя работе [1] при дополнительных ограничениях на нелинейность $F(x,t)$ в теоремах 1–3 можно получить оценки норм соответствующих решений из которых, в частности, следует, что соответствующие однородные уравнения могут иметь лишь тривиальное решение.

Если нелинейность $F(x,t)$ для почти всех $x\in[a,b]$ и всех $t_1,t_2\in\mathbb{R}$ удовлетворяет условиям:

7) $\bigl|F(x,t_1)-F(x,t_2)\bigr|\leqslant M\cdot|t_1-t_2|,\quad$ где $M>0$,

8) $\bigl(F(x,t_1)-F(x,t_2)\bigr)\cdot(t_1-t_2)\geqslant m\cdot(t_1-t_2)^2,\quad$ где $m>0$,

то при любых $\lambda > 0$, $0 < \alpha < 1$ и $f \in L_2(a,b)$ можно доказать, что решения уравнений (1)–(3) возможно найти методом последовательных приближений пикаровского типа в пространстве $L_2(a,b)$ и получить оценки скорости их сходимости, аналогично тому, как это делается в работе [2].

Литература

1. Асхабов С.Н. Нелинейные уравнения типа свертки в пространствах Лебега / С.Н. Асхабов // Матем. заметки — 2015. — Т. 97, № 5. — С. 643–654.

2. Асхабов С.Н. Нелинейные уравнения с интегралами дробного порядка / С.Н. Асхабов // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2007. — V. 9, № 1. — С. 9–14.

О ВНУТРЕННОСТИ ОДНОГО МНОГОЗНАЧНОГО ИНТЕГРАЛА

М.В. Балашов (Москва, ИПУ РАН)
balashov73@mail.ru

Для множества $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ обозначим через $\operatorname{int}\mathcal{U}$ и $\partial\mathcal{U}$ внутренность и границу множества $\mathcal{U}$. Для вещественной матрицы $F(s)$ $n\times n$ с непрерывными компонентами и $t \geqslant 0$ будем понимать интеграл $\int_0^t F(s)\mathcal{U}\,ds$ в смысле Аумана:

$$\int\limits_0^t F(s)\mathcal{U}\,ds = \left\{ \int\limits_0^t F(s)u(s)\,ds \ : \quad u(\cdot) \in L_\infty([0,+\infty),\mathcal{U}) \right\}.$$

Теорема 1. *Пусть $F(s)$, $s \geqslant 0$, — вещественная матрица $n\times n$ с аналитическими компонентами, а $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклое компактное подмножество, $0 \in \partial\mathcal{U}$. Пусть для некоторого $t_0 > 0$ выполнено включение $0 \in \operatorname{int} \int\limits_0^{t_0} F(s)\mathcal{U}\,ds$.*

1. Пусть нормальный конус $\mathcal{N}(\mathcal{U},0)$ является собственным подпространством. Тогда для любых $t \geqslant 0$, $\Delta t > 0$

$$0 \in \operatorname{int} \int\limits_t^{t+\Delta t} F(s)\mathcal{U}\,ds.$$

2. Пусть матрица $F(t)$ невырождена при всех t, а нормальный конус $\mathcal{N}(\mathcal{U},0)$ является лучом: существует единичный вектор $p_0 \in$

© Балашов М.В., 2025

$\mathbb{R}^n$ *такой, что* $\mathcal{N}(\mathcal{U},0) = \{\lambda p_0 \ : \ \lambda \geqslant 0\}$. *Тогда для любых* $t \geqslant 0$, $\Delta t > 0$

$$0 \in \operatorname{int} \int\limits_t^{t+\Delta t} F(s)\mathcal{U}\, ds.$$

Теорему 1 можно применить для анализа множеств достижимости линейной управляемой системы $x'(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$, $u(t) \in L_\infty([0,+\infty),\mathcal{U})$ с аналитическими матрицами $A(t)$ и $B(t)$.

Пусть $\mathcal{U}$ есть евклидов шар $\mathcal{U} = \mathcal{B}_r(a)$ и $0 \in \partial\mathcal{U}$, матрица $F(s)$ в окрестности нуля представима в виде $F(s) = I + sF_1 + s^2F_2 + o(s^2)$, $s \to 0$. Тогда, если единичный вектор $p \in \mathcal{N}(\mathcal{U},0)$ не является собственным вектором матрицы F_1^T, то $\mathcal{B}_{r(t)}(0) \subset \int\limits_0^t F(s)\mathcal{U}\, ds$ и $r(t) \asymp t^3$, $t \to 0$ [1]. Эти результаты позволяют получить новые оценки модуля непрерывности функции оптимального времени в задаче быстродействия (функции Беллмана), в зависимости от начального условия. Некоторые результаты и ссылки можно найти в [2,3]

Ослабить условия теоремы 1 нельзя.

Например, если $\operatorname{int}\mathcal{N}(\mathcal{U},0) \neq \varnothing$, то, выбрав единичный вектор $p \in \operatorname{int}\mathcal{N}(\mathcal{U},0)$, получаем, в случае непрерывности и невырожденности $F(s)$ для всех s, включение $0 \in \partial \int_0^t F(s)\mathcal{U}\, ds$ при малых $t > 0$.

Пусть $\lambda(\cdot) \in C^\infty$ такая функция, что $\lambda(t) = 1$ при $t \in [0,\pi]$, $\lambda(t) = 0$ при $t > 2\pi$, $\lambda(t)$ монотонно убывает при $t \in [\pi, 2\pi]$. Определим $t_0 = 2\pi$.

В $\mathbb{R}^2$ рассмотрим систему $x'(t) = A(t)x(t) + u(t)$, $u(t) \in \mathcal{U}$, с матрицей $A(t) = \lambda(t)A$, где $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $\mathcal{U} = \operatorname{co}\big((-1,0)^T, (1,0)^T\big)$. Множество $\mathcal{N}(\mathcal{U},0) = \{\alpha(0,1)^T \ : \ \alpha \in \mathbb{R}\}$ есть одномерное подпространство. Заметим, что $\Phi(t) = \exp\left\{\int\limits_0^t \lambda(s)\, ds \cdot A\right\}$ — фундаментальная матрица $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$. Матрицы $A(t)$ и $\Phi(t)$ не аналитические и для всех $t > t_0$, $\Delta t > 0$ интеграл $\int\limits_t^{t+\Delta t} \Phi^{-1}(s)\mathcal{U}\, ds$ есть отрезок. При этом $0 \in \operatorname{int} \int\limits_0^t \Phi^{-1}(s)\mathcal{U}\, ds$ для любого $t > 0$.

Литература

1. Балашов М.В. Внутренность интеграла от многозначного отображения и задачи с линейной управляемой // Дифф. ур. — 2023. — Т. 59, № 8. — С. 1098-1109.

2. Ливеровский А.А. Некоторые свойства функции Беллмана для линейных и симметричных полиси- стем // Дифф. ур. — 1980. — Т. 16, № 3. — С. 414–423.

3. Cannarsa P., Sinestrary C. Convexity properties of the minimum time function // Calc. Var. — 1995. — V. 3. — P. 273–298.

О РАЗНОСТНЫХ МЕТОДАХ СИНГУЛЯРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

О.П. Барабаш (Воронеж, ВУНЦ ВВС «ВВА»)
navyS9@yandex.ru

Рассмотрим задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} - x^{-\gamma}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^{\gamma}p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - q(x)u = u(1-u), \qquad (1)$$

$$u(x,0) = u_{(0)}, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0, u(1) = 0, \qquad (3)$$

где $x \in \Omega = (0,1), t \in [0,T], u_{(0)} = u_{(0)}(x)$.

Параметр $\gamma > 0, \gamma \neq 1$.

Построение приближенного решения будет осуществлено двумя методами. Для левой части уравнения разностная схема строится на основе данных, полученных с помощью проекционно-сеточного метода. Для этого в первую очередь выполним аппроксимацию по пространственной переменнной с помощью проекционно-сеточного метода, а затем осуществим приближение по времени t с использованием конечно-разностного метода [1]. Приближенное решение задачи будем искать в виде $u_h = \sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i(t)\varphi_i(x)$, где коэффициенты $a_i(t)$ соответствуют значениям функции в узлах сетки. В качестве базисных функций $\{\varphi_i\}$ выберем финитные функции, являющиеся обобщенными полиномами первой степени на каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$,$[x_i, x_{i+1}]$ [2].

Для аппроксимации нелинейной правой части $u(1-u)$ будем использовать разностную схему с «весами» [3].

Положим $v(x,t) = w(x)\Psi(t)$. Обобщенным решением задачи(1)-(3) назовем функцию $u(x,t)$, которая почти при каждом $t \in (0,T)$

© Барабаш О.П., 2025

принадлежит энергетическому пространству $H_L = H^1_\gamma(\Omega)$ со скалярным произведением

$$[u, v] = \int_0^1 x^\gamma \left(p(x) \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} + q(x)uv \right) dx$$

и почти всюду на $(0, T)$ удовлетворяющую равенствам (4)-(5):

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, w \right)(t) + [u, w](t) = (f, w)(t), \tag{4}$$

$$(u(x, 0), w) = (u_{(0)}, w). \tag{5}$$

при любом выборе $w(x) \in H_L$, $\frac{\partial u}{\partial t} \in L_{2,\gamma}((0, T) \times \Omega)$.

Введем равномерные сетки: на $[0, 1]$ $x_i = ih$, $i = 1, .., n$, на $[0, T]$ $t_j = j\tau, \tau = T/J, j = 0, \ldots, J$. Перепишем уравнения (4)-(5) в матричном виде [4], используя для аппроксимации по времени неявную схему:

$$\widehat{B}a_0 = a(0), \tag{6}$$

$$\widehat{B}\frac{a_j - a_{j-1}}{\tau} + \widehat{A}a_j = F(t_j), j = 1, \ldots, J. \tag{7}$$

Вводя произвольные вещественные параметры $\alpha, \beta, \alpha + \beta = 1$, аппроксимируем $u(1 - u)$:

$$\alpha(1 - y_i^j)y_i^{j-1} + \beta(1 - y_i^{j-1})y_i^j, 0 < i < N, 0 \leqslant j < M. \tag{8}$$

Таким образом на основании (6)-(8) можно записать разностную схему для исходной начально-краевой задачи (1)-(3):

$$y_{i-1}^j[\tau A_{i+1,i} + B_{i+1,i}] + y_i^j \left[\tau(A_{i,i} - \beta + y_i^{j-1}) + B_{i,i} \right] +$$
$$+ y_{i+1}^j[\tau A_{i-1,i} + B_{i-1,i}] = y_{i-1}^{j-1}B_{i+1,i} + y_i^{j-1}[B_{i,i} + \tau\alpha] + y_{i+1}^{j-1}B_{i-1,i},$$

$$y_0^j = u_1^j, y_N^j = u_2^j, y_i^0 = y(x_i, 0) = u_0(x_i).$$

Литература

1. Марчук Г.И. Введение в проекционно-сеточные методы / Г.И. Марчук, В.И. Агошков. — М. : Наука, 1981. — 416 с.

2.Катрахова А.А. Сингулярные краевые задачи и приближенные методы их решения : диссертация на соискание канд. физ.-мат. наук : 01.01.02 / Катрахова А.А. — Воронеж, 1982. — 129 с.

3. Barabash O.P. On a difference scheme for the Growth-Propagation Equation / O.P. Barabash, M.V. Polovinkina, I.P. Polovinkin, M.L. Zhadanova // Lobachevskii journal of mathematics. — 2023. — Vol. 44 № 3. — P. 989–992.

4. Барабаш О.П. Некоторые особенности реализации метода конечных элементов для сингулярного дифференциального уравнения / О.П. Барабаш // Вестник ВГУ. Сер. : Физика. Математика. — 2023. — № 2. — С. 27–35.

ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ ЧАСТНО ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ТИПА ПОТЕНЦИАЛА В ПРОСТРАНСТВЕ СО СМЕШАННОЙ НОРМОЙ

И.В. Барышева
(Липецк, ЛГПУ имени П.П. Семенова-Тян-Шанского)
barysheva_iv@mail.ru

Пусть $\mathbb{R}_n = \mathbb{R}_m \times \mathbb{R}_{n-m}$ — евклидово пространство и $x = (x_\alpha, x_{\overline{\alpha}})$, где $x_\alpha \in \mathbb{R}_m$, $x_{\overline{\alpha}} \in \mathbb{R}_{n-m}$ $(1 \leqslant m \leqslant n)$, а α, $\overline{\alpha}$ — мультииндексы, дополняющие друг друга до полного мультииндекса $(1, 2, \ldots, n)$.

Введём пространство $L_{\mathbf{p}}^{\mathbf{w}(x)}(\mathbb{R}_n)$, где $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$, $p_i > 1$, $\mathbf{w}(x) = (w_1(x_1), \ldots, w_n(x_n))$, $w_i(x_i) > 0$ $(i = \overline{1,n})$, норма в котором определяется равенством

$$\|u\|_{L_{\mathbf{p}}^{\mathbf{w}(x)}(\mathbb{R}_n)} = \left(\int_{\mathbb{R}_1} \left(\int_{\mathbb{R}_1} \cdots \left(\int_{\mathbb{R}_1} |u(x)|^{p_1} w_1(x_1) dx_1 \right)^{\frac{p_2}{p_1}} \cdots \right.\right.$$

$$\left.\left. \ldots w_{n-1}(x_{n-1}) dx_{n-1} \right)^{\frac{p_n}{p_{n-1}}} w_n(x_n) dx_n \right)^{\frac{1}{p_n}}.$$

Если $w_i(x_i) \equiv 1$ $(i = \overline{1,n})$, то получим пространство Лебега со смешанной нормой $L_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}_n)$ [1, с. 9].

Частно-интегральным оператором (ЧИ-оператором) в $\mathbb{R}_n$, отвечающем ядру κ, называется выражение

$$(K_\alpha^{(m)} u)(x) = \int_{\mathbb{R}_m} \kappa(x; t_\alpha) u(x_{\bar{\alpha}}; t_\alpha)\, dt_\alpha,$$

где $x = (x_\alpha, x_{\bar{\alpha}})$ и $1 \leqslant m \leqslant n$. Оператор

$$(K_m^{(\lambda)} u)(x) = \int_{\mathbb{R}_m} \frac{k(x; t_\alpha)}{|x_\alpha - t_\alpha|^\lambda} u(x_{\bar{\alpha}}; t_\alpha)\, dt_\alpha, \quad \lambda < m. \tag{1}$$

© Барышева И.В., 2025

называется ЧИ-оператором типа потенциала. В частном случае при $m = n$ оператор (1) является классическим интегральным оператором типа потенциала (см. [2], гл. VI). Обычно для ЧИ-оператора справедливо правило Калитвина–Ляхова ограниченности действия в пространстве $L_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}_n)$ [3, с. 44], [4].

Теорема. *Пусть p и p' $(p > 1)$— сопряжённые показатели в неравенстве Гёльдера, $\nu>0$ и функции $u(x_{\bar\alpha};t_\alpha)\in L_{(p^2,\,p)}(\mathbb{R}_{n-m},\mathbb{R}_m)$, $k(x;t_\alpha) \in L^{\mathbf{w}(x_\alpha,x_{\bar\alpha},t_\alpha)}_{(p,\,pp',\,pp')}(\mathbb{R}_m,\mathbb{R}_{n-m},\mathbb{R}_m)$. Тогда при $\frac{m}{(p')^2}-\nu < \lambda < \frac{m}{(p')^2}$ для оператора (1) справедлива оценка*

$$\|K_m^{(\lambda)}u\|_{L_{\mathbf{p}}(\mathbb{R}_n)}\leqslant A\|u\|_{L_{(p^2,p)}(\mathbb{R}_m,\mathbb{R}_{n-m})}\|k\|_{L^{\mathbf{w}(x_\alpha,x_{\bar\alpha},t_\alpha)}_{(p,\,pp',\,pp')}(\mathbb{R}_m,\mathbb{R}_{n-m},\mathbb{R}_m)},$$

где $\mathbf{w}(x_\alpha,x_{\bar\alpha},t_\alpha)=(w_1(x_\alpha),w_2(x_{\bar\alpha}),w_3(t_\alpha))$,

$$w_1(x_\alpha)=\begin{cases}(|x_\alpha|^2+1)^{-\frac{\lambda p}{2}}, & \nu(p')^2>m,\\ (|x_\alpha|^2+1)^{-\frac{\lambda p}{2}}(1+\ln(|x_\alpha|^2+1))^{\frac{p}{2(p')^2}}, & \nu(p')^2=m,\\ (|x_\alpha|^2+1)^{-\frac{p(\lambda-\nu+m/(p')^2)}{2(p')^2}}, & \nu(p')^2<m.\end{cases}$$

$$w_2(x_{\bar\alpha})\equiv 1,\quad w_3(t_\alpha)=\left(|t_\alpha|^2+1\right)^{\frac{\nu pp'}{2}}.$$

Литература

1. Бесов О.В. Интегральные представления функций и теоремы вложения / О.В. Бесов, В.П. Ильин, С.М. Никольский. — М. : Наука, 1975. — 480 с.

2. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул / С.Л. Соболев. — М. : Наука, 1974. — 808 с.

3. Калитвин А.С. Линейные операторы с частными интегралами / А.С. Калитвин. — Воронеж: ЦЧКИ, 2000. — 252 с.

4. Lyakhov L.N. About Fredgholm equations for partial integral in $\mathbb{R}_2$ / L.N. Lyakhov, A.I. Inozemtsev, N.I. Trusova // Jornal of Mathematical Sciences. — 2020. — Vol. 251. — № 6. — P. 839–849.

ИССЛЕДОВАНИЕ СОСТОЯНИЙ ОБРАТИМОСТИ НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С НЕОГРАНИЧЕННЫМ ОПЕРАТОРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

А.Г. Баскаков, Г.В. Гаркавенко, Л.Н. Костина, Н.Б. Ускова (Воронеж, ВГУ, ВГТУ)
g.garkavenko@mail.ru, nat-uskova@mail.ru

Пусть $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ — нормальный линейный замкнутый оператор с компактной резольвентой, действующий в комплексном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Предполагается, что $Re\lambda_i(A) = s(A) \leqslant 0$ для всех $\lambda_i \in \sigma(A), i \in \mathbb{J}$, где $\mathbb{J} = \{\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_+, \mathbb{N}\}$. Оператор A является генератором сильно непрерывной полугруппы операторов $\mathbb{T} : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$,где $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ множество всех линейных операторов, ограниченных в $\mathcal{H}$. Пусть $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ - одно из следующих пространств: $L_p = L_p(\mathbb{R}, \mathcal{H})$, $p \in [1, \infty]$, пространство Степанова $S_p = S_p(\mathbb{R}, \mathcal{H})$, $p \in [1, \infty)$, $C_B = C_B(\mathbb{R}, \mathcal{H})$, $C_0 = C_0(\mathbb{R}, \mathcal{H})$. Для $\mathcal{F}$ вводится ассоциированное с ним (см. [1]) пространство последовательностей $\mathcal{F}_d = \mathcal{F}_d(\mathbb{Z}, \mathcal{H})$. Для L_p это l_p, $p \in [1, \infty]$. Для C_B и C_0 ассоциированными являются l_∞ и c_0.

Определим в $\mathcal{F}$ дифференциальный оператор $\mathcal{L} = -d/dt + A : D(\mathcal{L}) \subset \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ следующим образом. Функцию $x \in \mathcal{F}$ отнесем к $D(\mathcal{L})$, если $\exists y \in \mathcal{F}$, такая что для почти всех $s \leqslant t, s, t \in \mathbb{R}$ верно равенство

$$x(t) = \mathcal{T}(t-s)x(s) - \int_s^t \mathcal{T}(t-\tau)y(\tau)d\tau,$$

при этом считается $\mathcal{L}x = y$.

Введем следующие операторы: полугруппу Хоуленда $\mathcal{T}_\mathcal{L} : \mathbb{R}_+ \to End\mathcal{F}$ формулой $(\mathcal{T}_\mathcal{L}(t)x)(s) = \mathcal{T}(t)x(s-t)$, $x \in \mathcal{F}, s \in \mathbb{R}, t \geqslant 0$;

$D_0(x)(s) = x(s) - \mathcal{T}(1)(s-1), x \in \mathcal{F}, s \in \mathbb{R}$;

$D(x)(n) = x(n) - \mathcal{T}(1)(n-1), x \in \mathcal{F}_d, n \in \mathbb{Z}$.

Основные результаты заключаются в совместном исследовании операторов $\mathcal{L}, D_0, D$ с помощью полугрупп $\mathcal{T}$ и $\mathcal{T}_\mathcal{L}$: обратимости этих операторов, т.е. совпадение состояний обратимости (см. определение в [1], [2]), с помощью метода эквивалентных операторов [1], [2], [3]; оценок норм обратных в разных пространствах $\mathcal{F} = \mathcal{L}_p$, $p \in [1, \infty)$, вида обратного оператора, связь между спектрами. В качестве примера приведем несколько результатов.

© Баскаков А.Г., Гаркавенко Г.В., Костина Л.Н., Ускова Н.Б., 2025

Теорема 1. *Следующие утверждения эквивалентны 1) оператор $\mathcal{L} : D(\mathcal{L}) \subset \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ обратим;*

2) полугруппа $\mathcal{T}$ гиперболическая (см. определение в [1]);

3) полугруппа Хоуленда гиперболическая.

Теорема 2. *Пусть $\sigma(\mathcal{T}(1)) \cap \mathbb{T} = \varnothing$, тогда оператор D обратим и $(D^{-1}f)(n) = \sum_{m \leqslant n} (\mathcal{T}(1))^{n-m} f(m)$.*

Теорема 3. *Пусть оператор D обратим. Тогда оператор $\mathcal{L}$ обратим и имеют мести оценки*

$||\mathcal{L}^{-1}|| \leqslant 1 + ||D^{-1}||$, *для пространств L_∞ и C_B;*

$||\mathcal{L}^{-1}|| \leqslant 2^{1-1/p}(1 + ||D^{-1}||)$, *для пространств L_p и S^p, $p \in [1, \infty)$.*

Отметим, что в качестве примера операторов A и $\mathcal{L}$ можно рассматривать интегро-дифференциальный оператор, возникающий в задачах химического катализа [4].

Литература

1. Баскаков А.Г. Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений / А.Г. Баскаков // УМН. — 2013. — Т. 68. №1 (409). —С. 77–128.

2. Баскаков А.Г. Об эквивалентных операторах / А.Г. Баскаков, Г.В. Гаркавенко, Л.Н. Костина, Н.Б. Ускова // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2024. — Т. 235. —С. 3–14.

3. Баскаков А.Г. О состояниях обратимости некоторых классов операторов / А.Г. Баскаков, Г.В. Гаркавенко, Л.Н. Костина, Н.Б. Ускова // Вестник ВГУ. Сер. Физика. Математика. — 2024. — № 2. — С. 27–35.

4. Перов А.И. Собственные значения и собственные функции одного интегро-дифференциального оператора / А.И. Перов, Е.Г. Глушко, И.Г. Тюленев // Диффер. уравн. —1988. — Т. 235, № 3. —С. 516–519.

О СКОРОСТИ УБЫВАНИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ ФУНКЦИИ ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ

А.Н. Бахвалов (Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова)
an-bakh@yandex.ru

Хорошо известно (см., например, [1, гл. II, (4.10)]), что если 2π-периодическая функция f имеет ограниченную вариацию на $[0, 2\pi]$,

© Бахвалов А.Н., 2025

то её коэффициенты Фурье

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int}\, dt$$

при $n \neq 0$ удовлетворяют неравенству

$$|c_n(f)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \frac{V(f;[0,2\pi])}{|n|},$$

и константа $\frac{1}{2\pi}$ в этом неравенстве точная, как показывает пример функции $f(x) = \chi_{(0,\pi)}(x)$.

Двумерный аналог этого результата для интегрируемых функций из класса $BV_V([0,2\pi]^2)$ функций ограниченной вариации по Витали, с точной константой $\frac{1}{4\pi^2}$, получен в работе [2]. Для функций ограниченной обобщенной вариации рядом авторов найдены оценки порядка убывания, но не точные константы.

В работе [3] рассмотрен аналогичный вопрос для преобразования Фурье.

Для интегрируемой на прямой функции, вариация $V(f;\mathbb{R})$ которой на прямой конечна, показано, что её преобразование Фурье

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi}\, dx,$$

удовлетворяет неравенству

$$|\hat{f}(\xi)| \leqslant \frac{V(f;\mathbb{R})}{|\xi|}, \quad \xi \neq 0. \tag{1}$$

Для интегрируемой на плоскости функции, вариация по Витали $V_V(f;\mathbb{R}^2)$ которой конечна, показано, что её преобразование Фурье

$$\hat{f}(\xi,\eta) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^2} f(x,y) e^{-ix\xi} e^{-iy\eta}\, dx\, dy$$

для любых $\xi, \eta \neq 0$ удовлетворяет оценке

$$|\hat{f}(\xi,\eta)| \leqslant \frac{V_V(f;\mathbb{R}^2)}{|\xi\eta|}. \tag{2}$$

В [3] поставлены вопросы о точности константы 1 в оценках (1) и (2). Нами получены следующие окончательные ответы на них.

Теорема 1. *Пусть $f \in BV(\mathbb{R}) \cap L(\mathbb{R})$, тогда выполняется оценка*

$$|\hat{f}(\xi)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{V(f;\mathbb{R})}{|\xi|}, \quad \xi \neq 0,$$

причем константа $\frac{1}{2\pi}$ не улучшаема.

Теорема 2. *Пусть $f \in BV_V(\mathbb{R}^2) \cap L(\mathbb{R}^2)$, тогда для любых $\xi, \eta \neq 0$ выполняется оценка*

$$|\hat{f}(\xi,\eta)| \leqslant \frac{1}{4\pi^2} \cdot \frac{V_V(f;\mathbb{R}^2)}{|\xi\eta|},$$

причем константа $\frac{1}{4\pi^2}$ не улучшаема.

Литература

1. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т.1 / А. Зигмунд — М. : Мир, 1965. — 615 с.)

2. Fülöp V. Order of magnitude of multiple Fourier coefficients of functions of bounded variation / V. Fülöp, F. Móricz // Acta Math. Hungar. — 2004. — V.104, № 1–2. — P. 95–104.

3. Ghodadra B.L. On the order of magnitude of Fourier transform / B.L. Ghodadra, V. Fülöp // MIA — 2015. — V.18, №3. — P. 845–858.

ДУАЛИЗМ В ТЕОРИИ СОЛИТОННЫХ РЕШЕНИЙ В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ[1]

Л.А. Бекларян

(Центральный Экономико-Математический Институт РАН)

lbeklaryan@outlook.com

Совокупность конструкций $\big(\Upsilon, d, s, \eta, G_\Gamma | Q, g\big)$ называется *солитонным букетом* и однозначно определяется набором $\Gamma = (\Upsilon, d, s, \eta, Q, g)$, где:

(1) Υ-конечно порожденная группа без кручения с образующими $\{\check{\gamma}_1, \ldots, \check{\gamma}_d\}$ и выделенными элементами $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_s\}$, а также соответствующее пространство $\mathcal{K}^n_\Upsilon = \overline{\prod}_{\gamma\in\Gamma} R^n_\gamma$, $R^n_\gamma = \mathbb{R}^n$ бесконечных последовательностей $\varkappa = \{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$, $x_\gamma \in \mathbb{R}^n$, $x_\gamma = (x^1_\gamma, \ldots, x^n_\gamma)'$ со стандартной топологией полного прямого произведения;

[1] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда) (проект № 23-11-00080).

© Бекларян Л.А., 2025

(2) $\mathbb{T}_\Upsilon = \{T_\gamma : \gamma \in \Upsilon\}$-конечно порожденная группа сдвигов, действующая в пространстве $\mathcal{K}^n_\Upsilon$ по следующему правилу

$$T_{\bar\gamma}\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Upsilon} = \{x_{\gamma\bar\gamma}\}_{\gamma\in\Upsilon}, \quad \bar\gamma \in \Upsilon, \quad \{x_\gamma\}_{\gamma\in\Upsilon} \in \mathcal{K}^n_\Upsilon, \quad T_{\bar\gamma} \in \mathbb{T}_\Upsilon;$$

(3) $\eta : \Upsilon \to Q$-эпиморфизм, где Q группа диффеоморфизмов прямой, сохраняющих ориентацию, и, соответственно, Q конечно порожденная группа с образующими $\check{q}_j = \eta(\check{\gamma}_j)$, $j = 1, \ldots, d$ и выделенными элементами $q_j = \eta(\gamma_j)$, $j = 1, \ldots, s$;

(4) $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{ns} \to \mathbb{R}^n$- функция, измеримая по $t \in \mathbb{R}$ при каждом $x_1, \ldots, x_s \in \mathbb{R}$ и при почти каждом $t \in \mathbb{R}$ непрерывная по $x_1, \ldots, x_s \in \mathbb{R}^n$ (условия Каратеодори);

(5) оператор

$$G_\Gamma : \mathbb{R} \times \mathcal{K}^n_\Upsilon \to \mathcal{K}^n_\Upsilon, \quad \Gamma = (\Upsilon, d, s, \eta, Q, g)$$

такой, что координата $\big(G_\Gamma(t, \varkappa)\big)_e$ бесконечномерной вектор-функции $G_\Gamma(t, \varkappa)$, соответствующая единичному элементу e группы Υ, зависит только лишь от конечного числа координат и равна

$$\big(G_\Gamma(t, \varkappa)\big)_e = g\big(t, x_{\gamma_1}, \ldots, x_{\gamma_s}\big);$$

(6) при почти каждом $t \in \mathbb{R}$ выполняются “почти перестановочные” соотношения

$$T_{\bar\gamma} G_\Gamma(t, \varkappa) = \frac{d}{dt}\eta(\bar\gamma)(t) \cdot G_\Gamma(\eta(\bar\gamma)(t), T_{\bar\gamma}\varkappa), \quad \forall \varkappa \in \mathcal{K}^n_\Upsilon, \quad \forall \bar\gamma \in \Upsilon.$$

Почти перестановочное соотношение, связанное с оператором сдвига по пространству характеризует свойство *однородности среды.*

Для солитонного букета $\big(\Upsilon, d, s, \eta, G_\Gamma | Q, g\big)$ с $\Gamma = (\Upsilon, d, s, \eta, Q, g)$ в фазовом пространстве $\mathcal{K}^n_\Upsilon$ с фазовой переменной $\varkappa \in \mathcal{K}^n_\Upsilon$ определим систему

$$\dot\varkappa(t) = G_\Gamma(t, \varkappa), \quad \text{для п.в. } t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

$$\varkappa(\eta(\bar\gamma)(t)) = T_{\bar\gamma}\varkappa(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall \bar\gamma \in \Upsilon \tag{2}$$

где производная в бесконечномерном ОДУ (1) понимается как *производная по Гато*, а нелокальные ограничения (2) означают, что для решений системы *сдвиг по пространству равен сдвигу по времени.*

Решения такой системы называются *решениями типа бегущей волны (солитонные решения)*, а группа Q называется *характеристикой бегущей волны*.

В паре с системой (1)-(2) рассматривается функционально-дифференциальное уравнение

$$\dot{x}(t) = g(t, x(q_1(t), \ldots, q_s(t)), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Каждый солитонный букет $\big(\Upsilon, d, s, \eta, G_\Gamma | Q, g\big)$ с $\Gamma = (\Upsilon, d, s, \eta, Q, g)$ определяет дуальную пару $\big(G_\Gamma | Q, g\big)$ *функция-оператор*. Для каждого солитонного букета (дуальной пары) существует *канонический солитонный букет (каноническая дуальная пара)* вида $\big(Q, d, s, \mathcal{I}, G_\Gamma | Q, g\big)$ с $\Gamma = (Q, d, s, \mathcal{I}, Q, g)$ $(\big(G_\Gamma | Q, g\big))$, где $\mathcal{I}$ тождественный автоморфизм группы Q. Для заданных Q, g канонический букет выделяется наиболее простой структурой набора $\Gamma = (Q, d, s, \mathcal{I}, Q, g)$ и, соответственно, оператора G_Γ.

Представленное исследование демонстрирует фрагмент некоторого общего подхода. В рамках такого подхода разработан формализм [1 - 2], центральным элементом которого является существование взаимно однозначного соответствия между солитонными решениями $\varkappa(t) = \{x_\gamma(t)\}_{\gamma \in \Upsilon}$, $t \in \mathbb{R}$ бесконечномерной динамической системы (1-2) и решениями $x(t)$, $t \in \mathbb{R}$ функционально-дифференциального уравнения точечного типа (3). Такие решения связаны следующим образом

$$x_\gamma(t) = x_e(\eta(\gamma)(t)), \quad x_e(t) = x(t), \qquad \forall t, \gamma, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \gamma \in \Upsilon \tag{4}$$

и образуют дуальную пару вектор-функций $(\varkappa(.)|x(.))$. Соответствие (4) может быть уточнено для подпространства солитонных решений $\varkappa(.)$ с заданной асимптотикой как по пространству, так и по времени, а также установлена асимптотика по времени для решений $x(.)$ функционально-дифференциального уравнения из соответствующей дуальной пары $(\varkappa(.)|x(.))$. В рамках такого формализма удается установить теоремы существования и единственности как солитонных решений (решений системы (1-2)), так и для функционально-дифференциального уравнения точечного типа (3).

В теории пластической деформации изучается бесконечномерная динамическая система

$$m\ddot{y}_i = y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} + \varphi(y_i), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad y_i \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

где потенциал $\varphi(\cdot)$, в частности, задается гладкой периодической функцией. Уравнение (4) является системой с потенциалом Френкеля-Конторовой [4]. Независимость массы m от индекса i пространственной координаты характеризует свойство однородности среды. Такая система является конечно разностным аналогом нелинейного волнового уравнения, моделирует поведение счетного числа шаров массы m, помещенных в целочисленных точках числовой прямой, где каждая пара соседних шаров соединена между собой упругой пружиной, и описывает распространение продольных волн в бесконечном однородном абсолютно упругом стержне. Наиболее важный класс волн описывается решениями типа бегущих волн (солитонные решения). Для представленного конечно разностного аналога волнового уравнения с нелинейным потенциалом общего вида (4) ключевым является также и наличие ряда дополнительных симметрий. Для такой системы установлено существование семейства ограниченных солитонных решений [5-6].

В неоднородных средах условие (6) (условие «почти перестановочности» для группы операторов сдвига по пространству) отсутствует. В таких системах пространство солитонные решений либо тривиальное, либо пустое. Вместе с тем, удается получить как «правильное расширение> класса солитонных решений до класса «квазисолитонных решений» , для которых также установлена теорема существования решения, так и «правильное расширение» соответствия (4).

Литература

1. Бекларян Л.А. Введение в теорию функционально-дифференциональных уравнений. Групповой подход. М: Факториал Пресс. (2007). с.286

2. Бекларян Л.А. Дуализм в теории солитонных решений / Л.А.Бекларян, А.Л.Бекларян // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2024. Т. 64. No. 7. С. 1472–1490.

3. Бекларян Л.А. Дуализм в теории солитонных решений. II// Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2024, Т.64, No. 11, С. 2073–2096.

4. Френкель Я.И. О теории пластической деформации и двойственности / Я.И. Френкель, Т.А. Конторова // ЖЭТФ. — 1938. — Т. 8. — С. 89–97.

5. Бекларян Л.А. Вопрос существования ограниченных солитонных решений в задаче о продольных колебаниях упругого бесконечного стержня в поле с сильно нелинейным потенциалом /

Л.А. Бекларян, А.Л. Бекларян // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2021. — Т. 61, № 12. — С. 2024–2039.

6. Бекларян Л.А. Вопрос существования ограниченных солитонных решений в задаче о продольных колебаниях упругого бесконечного стержня в поле с нелинейным потенциалом общего вида / Л.А. Бекларян, А.Л. Бекларян // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2022. — Т. 62, № 6. — С. 933–950.

КОМПОЗИЦИЯ ОПЕРАТОРА ЭРДЕЙИ-КОБЕРА ДРОБНОГО ПОРЯДКА И ЛЕВОСТОРОННЕГО ДРОБНОГО ИНТЕГРАЛА БЕССЕЛЯ НА ПОЛУОСИ[1]

А.Н. Бойназаров (Фергана, ФерГУ)

ahror010185@gmail.com

Пусть $\alpha > 0$, $\gamma > 0$. Левосторонний дробный интеграл Бесселя на полуоси[2]] $B^{-\alpha}_{\gamma,0+}$ для $f \in L[0,)$ определяется формулой

$$(B^{-\alpha}_{\gamma,0+}f)(x) = (IB^{\alpha}_{\gamma,0+}f)(x) =$$

$$= \frac{1}{(2\alpha)} \int\limits_0^x \left(\frac{x^2-y^2}{2x}\right)^{2\alpha-1} {}_2F_1\left(\alpha + \frac{\gamma-1}{2}, \alpha; 2\alpha; 1-\frac{y^2}{x^2}\right) f(y)dy \quad (1)$$

В работах A. Erdelyi и H. Kober [3] вводится следующая модификация дробного интегрирования

$$I_{\eta,\alpha}\varphi\left(x\right) = \frac{2x^{-2(\eta+\alpha)}}{\Gamma\left(\alpha\right)} \int\limits_0^x \left(x^2-t^2\right)^{\alpha-1} t^{2\eta+1}\varphi(t)dt, \qquad (2)$$

где $\Gamma(\alpha)$ - гамма функция.

Рассмотрим композицию оператора Эрдейи-Кобера (2) и левостороннего дробного интеграла Бесселя на полуоси (1)

$$(I_{\eta,\beta}x^{\sigma}B^{-\alpha}_{\gamma,0+}f)(x) = \frac{2x^{-2(\eta+\beta)}}{\Gamma(\beta)} \int\limits_0^x (s)^{2\eta+1}\left(x^2-s^2\right)^{\beta-1} \times$$

$$\times \left\{ \frac{s^{\sigma}}{\Gamma(2\alpha)} \int\limits_0^s \left(\frac{y}{s}\right)^{\gamma} \left(\frac{s^2-y^2}{2s}\right)^{2\alpha-1} \times \right.$$

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 10-01-00000).

© Бойназаров А.Н., 2025

$$\times\ {}_2F_1\left(\alpha+\frac{\gamma-1}{2},\alpha;2\alpha;1-\frac{y^2}{s^2}\right)f(y)dy\right\}ds$$

Получим,

$$(I_{\eta,\beta}x^{\sigma}B^{\alpha}_{\gamma,0+}f)(x)=\frac{2^{1-2\alpha}x^{\sigma-\gamma-2\alpha+1}}{\Gamma(2\alpha+\beta)}\int\limits_0^x y^{\gamma-2\beta}f(y)\big(x^2-y^2\big)^{2\alpha-1+\beta}\times$$

$$\times F_3\left(\alpha+\frac{\gamma-1}{2},\frac{\sigma-\gamma+1}{2}+\alpha+\beta+\eta,\alpha,\beta,2\alpha+\beta;X,\frac{X}{X-1}\right)dy \tag{4}$$

Теперь рассмотрим композицию левостороннего дробного интеграла Бесселя на полуоси с оператором Эрдейи-Кобера

$$(B^{-\alpha}_{\gamma,0+}I_{\eta,\beta}f)(x)=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(2\alpha)}\int\limits_0^x\left(\frac{y}{x}\right)^{\gamma}\left(\frac{x^2-y^2}{2x}\right)^{2\alpha-1}{}_2F_1\left(\alpha+\frac{\gamma-1}{2},\alpha;2\alpha;1-\frac{y^2}{x^2}\right)\times$$

$$\times\left\{\frac{2y^{-2(\eta+\beta)}}{\Gamma(\beta)}\int\limits_0^y(s)^{2\eta+1}\big(y^2-s^2\big)^{\beta-1}f(s)ds\right\}dy$$

Получим

$$(B^{-\alpha}_{\gamma,0+}I_{\eta,\beta}f)(x)=\frac{2^{1-2\alpha}x^{1-2\alpha-\gamma}}{(2\alpha+\beta)}\int\limits_0^x(s)^{\gamma-2\beta}\big(x^2-s^2\big)^{2\alpha-1+\beta}\times$$

$$\times F_3\left(\alpha+\frac{\gamma-1}{2},\eta+\beta-\frac{\gamma-1}{2},\alpha,\beta,2\alpha+\beta;X,\frac{X}{X-1}\right)f(s)ds \tag{5}$$

Теорема 1. *Если в формулах (4) и (5) положить $\sigma=-2\alpha$, то получим*

$$(I_{\eta,\beta}x^{-2\alpha}B^{-\alpha}_{\gamma,0+}f)(x)=x^{-2\alpha}(B^{-\alpha}_{\gamma,0+}I_{\eta,\beta}f)(x).$$

Литература

1. Самко С. Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев,. — Мн. : Наука и техника, 1987. — 688 с.

2. Shishkina E. L. On fractional powers of Bessel operators / E.L. Shishkina, S.M. Sitnik // Journal of Inequalities and Special Functions. — 2017. — Т. 8, № 1. — P. 49–67.

3. Erdelyi A. Some remarks on Hankel transforms / A. Erdelyi, H. Kober // Quart. J. Math. — 1940. — Т. 2, № 43. — P. 212–221.

ОБ ЭКВИДИСТАНТАХ ЭЛЛИПСА

А.А. Бортников, К.И. Гладких, В.А. Торшина, Л.В. Стенюхин (Воронеж, ВГУ)
stenyuhin@mail.ru

Семейство эквидистант (параллельных кривых), проходящих от кривой $\overline{r}(t) = (x(t), y(t))$ в плоскости на расстоянии λ, задается соотношениями

$$\begin{cases} X = x + \dfrac{\lambda y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}, \\ \\ Y = y - \dfrac{\lambda x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}. \end{cases}$$

Установлено, что для некоторых кривых, в частности для эллипса $x(t) = a\cos t$, $y(t) = \ b\sin t$, эквидистанта данной кривой, проходящая через некоторые точки плоскости на заданном расстоянии от заданной кривой не единственна. То есть при некоторых значениях параметра расстояния λ существуют бифуркации эквидистант некоторых кривых.

Семейство параллельных эллипсу кривых с параметром λ задается соотношениями

$$\begin{cases} X = a\cos t + \dfrac{\lambda b\cos t}{\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}}, \\ \\ Y = b\sin t + \dfrac{\lambda a\sin t}{\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}}. \end{cases}$$

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Вектор скорости кривой, параллельной эллипсу, равен нулю при встрече эквидистанты эллипса с его эволютой для*

© Бортников А.А., Гладких К.И., Торшина В.А., Стенюхин Л.В., 2025

нулевого значения параметра $t = 0$. *При этом имеется оценка скорости* $\overline{R}'(0) = \begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{a}{b}\lambda + b \end{pmatrix}$, $a > b$. *Для* $\lambda > -\frac{b^2}{a}$, $y'(0) > 0$ *и для* $\lambda < -\frac{b^2}{a}$, $y'(0) < 0$.

Теорема 2. *Пусть выполнены следующие условия:*
1) $\max\{a; b\} > \sqrt{2} \cdot \min\{a; b\}$;

2) $\left[\begin{array}{ll} t = \arcsin\left(\pm\dfrac{b^2}{b^2 - a^2}\right), & a > b > 0, \\ & \\ t = \arccos\left(\pm\dfrac{a^2}{a^2 - b^2}\right), & b > a > 0; \end{array}\right.$

3) $\lambda = -\dfrac{\max\{a^2; b^2\}}{\sqrt{|a^2 - b^2|}}$.

Тогда точки (t, λ) *являются точками бифуркации эквидистант эллипса и эти точки лежат на самом эллипсе с полуосями* a *и* b.

Множество эквидистантных кривых $\overline{R}(\overline{r}, \lambda)$ данной кривой $\overline{r}(t)$ с параметром расстояния λ можно задать векторным уравнением

$$\overline{R}(\overline{r}, \lambda) = \overline{r} + \frac{1}{|\overline{r}'|} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix} \cdot \overline{r}',$$

$\overline{R} : X \times \mathbb{R} \to Y$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Здесь X, Y — пространства вектор-функций, $\overline{r} \in C^p$, $p \geqslant 2$.

Теорема 3. *Для эллипса* $\overline{r}(t) = (a\cos t, b\sin t)$ *при* $\lambda \neq 1 - \dfrac{b^2}{a}$ *и* $\lambda < -\dfrac{b^2}{a}$, *точка* (t, λ) *является точкой бифуркации эквидистант эллипса.*

Литература

1. Ниренберг Л. Лекции по нелинейному функциональному анализу / Л. Ниренберг. — М. : Мир, 1977. — 232 с.

О НАИМЕНЬШЕМ ТИПЕ ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА С ЗАДАННОЙ (ПОД)ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬЮ НУЛЕЙ

Г.Г. Брайчев (Москва, РУДН)
braichev@mail.ru

Рассмотрим класс $E[\rho,\infty)$, состоящий из всех целых функций f, имеющих при порядке $\rho>0$ конечный тип $\sigma_\rho(f)$, определяемый равенством

$$\sigma_\rho(f)=\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\ln\max\limits_{\theta\in[0,2\pi]}|f(re^{i\theta})|}{r^\rho}.$$

Последовательность нулей функции f, записанную с учетом их кратностей, обозначаем $\Lambda_f=\{\lambda_n\}$. Теперь определим величины

$$T(\Lambda,\rho)=\inf\left\{\sigma_\rho(f):f\in E[\rho,\infty),\,\Lambda_f=\Lambda\right\},$$

$$T^*(\Lambda,\rho)=\inf\left\{\sigma_\rho(f):f\in E[\rho,\infty),\,\Lambda_f\supset\Lambda\right\}.$$

Близкие понятия вводились в работе Б. Н. Хабибуллина [1].

При $\rho\in(0,1)$ в ситуациях, когда все нули функций расположены на одном или нескольких лучах, а также в нескольких правильно расположенных углах, точные значения экстремальных величин $T(\Lambda,\rho)$, выраженные через различные плотности последовательности Λ, найдены в работах А. Ю. Попова [2], В. Б. Шерстюкова [3], Г. Г. Брайчева [4]. Величины $T^*(\Lambda,\rho)$, важные для приложений, вычисляются реже, причем при дополнительных предположениях регулярности роста функций (см., например, [4], [5]).

Напомним некоторые определения и приведем новые результаты. Индикатор целой функции f при порядке ρ дается формулой

$$h_\rho(\theta,f)=\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\ln|f(re^{i\theta})|}{r^\rho}.$$

Функция f имеет вполне регулярный рост на луче $\arg z=\theta$, если в этой формуле существует предел, когда $r\to+\infty$, $r\notin C_0$. Для всех $\theta\in[0,2\pi]$ выполняется неравенство $h_\rho(\theta,f)\leqslant\sigma_\rho(f)$. Лучи, на которых достигается равенство $h_\rho(\theta,f)=\sigma_\rho(f)$, назовем лучами экстремального роста функции.

© Брайчев Г.Г., 2025

Теорема 1. *Пусть целая функция* $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{n!} z^n$ *имеет при порядке* $\rho \in \mathbb{N}$ *тип* $\sigma_\rho(f) = \sigma > 0$ *и* $\Lambda_f = \Lambda$. *Тогда верна формула*

$$T(\Lambda, \rho) = \frac{1}{\rho} \inf_{|a| \leqslant \sigma} \left\{ \varlimsup_{n\to\infty} \left| \sum_{k=0,\, k|\rho}^{n} C_n^k \, f_{n-k} \, a^k \right|^{\rho/n} \right\}.$$

Теорема 2. *Пусть* $\rho > 0$, $f \in E[\rho, \infty)$ *и* $\Lambda_f = \Lambda$. Равенства

$$T^*(\Lambda, \rho) = T(\Lambda, \rho) = \sigma_\rho(f)$$

справедливы при выполнении любого из следующих условий:

1) $\rho \in (0,\, 1/2]$ и f имеет вполне регулярный рост на одном луче экстремального роста;

2) $\rho > 1/2$ и f имеет вполне регулярный рост на двух лучах экстремального роста, образующих угол раствора π/ρ;

3) $\rho > 1/2$ и f имеет вполне регулярный рост на трех лучах экстремального роста $\arg z = \theta_1, \theta_2, \theta_3$ таких, что $\theta_1 < \theta_2 < \theta_3$ и $\theta_2 - \theta_1 < \pi/\rho$, $\theta_3 - \theta_2 < \pi/\rho$, $\theta_3 - \theta_1 > \pi/\rho$.

Литература

1. Хабибуллин Б.Н. Последовательность нулей голоморфных функций, представление мероморфных функций. II. Целые функции /
Б.Н. Хабибуллин // Матем. сб. — 2009. — Т. 200, № 2. — С. 129–158.

2. Попов А.Ю. Наименьший возможный тип при порядке $\rho < 1$ канонических произведений с положительными нулями заданной верхней ρ-плотности /А.Ю. Попов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. — 2005. — № 1. — С. 31–36.

3. Брайчев Г.Г. О наименьшем возможном типе целых функций порядка $\rho \in (0, 1)$ с положительными нулями / Г.Г. Брайчев, В.Б. Шерстюков // Изв. РАН. Сер. матем. — 2011. — Т. 75, № 1. — С. 3–28.

4. Брайчев Г.Г. Задача Сильвестра, покрытия сдвигами и теоремы единственности для целых функций / Г.Г. Брайчев, Б.Н. Хабибуллин, В.Б. Шерстюков // Уфимск. матем. журн. — 2023. — Т. 15, № 4. — С. 30–41.

5. Braichev G.G. Uniqueness theorem for entire functions of exponential type / G.G. Braichev, V.B. Sherstyukov // Lobachevskii J. Math. — 2024. — Vol. 45. — P. 2672–2677.

$\mathbb{J}$-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ БЕССЕЛЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДИРАКА—КИПРИЯНОВА[1]

Ю.Н. Булатов (Елец, ЕГУ им. И.А. Бунина)
y.bulatov@bk.ru

Пусть $\mathbb{R}_n=\{x=(x_1,\ldots,x_n)\}$, $\mathbb{R}_n^+=\{x: \ x_i>0\}$, $\overline{\mathbb{R}_n^+}=\{x: \ x_i\geqslant 0\}$, $i=\overline{1,n}$. Следующий сингулярный дифференциальный оператор

$$\Delta_{B_{-\gamma}}=\sum_{i=1}^{n}B_{-\gamma_i}, \ B_{-\gamma_i}=\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}-\frac{\gamma_i}{x_i}\,\frac{\partial}{\partial x_i}, \ \gamma=(\gamma_1,\ldots,\gamma_n), \ 0<\gamma_i<1,$$

следуя [1], будем называть Δ_B*-оператором Киприянова.* При этом число $-|\gamma|=-\gamma_1\ldots-\gamma_n$ (возможно целое, но всегда отрицательное) названо в [2] *коэффициентом скрытой сферической симметрии.*

Весовая билинейная форма в $\mathbb{R}_n^+$, отвечающая параметру $-\gamma$ задана следующим выражением:

$$(u,v)_{-\gamma}=\int\limits_{\mathbb{R}_n^+}u(x)\ v(x)\ x^{-\gamma}dx\,, \quad x^{-\gamma}dx=\prod_{i=1}^{n}x_i^{-\gamma_i}dx_i\,, \quad 0<\gamma_i<1. \quad (1)$$

Определение (1) порождает весовое функциональное пространство

$$L_2^{-\gamma}=L_2^{-\gamma}(\mathbb{R}_n^+)=\left\{u:\ \|u\|_{L_2^{-\gamma}}=\sqrt{(u,u)_{-\gamma}}<\infty\right\},$$

которое, вообще говоря, определено для всех $-\gamma_i>-1$.

В качестве основного пространства функций рассматриваем подпространство Шварца $S_{ev}=S_{ev}(\mathbb{R}_n^+)$, состоящее из функций быстро убывающих вместе со всеми производными, четных по Киприянову [3, с.21] по каждой координате своего аргумента. Пространство регулярных обобщенных функций строится на основе весовой билинейной формы (1) в $L_2^{-\gamma}(\mathbb{R}_n^+)$ и обозначается $S'_{ev,-\gamma}$.

Пусть $-\gamma=(-\gamma_1,\ldots,-\gamma_n)$, $-1<-\gamma_i<0$ и $\mu_i=(\gamma_i+1)/2$. Линейно независимые решения сингулярных дифференциальных уравнений Бесселя $B_{-\gamma_i}\,u_{1,2}+u_{1,2}=0$, имеют следующий вид [4]:

$$u_1=\mathbb{J}_{\mu_i}(x_i)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\Gamma(1+\mu_i)}{m!\,\Gamma(m+1+\mu_i)}\frac{x_i^{2(m+\mu_i)}}{2^{2m}}=\Gamma(1+\mu_i)\,2^{\mu_i}\,x_i^{\mu_i}\ J_{\mu_i}(x_i),$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 24-21-00387).
© Булатов Ю.Н., 2025

$$u_2=\mathbb{J}_{-\mu_i}(x_i)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\Gamma\,(1-\mu_i)}{m!\Gamma\,(m+1-\mu_i)}\left(\frac{x_i}{2}\right)^{2m}=\Gamma(1-\mu_i)2^{-\mu_i}{x_i}^{\mu_i}J_{-\mu_i}(x_i),$$

где $J_{\pm\mu_i}$ — функции Бесселя первого рода. Отметим, что ранее собственные функции u_1 и u_2 использовались в работах [5, 6] для решения спектральных задач с оператором $B_{-\gamma}$.

Оператор $\mathbb{T}$-псевдосдвига определен формулой (см. [4]):

$$\mathbb{T}_x^y f(x,t)=\int\limits_0^\pi\ldots\int\limits_0^\pi f\left(x\overset{\alpha}{\to}y\,,t\right)\prod_{i=1}^{n}\frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_i+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma_i+2}{2}\right)}\frac{(x_i\,y_i\sin\alpha_i)^{\gamma_i+1}}{(x_i\overset{\alpha_i}{\to}y_i\,)^{\gamma_i+1}}d\alpha_i,$$

где «сдвинутый» аргумент функции f имеет следующий вид

$$(x\overset{\alpha}{\to}y\,)=(\ldots,x_i\overset{\alpha}{\to}y_i,\ldots)=(\ldots,\sqrt{x_i^2+y_i^2-2x_i\,y_i\cos\alpha_i},\ldots).$$

Оператор $\mathbb{T}$-псевдосдвига не принадлежит классу *левитановских обобщенных сдвигов* (см. [7]). Отметим основные свойства:

$$\mathbb{T}^y\Delta_{B_{-\gamma,\,x}}u(x)=\Delta_{B_{-\gamma,\,x}}\mathbb{T}^y u(x)=\Delta_{B_{-\gamma,\,y}}\mathbb{T}^y u(x),$$

$$(\mathbb{T}_x^y u\,,\,v)_{-\gamma}=(u\,,\,\mathbb{T}_x^y v)_{-\gamma},\quad \mathbb{T}_x^y\mathbb{J}_\mu(x\xi)=\mathbb{J}_\mu(x\xi)\mathbb{J}_\mu(y\xi).$$

Пусть $x,\ \xi\in\mathbb{R}_n^+,\ -\gamma_i\in(-1,0)$ и $f\in L_2^{-\gamma}(\mathbb{R}_n^+)$. Взаимно обратные прямое и обратное $\mathbb{J}$-преобразованиями Бесселя функции f введены в [4] и представлены следующими выражениями:

$$\mathbb{F}\,[f]\,(x)=\widehat{f}(\xi)=\int\limits_{\mathbb{R}_n^+}f(x)\,\prod_{i=1}^{n}\mathbb{J}_{\mu_i}(x_i\xi_i)\,x_i^{-\gamma_i}\;dx\;,$$

$$\mathbb{F}^{-1}[\widehat{f}](\xi)=f(x)=\int\limits_{\mathbb{R}_n^+}\widehat{f}(\xi)\,\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2^{\mu_i}\,\Gamma(\mu_i+1)}\right)^2\mathbb{J}_{\mu_i}(\xi_i x_i)\,\xi_i^{-\gamma_i}\;d\xi_i\,.$$

Хорошо известно, что сингулярный функционал, называемый δ-функцией Дирака, примененный к радиальной функции $\varphi=\varphi(|x|)$, принимает форму весового сингулярного распределения (1) с целочисленным весом $\gamma=n-1$:

$$(\delta\,,\,\varphi)=(\delta_{B_\gamma},\,\varphi(r))_\gamma=|S_1(n)|\varphi(0),\ r=|x|,\ \gamma=n-1,$$

где $|S_1(n)|$ — площадь единичной сферы с центром в начале координат в евклидовом пространстве точек $\mathbb{R}_n$.

И.А. Киприянов ввел понятие *весовой δ-функции* (см. [3, с.12]) равенством $(\delta_\gamma,\varphi)_\gamma{=}\varphi(0)$, регулярные представители которых определены функционалом $(\cdot\,,\,\cdot)_\gamma$ на основе весовой билинейной формы (1) с $\gamma{=}(\gamma_1,\dots,\gamma_n)$, где уже $\gamma_i{>}0$ и не обязательно целое число, а площадь взвешенной сферы определяется равенством (см. [3])

$$|S_1(n)|_\gamma = 2\frac{\prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)} = \int\limits_{S_1(n)} \prod_{i=1}^n |x_i|^{\gamma_i} dS\ .$$

Нетрудно проверить, что эта же формула площади взвешенной сферы справедлива для всех значений $\gamma_i > -1$, $i{=}\overline{1,n}$.

Пусть $x{\in}\mathbb{R}_1^+$ и $\gamma{=}2\mu{-}1$. Положим $\delta_k{=}|x|^{2\mu}\delta_{-\gamma}$. Тогда

$$(\delta_k,\varphi)_{-\gamma} = (x^{2\mu}\delta_{-\gamma},\varphi)_{-\gamma} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^\varepsilon \delta_{-\gamma,\varepsilon}(x)\varphi(x)\ xdx,$$

где $\delta_{-\gamma,\varepsilon}$ — соответствующая δ-образная последовательность. Обобщением этого равенства служит следующее определение.

Определение 1. *Пусть* $xdx = \prod\limits_{i=1}^n x_i\,dx_i$. *Сингулярное распределение, принадлежащего пространству распределений* $S'_{ev,-\gamma}$, *определенное равенством*

$$(\delta_k\ ,\ \varphi)_{-\gamma} = \lim_{\varepsilon\to 0}\ \int\limits_{\{x:\ 0\leqslant|x|<\varepsilon\}} \delta_{-\gamma,\varepsilon}(x)\ \varphi(x)\ xdx = \varphi(0), \quad \forall\varphi(|x|)\in C_{ev}[0,\varepsilon),$$

будем называть δ_k*-распределением Дирака—Киприянова в* $S'_{ev,-\gamma}$.

Применением определения распределения Дирака—Киприянова получено следующее утверждение, которое служит расширением (но не обобщением) известной формулы «преобразования Фурье—Бесселя весовой δ-Функции».

Теорема 1. *В смысле распределений* $S'_{ev,-\gamma}$ *имеет место равенство*

$$\mathbb{F}\left[\,\delta_{-\gamma}\,\mathbb{T}_x^{x_0}\mathbb{J}_\mu\,\right](\xi) = \mathbb{J}_\mu(x_0\xi).$$

Доказательство этого утверждения получено переходом от действия $\mathbb{T}$-псевдосдвига к действию $\overset{*}{\mathbb{T}}$-сдвига:

$$\overset{*}{\mathbb{T}}{}_x^y\ f(x,t){=}x^{-2\mu}\mathbb{T}_x^y f(x,t).$$

Следствие 1. В смысле распределений $S'_{ev,-\gamma}$ имеет место равенство

$$\mathbb{F}\,[\delta_{-\gamma}] = \widehat{\delta_{-\gamma}} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \delta_{-\gamma}(x){=}\mathbb{F}_x^{-1}\,[\,1\,] = \prod_{i=1}^{n}\left(2^{\mu_i}\,\Gamma(\mu_i{+}1)\right)^2\ \mathbb{F}[1].$$

Автор благодарен профессору Л.Н. Ляхову за постановку решаемой в работе задачи и своевременные консультации.

Литература

1. Ляхов Л. Н. Оператор Киприянова–Бельтрами с отрицательной размерностью операторов Бесселя и сингулярная задача Дирихле для B-гармонического уравнения / Л.Н. Ляхов, Е.Л. Санина // Диффер. уравн. — 2020. — Т. 56, № 12. —С. 1610–1620.

2. Ляхов, Л. Н. Дифференциальные и интегральные операции в скрытой сферической симметрии и размерность кривой Коха / Л.Н. Ляхов, Е.Л. Санина // Мат. заметки. – 2023. – Т. 113, № 4. – С. 517–528.

3. Киприянов И.А. Сингулярные эллиптические краевые задачи / И.А. Киприянов. — М. : Наука, 1997. — 200 с.

4. Ляхов Л. Н. Псевдосдвиг и фундаментальное решение Δ_B-оператора Киприянова / Л.Н. Ляхов, Ю.Н. Булатов, С.А. Рощупкин, Е.Л. Санина // Диффер. уравн. — 2022. — Т. 58, № 12. —С. 1654–1665.

5. Сабитов К. Б. Начальная задача для B-гиперболического уравнения с интегральным условием второго рода / К.Б. Сабитов, Н.В. Зайцева // Диффер. уравн. — 2018. — Т. 54, № 1. —С. 123.

6. Сабитов К. Б. Вторая начально-граничная задача для B-гиперболического уравнения / К.Б. Сабитов, Н.В. Зайцева // Известия высших учебных заведений. Математика. — 2019. — № 10. — С. 75–86.

7. Левитан Б. М. Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье / Б.М. Левитан // Успехи мат. наук. — 1951. — Т. 6, № 2(42). —С. 102–143.

СЕТИ РИСКА И ПЕРЕСТРАХОВАНИЕ

Е.В. Булинская (Москва, МГУ)
ebulinsk@yandex.ru

Как известно, перестрахование — это страхование страховщиков. Иными словами, страховая компания (непосредственный страховщик) может передать часть принятого риска другой компании (перестраховщику), внося определенную плату (премию перестрахования).

В первых работах по перестрахованию (см., например, [1 - 2]), учитывались интересы только одной стороны (страховщика или перестраховщика). Однако уже в работе [3] было предложено, как можно принять во внимание запросы обеих сторон.

Отметим, что при оценке качества функционирования системы использовались различные целевые функции. С начала 20-го века, когда была создана теория коллективного риска, особую популярность приобрела вероятность разорения страховых компаний, которая широко используется исследователями и в наши дни. Рассматривались вероятности разорения за конечное или бесконечное время. Также было введено понятие парижской вероятности разорения, т.е. разрешалось капиталу компании провести фиксированное (или случайное время с заданным распределением) в отрицательной области до наступления разорения.

Поскольку далеко не для всех моделей можно найти в явном виде упомянутые вероятности, стали активно развиваться численные методы. Для практической деятельности полезно получение не только оценок вероятности разорения сверху (типа неравенства Лундберга), но и оценок снизу.

Другим важным показателем качества функционирования страховой компании служит функция Гербера-Шиу, оценивающая ожидаемый размер дисконтированных дивидендов, выплаченных до момента разорения, и другие параметры капитала (см. [4]).

В последнее десятилетие пришло понимание, что необходимо изучать так называемые сети риска, т.е. учитывать многомерность систем страховых компаний. Она может быть обусловлена наличием различных видов страхования, существованием у компании филиалов, а также использованием перестрахования (см. [5]).

Указанные направления исследований будут проиллюстрированы результатами, доказанными автором в последнее время. Инте-

© Булинская Е.В., 2025

ресно также отметить, что для получения численных результатов полезно рассмотрение моделей с дискретным временем (см. [6]).

Литература

1. Borch K. Equilibrium in reinsurance market. / K. Borch // Econometrica. — 1962. — V. 30, № 3, P. 424–444.

2. Centeno M.L. Measuring the Effect of Reinsurance by the Adjustment Coefficient. / M.L. Centeno // Insurance: Mathematics and Economics. — 1986. — V. 5, P. 169–182.

3. Kaishev V.K. Excess of Loss Reinsurance under Joint Survival Optimality. / V.K. Kaishev and D.S. Dimitrova // Insurance: Mathematics and Economics. — 2006. — V. 39, № 3, P. 376–389.

4. Gerber H.U. On the time value of ruin. / H.U. Gerber and E.S.W. Shiu // North American Actuarial Journal. — 1998. — V. 2, № 1, P. 48–72.

5. Florin A. On Central Branch/Reinsurance Risk Networks: Exact Results and Heuristics. / A. Florin and Sooie-Hoe Loke // Risks. — 2018. — V. 6, № 2, 35, 18 p.

6. Булинская Е.В. Модели страхования с дискретным временем. / Е.В. Булинская // Вестн. Моск. Ун-та. Сер. 1: Математика, Механика — 2023. — № 6, — С. 42–52.

СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ НА ВРЕМЕННЫХ ГРАФАХ[1]

С.А. Бутерин (Саратов, СГУ)

buterinsa@sgu.ru

Дифференциальные операторы на геометрических графах активно изучаются с прошлого века в связи с моделированием различных процессов, протекающих в сложных системах, представимых в виде *пространственных* сетей [1].

В докладе речь идет о *временны́х* графах [2—4], когда переменная, параметризующая ребра, отождествляется со временем. При этом в каждой внутренней вершине процесс разветвляется на несколько параллельных процессов по числу исходящих ребер. Как и в пространственных сетях, здесь также могут возникать условия типа Кирхгофа. Им будет удовлетворять траектория течения процесса, являющаяся оптимальной с учетом сразу всех перспектив.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 24-71-10003).

© Бутерин С.А., 2025

В [2, 3] при помощи идеи глобального запаздывания [5] задача Красовского [6, 7] об успокоении управляемой системы с последействием была перенесена на графы, что привело к концепции временнóго графа. При этом в [2] рассматривалась более общая нестационарная управляемая система, заданная уравнениями произвольного порядка нейтрального типа с негладкими коэффициентами, что, в свою очередь, потребовало введения специальных нелокальных квазипроизводных. Также было проведено их сравнение в локальном случае с квазипроизводными, применяемыми для регуляризации сингулярных дифференциальных выражений с коэффициентами из пространств обобщенных функций [8—10].

Обсуждаются две интерпретации систем управления на временны́х графах. В рамках стохастической интерпретации [3, 4] из различных сценариев, возникающих в каждой внутренней вершине реализуется только один. При этом в энергетический функционал добавляются веса, равные вероятностям всех сценариев. В частности, замена параметров уравнения, описывающего систему управления на интервале, дискретными случайными процессами с дискретным временем приведет к системе управления на временнóм дереве.

Альтернативная интерпретация подразумевает достоверную реализуемость процессов, соответствующих всем ребрам, и приводит, вообще говоря, к произвольному графу с циклами. Подобная ситуация возникает, например, если для некоторого набора изначально независимых систем управления потребовать совпадение их траекторий в определенные моменты либо промежутки времени. Последнее означает, что на некоторых ребрах будет разворачиваться несколько локальных процессов, а управляющее воздействие должно совместить их траектории. В общей постановке глобальная оптимальная траектория на всем графе будет удовлетворять общим самосопряженным условиям склейки в его вершинах.

Литература

1. Покорный Ю.В. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю.В. Покорный, О.М. Пенкин, В.Л. Прядиев, А.В. Боровских, К.П. Лазарев, С.А. Шабров. — М. : Физматлит, 2005. — 272 с.

2. Бутерин С.А. Об успокоении системы управления произвольного порядка с глобальным последействием на дереве / С.А. Бутерин // Матем. заметки. — 2024. — Т. 115, № 6. — С. 825–848.

3. Buterin S. On damping a control system with global aftereffect on quantum graphs: Stochastic interpretation / S.A. Buterin // Math. Meth. Appl. Sci. — 2024. — P. 1–22. — DOI:10.1002/mma.10549.

4. Бутерин С.А. Об управляемой системе на бесконечном временно́м дереве / С.А. Бутерин // Матем. заметки. — 2025. — Т. 117, № 3. (https://doi.org/10.48550/arXiv.2410.12044)

5. Buterin S. Functional-differential operators on geometrical graphs with global delay and inverse spectral problems / S. Buterin. // Results Math. — 2023. — V. 78, Article № 79.

6. Красовский Н.Н. Теория управления движением / Н.Н. Красовский. — М. : Наука, 1968. — 476 с.

7. Skubachevskii A.L. Elliptic Functional Differential Equations and Applications / A.L. Skubachevskii. — Basel : Birkhäuser, 1997. — 294 p.

8. Савчук А.М. Операторы Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами / А.М. Савчук, А.А. Шкаликов // Матем. заметки. — 1999. — Т. 66, № 6. — С. 897–912.

9. Мирзоев К.А. Дифференциальные операторы четного порядка с коэффициентами-распределениями / К.А. Мирзоев, А.А. Шкаликов // Матем. заметки. — 2016. — Т. 99, № 5. — С. 788–793.

10. Bondarenko N.P. Linear differential operators with distribution coefficients of various singularity orders / N.P. Bondarenko // Math. Meth. Appl. Sci. — 2022. — V. 46, № 6. — P. 6639–6659.

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

А.В. Васильев, В.Б. Васильев,
А.Б. Каманда Бонгай (Белгород, НИУ «БелГУ»)
vbv57@inbox.ru

В работе [1] был описан новый подход к исследованию разрешимости эллиптических псевдодифференциальных уравнений в областях с негладкой границей. Рассматривались многомерные уравнения, фредгольмова разрешимость которых с помощью локального принципа сводилась к исследования однозначной разрешимости модельных уравнений (краевых задач) в канонических областях. Такие области представляют собой конусы в многомерном пространстве, и некоторые случаи однозначной разрешимости таких уравнений и краевых задач в пространствах Соболева—Слободецкого также описаны в [1].

© Васильев А.В., Васильев В.Б., Каманда Бонгай А.Б., 2025

Одна из таких модельных задач связана с задачей дифракции электромагнитной волны на плоском экране. Она представляет собой трехмерный аналог задачи Зоммерфельда [4], который получил интегральную формулу для решения этой задачи на плоскости с вырезанным лучом.

Пусть $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^3 : x = (x_1, x_2, x_3), x_3 = 0, x_1 > 0, x_2.0\}$ — плоский экран в трехмерном пространстве. Математически задача сформулирована следующим образом: найти функцию . удовлетворяющую уравнению Гельмгольца вне Γ

$$(\Delta u)(x) - k^2 u(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma, \quad k \in \mathbb{C}, \tag{1}$$

удовлетворяющее на Γ граничному условию Дирихле

$$u|_{x_3=0} = f(x'), \quad x' = (x_1, x_2) \in \Gamma, \tag{2}$$

или Неймана

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)\bigg|_{x_3=0} = g(x'), \quad x' = (x_1, x_2) \in \Gamma. \tag{3}$$

В работах [1,4] для некоторых значений k получены аналитические формулы , однако они не доведены до численных результатов. С этой целью в работах [2,5] был рассмотрен плоский аналог задачи (1),(2) и дискретный аналог уравнения (1) в более общем случае псевдодифференциальных уравнений. Дискретизация и построение дискретных функциональных пространств реализовывались с использованием разделенных разностей [3] и дискретного преобразования Фурье.

Первые численные эксперименты методом сеток [3] были проведены в плоском случае для $k = 0$ (задача (1),(2)). Для функций $e^{-x_2^2}$, $\frac{1}{x_2^2}$ были получены численные решения с шагом $h = 0,1$.

Литература

1. Васильев В.Б. Мультипликаторы интегралов Фурье, псевдодифференциальные уравнения, волновая факторизация, краевые задачи / В.Б. Васильев. — М.: КомКнига, 2010. — 135 с.

2. Агаркова Н.Н. О задаче Дирихле в плоской области с разрезом /Н.Н. Агаркова, В.Б. Васильев, Х.Ф. Гебресласи // ПМ&Ф. — 2023. — Т. 55, № 3. — С. 258–264.

3. Самарчкий А.А. Теория разностных схем / А.А. Самарский. — М.: Наука, 1977. — 656 с.

4. Speck F.-O. From Sommerfeld diffraction problems to operator factorisation / F.-O. Speck // Constr. Math. Anal. —2019. —V. 2, No. 4. —P. 183–216).

5. Afanas'eva E.B. Discrete equations, discrete transformations and discrete boundary value problems / E.B. Afanas'eva, V.B. Vasil'ec, A.B. kamanda Bongay // Duffer. Equ. — 2023. — V. 59, No. 12. — P. 1698–1707

ПОПЕРЕЧНИКИ ПО КОЛМОГОРОВУ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ АНИЗОТРОПНЫХ КОНЕЧНОМЕРНЫХ ШАРОВ В l_q^N ПРИ $q \leqslant 2$

А.А. Васильева (Москва, МГУ)
vasilyeva_nastya@inbox.ru

Через $d_n(M,\, X)$ будем обозначать колмогоровский n-поперечник множества M в пространстве X.

Пусть $k_1,\, \dots,\, k_d \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant p_1,\, \dots,\, p_d \leqslant \infty$, $\overline{k} = (k_1,\, \dots,\, k_d)$, $\overline{p} = (p_1,\, \dots,\, p_d)$. Через $l_{\overline{p}}^{\overline{k}}$ обозначим пространство $\mathbb{R}^{k_1\dots k_d} = \{(x_{j_1,\dots,j_d})_{1\leqslant j_s\leqslant k_s,\, 1\leqslant s\leqslant d} : \ x_{j_1,\dots,j_d} \in \mathbb{R}\}$ с нормой, задаваемой индукцией по d: при $d=1$ это

$$\|(x_{j_1})_{1\leqslant j_1\leqslant k_1}\|_{l_{p_1}^{k_1}} = \begin{cases} \Bigl(\sum\limits_{j_1=1}^{k_1} |x_{j_1}|^{p_1}\Bigr)^{1/p_1}, & p_1 < \infty, \\ \max_{1\leqslant j_1\leqslant k_1} |x_{j_1}|, & p_1 = \infty, \end{cases}$$

при $d \geqslant 2$

$$\|(x_{j_1,\dots,j_d})_{1\leqslant j_s\leqslant k_s,\, 1\leqslant s\leqslant d}\|_{l_{\overline{p}}^{\overline{k}}} = \\ = \Bigl\| \Bigl(\|(x_{j_1,\dots,\, j_{d-1},\, j_d})_{1\leqslant j_s\leqslant k_s,\, 1\leqslant s\leqslant d-1}\|_{l^{(k_1,\dots,\, k_{d-1})}_{(p_1,\dots,\, p_{d-1})}} \Bigr)_{j_d=1}^{k_d} \Bigr\|_{l_{p_d}^{k_d}}.$$

Для $\overline{k} = (k_1,\, \dots,\, k_d)$ далее будем обозначать $k = k_1\dots k_d$.

Пусть A — непустое множество, для каждого $\alpha \in A$ заданы число $\nu_\alpha > 0$ и вектор $\overline{p}_\alpha = (p_{\alpha,1},\, \dots,\, p_{\alpha,d})$, где $1 \leqslant p_{\alpha,j} \leqslant \infty$, $1 \leqslant j \leqslant d$. Пусть $\overline{k} \in \mathbb{N}^d$. Положим

$$M = \cap_{\alpha\in A} \nu_\alpha B_{\overline{p}_\alpha}^{\overline{k}}. \tag{1}$$

© Васильева А.А., 2025

Для $a \in \mathbb{R}$ обозначим $a_+ = \max\{a, 0\}$. Для $\overline{p} = (p_1, \ldots, p_d)$, $1 \leqslant q \leqslant 2$, $\overline{k} = (k_1, \ldots, k_d)$ положим

$$\Phi(\overline{p}, \overline{k}, q) = \prod_{j=1}^{d} k_j^{(1/q-1/p_j)_+}. \tag{2}$$

Из результатов работы [1] следует, что

$$d_n(B_{\overline{p}}^{\overline{k}}, l_q^k) \underset{q}{\asymp} \Phi(\overline{p}, \overline{k}, q), \quad 1 \leqslant q \leqslant 2,\, n \leqslant k/2.$$

Для $\overline{p} = (p_1, \ldots, p_d)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ будем обозначать через $\frac{\lambda}{\overline{p}}$ вектор с координатами $\left(\frac{\lambda}{p_1}, \ldots, \frac{\lambda}{p_d}\right)$.

Пусть $I = \{i_1, \ldots, i_l\} \subset \{1, \ldots, d\}$ — непустое подмножество, $i_1 < \cdots < i_l$. Для $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ положим $x_I = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_l}) \in \mathbb{R}^l$.

Определение 1. *Пусть $1 \leqslant m \leqslant d+1$, $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in A^m$. Скажем, что $\overline{\alpha} \in \mathcal{N}_m$, если существуют множество $I \subset \{1, \ldots, d\}$ и числа $\lambda_j = \lambda_j(\overline{\alpha}, I) > 0$, $j = 1, \ldots, m$, такие, что $\sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j = 1$, $\#I = m-1$, $\sum\limits_{j=1}^{m} \frac{\lambda_j}{p_{\alpha_j,i}} = \frac{1}{q}$, $i \in I$, при этом система векторов $(1/\overline{p}_{\alpha_j})_I$, $j = 1, \ldots, m$, является аффинно независимой. В этом случае определяем вектор $\overline{\theta}(\overline{\alpha}, I) = (\theta_1(\overline{\alpha}, I), \ldots, \theta_d(\overline{\alpha}, I))$ равенством $\frac{1}{\overline{\theta}(\overline{\alpha}, I)} = \sum\limits_{j=1}^{m} \frac{\lambda_j}{\overline{p}_{\alpha_j}}$.*

Теорема 1. *Пусть $d \in \mathbb{N}$, $\overline{k} = (k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{N}^d$, $k = k_1 \ldots k_d$, $1 \leqslant q \leqslant 2$, $n \leqslant \frac{k}{2}$. Пусть A — непустое множество, $\nu_\alpha > 0$, $\overline{p}_\alpha = (p_{\alpha,1}, \ldots, p_{\alpha,d}) \in [1, \infty]^d$, $\alpha \in A$. Множество M определим формулой (1), функцию Φ — формулой (2), множества $\mathcal{N}_m$ $(1 \leqslant m \leqslant d+1)$, множества I, числа $\lambda_j(\overline{\alpha}, I)$ и вектор $\overline{\theta}(\overline{\alpha}, I)$ — в соответствии с определением 1. Тогда*

$$d_n(M, l_q^k) \underset{q,d}{\asymp} \min_{1 \leqslant m \leqslant d+1} \inf_{\overline{\alpha} \in \mathcal{N}_m,\, I} \nu_{\alpha_1}^{\lambda_1(\overline{\alpha}, I)} \ldots \nu_{\alpha_m}^{\lambda_m(\overline{\alpha}, I)} \Phi(\overline{\theta}(\overline{\alpha}, I), \overline{k}, q)$$

Литература

1. Малыхин Ю.В., Рютин К.С. Поперечники и жесткость безусловных множеств и случайных векторов / Ю.В. Малыхин, К.С. Рютин // Изв. РАН. Сер. матем. — 2025. — Т. 89, № 2. (в печати).

ИЕРАРХИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ДИСКРЕТНЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ ПЕРКОЛЯЦИИ

Ю.П. Вирченко, Д.А. Черкашин (Белгород, БГТУ)
virch@bsuedu.ru

Разрабатывается метод аппроксимации вероятности перколяции на бесконечных графах [1]. Он основан на конструировании последовательности «аппроксимирующих» бесконечных графов специального типа, называемых иерархическими. Вычисление вероятности перколяции сводится к анализу подходящего марковского ветвящегося процесса с дискретным временем [2].

Рассматривается задача теории перколяции на бесконечном графе $\mathbb{Z}^2$, называемом квадратной решеткой (см. [1]). Этот периодический граф при погружении а $\mathbb{R}^2$ определяется бинарным отношением смежности φ так, что $x\varphi y$, если $y = x \pm \mathbf{e}_j$, $j \in \{1, 2\}$. Разрабатывается метод построения аппроксимаций для вероятности $P(c)$ перколяции на бесконечность из заданной вершины, то есть существования бесконечного несамопересекающегося пути γ по вершинам графа, в которых случайное бернуллиевское поле $\rho(x)$, $x \in \mathbb{Z}^2$ принимает значение 1 и $c = \Pr\{\rho(x) = 1\}$.

Метод основан на построении последовательности $\langle \Gamma_m ; m \in \mathbb{N} \rangle$ бесконечных графов специального типа, которые названы *иерархическими*. Они получаются вырезанием из $\mathbb{Z}^2$ квадрата с размером $2m + 1$ и процедурой последовательного подклеивания к его внешним граничным вершинам таких же квадратов, совмещая нулевую вершину каждого из них с граничной вершиной квадрата, к которой производится подклеивание. Решение задачи теории перколяции — вычисление вероятности перколяции $P_m(c)$ на иерархическом графе Γ_m из его центральной вершины сводится к решению алгебраического уравнения

$$Q_m(c) = \sum_{A \subset \Gamma_m} Q_m^{|A|}(c) c^{|A|} (1 - c)^{n-|A|} \tag{1}$$

для вероятности $Q_m(c) = 1 - P_m(c)$. Это уравнение имеет единственное решение, отличное от единицы при $c > c_*$, где c_* — т.н. порог перколяции, который является решением уравнения

$$1 = \sum_{A \subset \Gamma_m} |A| c^{|A|-1} (1 - c)^{n-|A|} \,. \tag{2}$$

© Вирченко Ю.П., Черкашин Д.А., 2025

Доказано, что выполняется аппроксимационное неравенство $P_m(c) \leqslant P(c)$. При этом имеет место предельное соотношение

$$\lim_{m\to\infty} P_m(c) = P(c)\,,$$

что позволяет решать приближенно задачу перколяции на квадратной решетке. При $m = 0$ уравнением для $Q_0(c)$ принимает вид $Q_0(c) = 1 - c + cQ_0^4(c)$. Соответствующее значение порога $c_* = 0.25$. Получено и проанализировано уравнение вида (1) для следующего приближения с $m = 1$, когда $\deg Q_1(c) = 12$. Положив $Q_1(c) = q$, это уравнение имеет вид

$$q = 1-c+c(1-c)^4+4c^2(1-c)^5q+2c^3(1-c)^5[3-2c]q^2+$$
$$+4c^3(1-c)^4[2+c(1-c)]q^3+c^4(1-c)^4[20-7c]q^4+4c^4(1-c)^3[1+4c(1-c)]q^5$$
$$+8c^5(1-c)^3[3-c]q^6+24c^6(1-c)^3q^7+2c^6(1-c)^2[6-c]q^8+16c^7(1-c)^2q^9+$$
$$+2c^7(1-c^2)q^{10}+4c^8(1-c)q^{11}+c^9q^{12}\,. \tag{3}$$

Соответственно, уравнение (2) для определения порога перколяции, которое получается дифференцирование по q уравнения

$$1 = 4c^2(1-c)^5 + 4c^3(1-c)^5[3-2c] + 12c^3(1-c)^4[2+c(1-c)]+$$
$$+4c^4(1-c)^4[20-7c] + 20c^4(1-c)^3[1+4c(1-c)] + 48c^5(1-c)^3[3-c]+$$
$$+168c^6(1-c)^3 + 16c^6(1-c)^2[6-c] + 144c^7(1-c)^2 + 20c^7(1-c^2)+$$
$$+44c^8(1-c) + 12c^9\,. \tag{4}$$

В этом приближении, в результате решения уравнения (4), для порога получается значение (с недостатком) $c_* = 0.343$.

Достоинством предложенной схемы аппроксимации вероятности перколяции является то, что она, наряду со сходимостью аппроксимаций к истинному значению этой величины, дает для нее гарантированные верхние оценки.

Литература

1. Hammersley J.M. Percolation processes: lower bounds for the critical probability / J.M. Hammersley // Ann. Math. Statistics. — 1957. — V. 28, 3. — P. 790–795.

2. Вирченко Ю.П. Иерархические модели дискретной теории перколяции и марковские ветвящиеся процессы / Ю.П. Вирченко, Д.А. Черкашин // Итоги науки и техн. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. — 2024. — Т. 235. — С. 15—33.

К ТЕОРИИ ИНВАРИАНТНЫХ ФУНКЦИЙ

В.А. Герасименко, В.В. Конев, О.В. Кунаковская (Воронеж)
gerasimenko0206@gmail.com, victor.konev@mail.ru, newovk@yandex.ru

Пусть $U = \mathbb{C}\times\mathbb{C}\times\ldots\times\mathbb{C}$ — декартово произведение r экземпляров поля комплексных чисел $\mathbb{C}$, $m_i \in \mathbb{N}$, $m_i \geqslant 2$ для $i = 1,\ \ldots,\ r$. Группа $G = \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \mathbb{Z}_{m_2} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{m_r}$ действует на U следующим образом:

$$\Phi : G \times U \to U,$$

$$\Phi((\zeta_{m_1}^{j_1}, \zeta_{m_2}^{j_2}, \ldots, \zeta_{m_r}^{j_r}), (z_1, \ldots, z_r)) = (\zeta_{m_1}^{j_1} z_1, \zeta_{m_2}^{j_2} z_2, \ldots, \zeta_{m_r}^{j_r} z_r),$$

где ζ_{m_i} — примитивный корень из единицы степени m_i и $j_i \in \mathbb{Z}$ для $i = 1,\ \ldots,\ r$. Как известно, функция $f : U \to \mathbb{C}$ является по определению G-инвариантной, если $f(gz) = f(z)\ \forall(g \in G)\ \forall(z \in U)$.

Теорема 1. *Пусть* $G = \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \mathbb{Z}_{m_2} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{m_r}$. *Многочлен*

$$f(z) = \sum a_{l_1 l_2 \ldots l_r} z_1^{l_1} z_2^{l_2} \ldots z_r^{l_r} \in \mathbb{C}[z_1,\ \ldots,\ z_r]$$

является G-инвариантной функцией, если и только если для каждого из его мономов $a_{l_1 l_2 \ldots l_r} z_1^{l_1} z_2^{l_2} \ldots z_r^{l_r}$ каждый показатель l_j делится на m_j.

Пусть

$$\mathfrak{K} = \underbrace{\mathbb{Z} \oplus\ \ldots\ \oplus \mathbb{Z}}_{\text{r штук}}.$$

Тогда алгебра многочленов $\mathbb{C}[z_1,\ \ldots,\ z_r]$ — $\mathfrak{K}$-градуированная $\mathbb{C}$-алгебра и отображение

$$\psi :\ \mathfrak{K} \to G :\ (p_1,\ \ldots,\ p_r)\ \mapsto\ ([p_1]_{m_1},\ \ldots,\ [p_r]_{m_r})$$

является гомоморфизмом групп. Здесь $[p_i]_{m_i} \in \mathbb{Z}_{m_i}$ — это класс вычетов по модулю m_i числа $p_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1,\ \ldots,\ r$.

Следствие. *Многочлен*

$$f(z) = \sum a_{l_1 l_2 \ldots l_r} z_1^{l_1} z_2^{l_2} \ldots z_r^{l_r} \in \mathbb{C}[z_1,\ \ldots,\ z_r]$$

является G-инвариантной функцией, если и только если каждый из его мономов $a_{l_1 l_2 \ldots l_r} z_1^{l_1} z_2^{l_2} \ldots z_r^{l_r}$ имеет степень (в смысле градуировки), принадлежащую $\operatorname{Ker}\,\psi$.

© Герасименко В.А., Конев В.В., Кунаковская О.В., 2025

Литература

1. Винберг Э.Б. Симметрия многочленов./ Э.Б.Винберг // М.: МЦНМО, —2001 — 24с.

2. Винберг Э.Б. Алгебра многочленов./ Э.Б.Винберг // М.: Просвещение, 1980. — 174с.

3. Кунаковская О.В. Элементы эквивариантной топологии / О.В.Кунаковская.// Воронеж: Научная книга, —2019. — 24 с.

4. Kostant B. Graded manifolds, graded Lie theory and prequantisation / B. Kostant // Lecture Notes in Mathematics. — 1977. — No 570.

5. Герасименко В.А., Кунаковская О.В. Многообразия струй отображений // Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения – XXXV. Материалы международной Воронежской весенней математической школы (26-30 апреля 2024 г.). – Воронеж: Изд. дом ВГУ —2024. — С. 86-89.

6. Герасименко В.А. Многообразия струй инвариантных функций. Диплом магистратуры (математический факультет ВГУ) / В.А. Герасименко // — 2024. — 65с.

7. Конев В.В. О коммутативных градуированных алгебрах / В.В. Конев // Летняя школа-конференция по алгебраической геометрии и комплексному анализу для молодых ученых России (Ярославль, ЯГПУ, 20-25 мая 2013). Ярославль, 2013. — С. — 44-46.

8. Конев В.В. Некоторые замечания к определению коммутативной градуированной алгебры / В.В. Конев // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. — 2014. — № 4. — С. 139-149.

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАГРУЖЕННОСТИ СЕТИ WI-FI С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

В.Е. Глушаков (Воронеж, ВУНЦ ВВС «ВВА имени профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина»)

vitalikgl@gmail.com

Для обеспечения надежного и качественного обслуживания в информационных системах критически важно осуществлять мониторинг и управление загруженностью сети. Это особенно актуально в контексте сетей мягкого или жесткого реального времени, где временные задержки могут иметь решающее значение. Расширение областей применения беспроводных сетей приводит к необходимости

© Глушаков В.Е., 2025

исследования возможностей их мониторинга и управления. При построении гибридных сетей, как правило, «узким» местом являются беспроводные сегменты, в которых затруднена оценка загруженности из-за стохастических процессов в сети.

В данной работе рассматривается математическая модель, которая учитывает режимы передачи данных в сети Wi-Fi, представленные на рис.1.

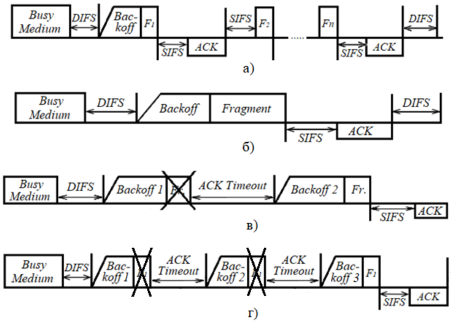


Рис 1.

Для этой модели строится граф состояний системы массового обслуживания при передаче пакетов в беспроводном сегменте сети (рис. 2).

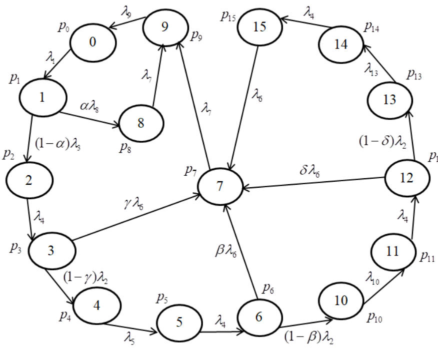


Рис 2.

Для модифицированного графа строится и решается система уравнений Колмогорова

$$\begin{cases} dp_0/dt = -\lambda_1 p_0 \\ dp_1/dt = \lambda_1 p_0 - \alpha\lambda_8 p_1 - (1-\alpha)\lambda_3 p_1 \\ dp_2/dt = (1-\alpha)\lambda_3 p_1 - \lambda_4 p_2 \\ dp_3/dt = \lambda_4 p_2 - \gamma\lambda_6 p_3 - (1-\gamma)\lambda_2 p_3 \\ dp_4/dt = (1-\gamma)\lambda_2 p_3 - \lambda_5 p_4 \\ dp_5/dt = \lambda_5 p_4 - \lambda_4 p_5 \\ dp_6/dt = \lambda_4 p_5 - \beta\lambda_6 p_6 - (1-\beta)\lambda_2 p_6 \\ dp_7/dt = \beta\lambda_6 p_6 + \gamma\lambda_6 p_3 + \delta\lambda_6 p_{12} - \lambda_7 p_7 \\ dp_8/dt = \alpha\lambda_8 p_1 - \lambda_7 p_8 \\ dp_9/dt = \lambda_7 p_7 + \lambda_7 p_8 - \lambda_9 p_9 \\ dp_{10}/dt = (1-\beta)\lambda_2 p_6 - \lambda_5 p_{10} \\ dp_{11}/dt = \lambda_5 p_{10} - \lambda_4 p_{11} \\ dp_{12}/dt = \lambda_4 p_{11} - \delta\lambda_6 p_{12} - (1-\delta)\lambda_2 p_{12} \\ dp_{13}/dt = (1-\delta)\lambda_2 p_{12} - \lambda_{13} p_{13} \\ dp_{14}/dt = \lambda_{13} p_{13} - \lambda_4 p_{14} \\ dp_{15}/dt = \lambda_4 p_{14} - \lambda_6 p_{15} \end{cases} \qquad (1)$$

с начальными условиями

$$\begin{cases} p_0(0) = 1 \\ p_i(0) = 0 \ (i = 1, ..., 15) \end{cases} . \qquad (2)$$

Для мониторинга загруженности сети представляет интерес доля пакетов, передаваемых по каждому из возможных режимов функционирования. Для этого весь диапазон времени доставки фрагментов был разбит на 5 диапазонов. Границами каждого диапазона являются точки пересечения графиков плотности вероятностей для каждого из режимов (рис. 3).

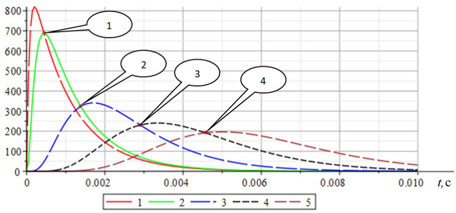


Рис 3.

Данная модель позволяет осуществлять качественный анализ вклада вероятностей времени доставки пакетов для пяти режимов передачи (рис. 4):

I. ускоренная передача пакетов в режиме Bursting;

II. успешная передача пакета с первой попытки;

III. успешная передача пакета со второй попытки;

IV. успешная передача пакета с третьей попытки;

V. успешная передача пакета с четвёртой попытки.

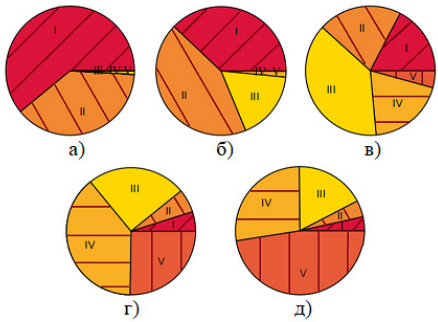


Рис 4.

В статьях [1]-[2] показано, что лучшим показателем загруженности канала является определение загрузки на основе доли пакетов, время доставки которых попадает в интервал, характеризующийся успешной передачей после двух неудачных попыток. Результаты исследований обосновывают методику, описанную в [1]-[2], основанную на выделении временных интервалов доставки информации, которая базируется на анализе принципов функционирования и моделировании информационных процессов. Данная методика предоставляет возможность с достаточной точностью оценить загруженность сети, опираясь на экспериментально полученное время доставки данных. Методология оценки загруженности сети основывается на моделировании диапазонов времени доставки информации, что позволяет оценить долю пакетов, доставленных в заданные временные интервалы.

Литература

1. Абрамов Г.В. Разработка системы мониторинга загруженности гибридных сетей / Г.В. Абрамов, В.Е. Глушаков, Р.В. Данилов //

Вестник компьютерных и информационных технологий. — 2024. — Т. 21, № 7 (241). — С. 29–35.

2. Абрамов Г.В. Модель системы мониторинга передачи данных в гибридных сетях / Г.В. Абрамов, В.Е. Глушаков // Вестник Воронежского института ФСИН России. — 2024. — № 3. — С. 14–21.

ДИНАМИЧЕСКОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ РЕГРЕССИОННЫХ МОДЕЛЕЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СПУСКА ПО УЗЛОВЫМ ПРЯМЫМ

О.А. Голованов, А.Н. Тырсин

(Екатеринбург, Уральский федеральный университет,
Институт экономики Уральского отделения РАН)

golovanov.oa@uiec.ru

Высокое быстродействие анализа регрессионных моделей критически важно для успешного управления динамическими системами, обеспечивая их адаптивность, точность и устойчивость в условиях неопределенности и изменчивости данных. Однако возможная стохастическая неоднородность обязывает использовать робастные модели, такие как метод наименьших модулей (МНМ), обеспечивающие устойчивость к выбросам, но уступающие параметрическим методам в быстродействии. При невыполнении нескольких предпосылок Гаусса-Маркова [1] МНМ-оценки также могут оказаться неустойчивыми, что требует использования обобщенного метода наименьших модулей (ОМНМ). Необходимо описать вычислительно эффективные реализации алгоритмов спуска для динамических задач оценивания. Сформируем задачу для МНМ и ОМНМ [2]

$$Q(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^{n} \rho\left(|y_i - \mathbf{x}_i \mathbf{a}|\right) \to \min\nolimits_{\mathbf{a}\in\mathbb{R}^m}, \qquad (1)$$

где функция потерь $\rho(\cdot) = |y_i - \mathbf{x}_i\mathbf{a}|$ для МНМ и $\ln(|x|+1)$ для ОМНМ, $\mathbf{y}$ и $\mathbf{x}$ — зависимые и независимые переменные, $\mathbf{a}$ — искомые параметры модели.

Для повышения вычислительной эффективности ОМНМ можно свести к итерационному решению последовательности задач минимизации взвешенным методом наименьших модулей (ВМНМ) [3]

$$V^{(k)}(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^{n} p_i^{(k)}\left(|y_i - \mathbf{x}_i \mathbf{a}|\right) \to \min\nolimits_{\mathbf{a}\in\mathbb{R}^m}, \qquad (2)$$

где p_i — весовые коэффициенты, равные 1 на нулевой итерации и $\rho(|e_i^{(k-1)}|)/|e_i^{(k-1)}|$ на последующих, $e_i^{(k-1)} = y_i - \sum_{j=1}^{m} a_j^{(k-1)} x_{ij}$ —

© Голованов О.А., Тырсин А.Н., 2025

ошибки на $(k-1)$-й итерации, в качестве функции потерь $\rho(\cdot)$ также используем $\ln(|x|+1)$.

Алгоритм динамического спуска отличается от статического [4] учетом решений с предыдущих итераций, что позволяет быстрее достичь минимума на текущей итерации. Приняв метод наименьших квадратов (МНК) за эталон, оценим быстродействие алгоритмов спуска (Рис. 1).

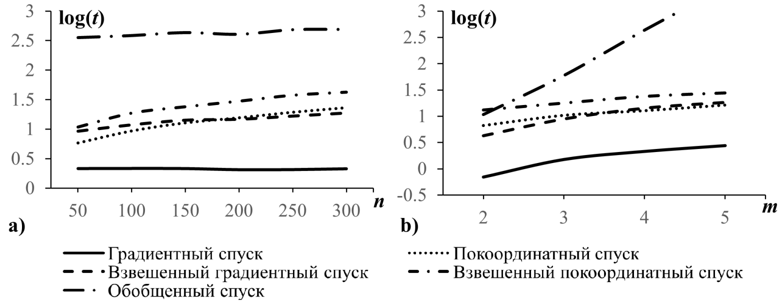


Рис. 1. Десятичный логарифм от отношения среднего времени анализа динамическими алгоритмами спуска к МНК при a) $m=4$, b) $n=150$

В результате все алгоритмы спуска демонстрируют существенное улучшение вычислительной эффективности по сравнению с их статическими реализациями, приблизившись по скорости к МНК.

Литература

1. Greene W.H. Econometric Analysis: 8th ed. — Pearson, 2020. — 1176 p.

2. Тырсин А.Н. Робастное построение регрессионных зависимостей на основе обобщенного метода наименьших модулей / А.Н. Тырсин // Записки научных семинаров ПОМИ. — 2005. — Т. 328. — С. 236–250.

3. Панюков А.В. Взаимосвязь взвешенного и обобщенного вариантов метода наименьших модулей / А.В. Панюков , А.Н. Тырсин // Известия Челябинского научного центра. — 2007. — В. 1(35). — С. 6–11.

4. Голованов О.А. Регрессионный анализ данных на основе метода наименьших модулей в динамических задачах оценивания / О.А. Голованов , А.Н. Тырсин // Заводская лаборатория. Диагно-

стика материалов. — 2023. — Т. 89, № 5. — С. 71–80. — DOI: 10.26896/1028-6861-2023-89-5-71-80

К ВОПРОСУ О ВВЕДЕНИИ ПРОГРЕССИВНОЙ ШКАЛЫ НАЛОГООБЛОЖЕНИЯ В РОССИИ

С.К. Горлов, **В.А. Родин** (Воронеж, ВИ МВД РФ)
rodin_v@mail.ru

Построение и анализ эффективности любой шкалы налогообложения на доходы населения не возможен, если неизвестно статистическое распределение доходов. В 2006 году в работе [1] было доказано, что: распределение логнормальное и с разными параметрами для разных регионов РФ. Используя данный факт, в 2015 году в работе [2] была реализована возможность построения разных моделей прогрессивного налогообложения. Получена универсальная модель в виде формулы:

$$S = N\mu^* \sum_{k=1}^{n} \left[\Phi\left(\frac{1}{\sigma}\ln\beta_{k+1} - \frac{\sigma}{2}\right) - \Phi\left(\frac{1}{\sigma}\ln\beta_{k} - \frac{\sigma}{2}\right)\right]$$

$$\mu^* = e^{\mu+\sigma^2/2}, \beta_k = \frac{a_k}{\mu^8}, \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{\frac{-x^2}{2}}\,dx$$

Величина налога:

$$N(x) = \begin{cases} t_0, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant a_1; \\ t_1, & \text{если } a_1 \leqslant x \leqslant a_2; \\ ... & \\ t_n, & \text{если } x \geqslant a_{n+1}. \end{cases}$$

Эта формула является новым характеристическим свойством логнормального распределения и значительно упрощает вычисления эффекта от введения любой шкалы. Не важно, кого считать богатым и нищим. Относительный эффект сбора зависит от параметра σ, который определяет разброс распределения. Именно это явление вскрывает несовершенство и не оптимальность введения единой шкалы дя всех районов РФ. Нужен дифференцируемый подход. В работе

© Горлов С.К., Родин В.А., 2025

[2], как пример показано, что введение даже довольно щадящей прогрессивной шкалы в Воронежской области вдвое увеличивает сумму налога. При этом предполагается полное освобождение от налога беднейших слоев населения. Шкала процентов определяется в долях медианой средней распределения, но зависит и от рассеивания — от параметра σ.

Литература

1. Колмаков И.Б. Прогнозирование показателей дифференциации денежных доходов населения // Проблемы прогнозирования. — 2006. — № 1. — С. 136-162.

2. Давнис В.В., Родин В.А. Модель неравномерной шкалы налогообложения и примеры ее возможного использования. / В.В.Давнис , В.А.Родин // Современная экономика: проблемы и решения. — 2016 —№ 3. —С. 8-19.

ОПТИМАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМОЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПРИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОГРАНИЧЕНИЯХ

И.В.Гребенникова (Екатеринбург, УГГУ)

giv001@mail.ru

Рассматриваются управляемые сингулярно возмущенные системы (с малым параметром $\mu > 0$, запаздыванием $h > 0$) :

$$M(\mu)dz/dt = A(t)z(t) + G(t)z(t-h) + B(t)u(t),$$

где $t \in T = [t_0, t_1]$, матрица $M(\mu) = diag(E_n, \mu E_m)$, где E_k — единичная $k \times k$ матрица. Начальное состояние системы $z(t) = \psi(t),\ t_0 - h \leqslant t < t_0,\ z_0 = z(t_0)$ точно неизвестно и заданы лишь ограничения $z_0 \in Z_0$, Z_0 — выпуклый компакт в R^{n+m}; $\psi(t) \in \Psi(t),\ t_0 - h \leqslant t < t_0,\ \Psi(t)$ — заданное многозначное отображение со значениями в виде выпуклых компактов, непрерывное по t в метрике Хаусдорфа. Реализации управления $u(t)$, $t \in T$ — измеримые по Лебегу функции, удовлетворяющие условию $u(\cdot) \in P$, P — слабо компактное выпуклое множество в $L_2^r(T)$. В данном случае $P = \{u(\cdot) \mid u(t) \in P(t),\ t \in T\}$, где $P(t)$ — заданное непрерывное, ограниченное, выпуклое многозначное отображение. Выполнено условие асимптотической устойчивости для линейных систем с запаздыванием.

© Гребенникова И.В., 2025

Рассматривается минимаксная задача управления [1]: среди $u(\cdot) \in P$ найти $u^0 = u^0(\cdot)$, доставляющее

$$\varepsilon^0(t_1, \mu) = J(u^0) = \min_{u(\cdot)\in P} J(u(\cdot)),$$

$$J(u(\cdot)) = \max_{z_0\in Z_0} \max_{\psi(\cdot)\in\Psi(\cdot)} \varphi(z(t_1; u(\cdot), z_0, \psi(\cdot))),$$

где $\varphi(\cdot)$ — заданная выпуклая функция; $z(t; u(\cdot), z_0, \psi(\cdot))$ — решение исходной системы, исходящее из Z_0, при некотором $\psi(\cdot) \in \Psi(\cdot)$ и фиксированном $u(\cdot) \in P$.

Предлагаемая процедура [2] позволяет построить управляющее воздействие, доставляющее оптимальное значение с заданной степенью точности $o(\mu^k)$. Разрешимость исходной задачи управления, а также допустимость используемых аналитических конструкций определяется рядом требований.

Литература

1. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности / А.Б. Куржанский. — М. : Наука, 1977. — 392 с.

2. Гребенникова И.В. Итерационная процедура построения оптимального решения а минимаксной задаче управления сингулярно возмущенной системой с запаздыванием при геометрических ограничениях / И.В. Гребенникова, А.Г. Кремлев // Известия Саратовского университета. Серия Математика. Механика. Информатика. — 2016. — Т. 16, вып. 3. — С. 272–280.

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ РАВНОСХОДИМОСТИ ДЛЯ ОПЕРАТОРА С ИНВОЛЮЦИЕЙ НА ГРАФЕ

Е.И. Григорьева (Воронеж, ВГУ)
elenabiryukova2010@yandex.ru

На геометрическом графе $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2\}$, состоящем из двух ребер, задан функционально-дифференциальный оператор с инволюцией как оператор в пространстве вектор-функций $y(x) = (y_1(x), y_2(x))^T$ (T — знак транспонирования):

$$Ly = \begin{pmatrix} \alpha_1 y_1'(x) + \beta_1 y_1'(1-x) + p_{11}(x)y_1(x) + p_{12}(x)y_1(1-x) \\ \alpha_2 y_2'(x) + \beta_2 y_2'(1-x) + p_{21}(x)y_2(x) + p_{22}(x)y_2(1-x) \end{pmatrix},$$

$$y_1(0) = y_1(1) = y_2(0).$$

© Григорьева Е.И., 2025

Ребро γ_1 образует цикл-петлю, а γ_2 примыкает к γ_1. Каждое ребро графа параметризовано отрезком $[0,1]$. Всюду считается, что α_k, β_k — комплексные числа, $\beta_k^2-\alpha_k^2\neq 0$, $\beta_k\neq 0$, $k=1,2$, $x\in[0,1]$, $p_{i,j}\in C^1[0,1]$, $\int\limits_0^1 p_{11}(x)dx=\int\limits_0^1 p_{21}(x)dx$, $i,j=1,2$ (см.[1-2]).

Теорема. *Пусть матрица $a(x)=\mathrm{diag}(a_1(x),a_2(x))$ функции $a_1(x),a_2(x)$ удовлетворяют условию Липшица порядка 1, $a_1(x)=a_1(1-x)$, $a_2(x)=a_2(1-x)$. Тогда для любой вектор-функции $f(x)=(f_1(x),f_2(x))^T$, $f_k(x)\in L[0,1]$ $(k=1,2)$ выполняется соотношение:*

$$\lim_{r\to\infty}\|a(x)S_r(f,x)-S_r(af,x)\|_\infty=0,$$

где $S_r(f,x)$ — частичная сумма разложения вектор-функции $f(x)$ в ряд Фурье по собственным и присоединенным функциям оператора L, включающая слагаемые, для которых собственные значения $|\lambda_k|<r$.

Литература

1. Бурлуцкая М. Ш. О равносходимости разложений по собственным функциям функционально-дифференциального оператора первого порядка на графе из двух ребер, содержащем цикл / М.Ш. Бурлуцкая, А.П. Хромов // Дифференциальные уравнения. — 2007. —Т. 43, № 12. — С. 1597–1605.

2. Бурлуцкая М. Ш. Об одной теореме равносходимости на всем отрезке для функционально-дифференциальных операторов / М.Ш. Бурлуцкая, А.П. Хромов // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика. — 2009. —Т. 9, № 4. — С. 3–10.

ЦЕПНОЕ ПРАВИЛО И ГИПОТЕЗА НЕЛЬСОНА[1]

Н.А. Гусев (Москва, МФТИ)
ngusev@phystech.su

Пусть $\boldsymbol{v}\colon\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$ — локально интегрируемое бездивергентное векторное поле. Будем говорить, что для $\boldsymbol{v}$ выполнено *цепное правило*, если для любого ограниченного измеримого скалярного поля $\rho\colon\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$, удовлетворяющего равенству

$$\mathrm{div}(\rho\boldsymbol{v})=0 \tag{1}$$

[1] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00315.

© Гусев Н.А., 2025

(в смысле обобщённых функций) для любой функции $\beta \in C^1(\mathbb{R})$ выполняется равенство

$$\operatorname{div}(\beta(\rho)\boldsymbol{v}) = 0. \tag{2}$$

Цепное правило естественно рассматривать как стационарную версию ренормализационного свойства, введённого ДиПерной и Лионсом.

Нэльсон выдвинул следующую гипотезу [1] (см. также [2]):

Гипотеза 1. *Если $\boldsymbol{v}$ квадратично интегрируемо и имеет компактный носитель, то соответствующий неограниченный оператор $A_0\colon L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$ вида $A_0(\rho) = \boldsymbol{v} \cdot \nabla\rho$ с областью определения $D(A_0) = C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ существенно кососопряжён.*

В случае $d \geqslant 3$ эта гипотеза была опровергнута Айзенманом [2], однако случай $d = 2$ до недавнего времени оставался открытым. Опровержение гипотезы Нельсона в этом случае вытекает из результатов, полученных в [3] и [4]. Однако если бы гипотеза Нельсона была верна, то из существенной кососопряжённости оператора A_0 следовало бы, что для поля $\boldsymbol{v}$ выполнено цепное правило (для ограниченных полей $\boldsymbol{v}$ эта импликация была доказана в [4]). Для контрпримеров полей (не принадлежащих $L^2(\mathbb{R}^d)$), которые привёл Нельсон в поддержку своей гипотезы, цепное правило не выполняется, в связи с чем естественно возникает ослабленный вариант сформулированной им гипотезы:

Гипотеза 2. *Если $\boldsymbol{v}$ квадратично интегрируемо и имеет компактный носитель, то для $\boldsymbol{v}$ выполнено цепное правило.*

В случае $d \geqslant 3$ эта ослабленная гипотеза опровергается теми же контрпримерами, что исходная гипотеза Нельсона. Наш основной результат состоит в том, что данный ослабленный вариант гипотезы Нельсона верен в случае $d = 2$:

Теорема 3. *Гипотеза 2 верна при $d = 2$.*

Доклад основан на совместной работе [5] с М.В. Коробковым.

Литература

1. Nelson E. Les ecoulements incompressibles d'energie finie / E. Nelson // Colloques internat. Centre nat. rech. sci. — 1962. — №117. — P. 159–165.

2. Aizenman M. Vector Fields as Generators of Flows: A Counterexample to Nelson's Conjecture / M. Aizenman // Annals of Math. — 1978. — V. 107, №2. — P. 287–296.

3. Alberti G. A uniqueness result for the continuity equation in two dimensions. / Alberti G., Bianchini S., Crippa G. // Journal of the European Mathematical Society. — 2014. — V. 16, №2. — P. 201—234.

4. Panov E.Yu. On one criterion of the uniqueness of generalized solutions for linear transport equations with discontinuous coefficients / E.Yu. Panov // arXiv.org preprint № 1504.00836. — 2015. — 27 p.

5. Gusev N.A. The Nelson conjecture and chain rule property. / Gusev N.A., Korobkov M.V. // arXiv.org preprint № 2411.09338. — 2024. — 30 p.

МНОГОФАЗНЫЕ АСИМПТОТИКИ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ[1]

В.Г. Данилов, М.А. Рахель (Москва, МИЭМ НИУ ВШЭ)
mrahel@hse.ru, vgdanilov@mail.ru

В докладе будет рассказан пример построения асимптотики фундаментального решения вырождающегося параболического уравнения с малым параметром

$$\varepsilon\frac{\partial G}{\partial t}-\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial x}\left(xa(x)\frac{\partial G}{\partial x}\right)=0,\ x\geqslant 0,\ t>0; \qquad G|_{t=0,\ x>0}=\delta(x-\xi), \tag{1}$$

Близкий к этому пример рассматривался ранее [1],[2] в традиционной постановке (асимптотика при $t\to 0$, традиция со времен работы С.А. Молчанова [4]).

Наличие малого параметра позволяет выявить структуру решения. В данном примере оказалось, что решение зависит от двух быстрых переменных $S_1(x,\xi,t)/\varepsilon$ и $S_2(x,\xi,t)/\varepsilon$, а точнее, имеет вид

$$G(x,\xi,t)=\frac{1}{\varepsilon t}e^{-\frac{S_1(x,\xi,t)}{\varepsilon}}I_0\left(\frac{S_2(x,\xi,t)}{\varepsilon}\right), \tag{2}$$

где $I_0(z)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода. В частности, при $a(x)\equiv 1$: $S_1=(x+\xi)/t,\ S_2=2\sqrt{x\xi}/t$.

Такие решения нелинейных уравнений (нетривиально зависящие от двух быстрых переменных) известны и описывают взаимодействие нелинейных волн. Здесь же появление двухфазного решения связано с вырождением главной части оператора.

[1] Работа выполнена в рамках проекта «Моделирование физических процессов в непрерывных и дискретных средах»

© Данилов В.Г., Рахель М.А., 2025

При $a(x) \neq 1$ решение уточняется по теории возмущений, аналогичной теории Лангера.

Для обоснования асимптотики можно применять схему из [3]. Если G_0 — главное слагаемое асимптотики, то G_0 — решение задачи

$$\varepsilon \frac{\partial G_0}{\partial t} - \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(x a(x) \frac{\partial G_0}{\partial x} \right) = \varepsilon G_0 F, \ G_0|_{t=0} = \delta(x-\xi). \qquad (3)$$

где $F(x)$ — гладкая равномерно ограниченная при $x \geqslant 0$ функция. Тогда

$$G(x,\xi,t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon^k G_k(x,\xi,t), \qquad (4)$$

где

$$G_k(x,\xi,t) = \int_0^t \int_0^{+\infty} G_0(x,y,t-\tau) F(y) G_{k-1}(y,\xi,\tau) dy d\tau. \qquad (5)$$

и ряд (4) сходится равномерно при $x \geqslant 0$.

Литература

1. Chen L. The Fundamental Solution to 1D Degenerate Diffusion Equation with One-sided Boundary / L. Chen, I. Weih-Wadman // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 2020. — Vol. 492, № 1. — P. 124368.

2. Chen L. Fundamental solution to 1D degenerate diffusion equation with locally bounded coefficients / L. Chen, I. Weih-Wadman // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 2022. — Vol. 510, № 2. — P. 125979.

3. Danilov V. Justification of the exact asymptotics of the fundamental solution for a degenerate parabolic equation with a small parameter / V. Danilov, M. Rakhel // ZAMM Zeitschrift f?r Angewandte Mathematik und Mechanik. — 2024. — Vol. 104, № 3. — P. e202300491.

4. Молчанов С.А. Диффузионные процессы и риманова геометрия / С.А. Молчанов // Успехи мат. наук. — 1975. — Т. 30, № 1(181). — С. 3–59.

О КОЛЕБАНИЯХ ДВИЖУЩЕГОСЯ УПРУГОГО ПОЛОТНА С УСЛОВИЯМИ СВОБОДНОГО ЗАКРЕПЛЕНИЯ

М.Г. Даудов (Москва, РГУ им. А.Н. Косыгина)
d.murad.d2002@mail.ru

Основным объектом является волновое уравнение, которое дает решения поперечных колебаний движущегося полотна:

$$u_{tt} + 2v_0 u_{tx} + \left(v_0^2 - c^2\right) u_{xx} + \frac{D}{m} u_{xxxx} = 0. \qquad (1)$$

В уравнении (1) $u = u(x,t)$ — функция, которая показывает на сколько от точки равновесия отклоняется полотно в точке x в момент времени t, v_0 — постоянная скорость, с которой волна перемещается вдоль оси x, c — скорость распространения колебаний в покоящемся полотне, D — величина жесткости на изгиб, m — масса полотна на единицу его площади.

Из–за того, что в данном уравнении появляется слагаемое со смешанной производной, явно не удается применить метод разделения переменных Фурье, для построения решения в виде ряда Фурье по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля.

Решение будет находиться в следующем виде:

$$u(x,t) = T(t)\, e^{\lambda x}. \qquad (2)$$

Далее функция (2) подставляется в уравнение и получается уравнения с замененной функцией следующего вида:

$$T'' e^{\lambda x} + 2v_0 T' \lambda e^{\lambda x} + \left(v_0^2 - c^2\right) T \lambda^2 e^{\lambda x} + \frac{D}{m} T \lambda^4 e^{\lambda x} = 0. \qquad (3)$$

После упрощения (3), получается обыкновенное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами:

$$T'' + 2v_0 \lambda T' + \left(\left(v_0^2 - c^2\right) + \frac{D}{m}\lambda^2\right) \lambda^2 T = 0. \qquad (4)$$

Для (4) применяется стандартный метод решения дифференциального уравнения. Составляется характеристическое уравнение:

$$\sigma^2 + 2v_0 \lambda \sigma + \left(\left(v_0^2 - c^2\right) + \frac{D}{m}\lambda^2\right) \lambda^2 = 0. \qquad (5)$$

© Даудов М.Г., 2025

Затем находятся корни уравнения (5):

$$\sigma_{1,2} = \lambda \left(-v_0 \pm c\sqrt{1 - \frac{D}{mc^2}\lambda^2} \right).$$

Выводится решения для функции T:

$$T\left(t\right) = e^{-v_0 \lambda t} \left(C_1 e^{c\lambda\sqrt{1\ -\ \frac{D}{mc^2}\lambda^2} t} + C_2 e^{-c\lambda\sqrt{1\ -\ \frac{D}{mc^2}\lambda^2} t} \right).$$

Проводится обратная замена для определенной ранее функции, получается окончательный вид решения искомого уравнения:

$$u\left(x,t\right) = \left(C_1 e^{c\lambda\sqrt{1\ -\ \frac{D}{mc^2}\lambda^2} t} + C_2 e^{-c\lambda\sqrt{1\ -\ \frac{D}{mc^2}\lambda^2} t} \right) e^{\lambda(x - v_0 t)}.$$

После перехода к этапу решению задачи с начальными и краевыми условиями, необходимо найти базис из экспоненциальных функций и выполнить разложение по этому базису. Из начальных условий можно определить неизвестные коэффициенты.

В качестве примера взяты краевые и начальные условия:

$$u_{x|_{x=0}} = u_{x|_{x=l}} = u_{xxx|_{x=0}} = u_{xxx|_{x=l}} = 0, \tag{6}$$

$$u|_{t=0} = \cos x, \quad u_{t|_{t=0}} = 0. \tag{7}$$

Для условий (6) и (7), применив ранее указанный метод, получается следующее точное решение для уравнения колебаний движущегося упругого полотна:

$$u\left(x,t\right) = \frac{1}{2}\left(\left(1 + \frac{v_0}{c\theta}\right)\cos\left(t\left(c\theta - v_0\right) + x\right) + \right.$$
$$\left. + \left(1 - \frac{v_0}{c\theta}\right)\cos\left(t\left(c\theta + v_0\right) - x\right)\right).$$

Подробнее о механических колебаниях и о дифференциальныз уравнениях в частных производных монжо прочитать в [1] и [2].

Литература

1. Ларин А.А. История теории механических колебаний / А.А. Ларин. — Харьков : НТУ ХПИ, 2019. — 280 с.

2. Пикулин В.П. Практический курс по уравнениям математической физики / В.П. Пикулин, С.И. Похожаев // Изд. 2–е, стереотип. — М : МЦНМО, 2014. — 208 с.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЯДОВ ПРИ ПОВОРОТЕ КООРДИНАТНЫХ ОСЕЙ

А.А. Демидов (ИПС РАН, Переславль–Залесский)
alex@dem.botik.ru

Будем вращать координаты линейным преобразованием $\vec{r} = T\vec{r}$ изменения базиса и наблюдать, как ведёт себя значение lim, которое никак не должно зависеть от координат — как бы мы ни повернули листок, это не должно влиять на сам рисунок.

В двумерном пространстве поворот можно описать одним углом θ с матрицей поворота в декартовой системе координат:

$$T(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \mp\sin\theta \\ \pm\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \exp\begin{pmatrix} 0 & \mp\theta \\ \pm\theta & 0 \end{pmatrix}$$

Теорема 1 (Совпадение двух гипербол: $1/x$ и канонического)**.** *Каноническое уравнение гиперболы: $y^2 - x^2 = 2$, откуда $y = \sqrt{x^2+2}$, уравнение прямой на 45° к оси OX: $y = x$. Тогда разность этих двух функций, нормированная на $\sqrt{2}$, будет равна разности функции $y = 1/x$ и оси абсцисс $y = 0$ в точке, лежащей на той же окружности $x^2 + y^2 = R^2$, что и тч. $y = x$.*

«Зазеркальный анализ». Те же самые графики функций в **зазеркальной** системе координат, развёрнутой относительно исходной на 45° имеют совершенно другое, «дуальное» представление в виде рядов.

Очевидно:

$$y = x \quad \longrightarrow \quad \bar{y} = 0$$

$$y = \frac{1}{x} \quad \longrightarrow \quad \bar{y} = \sqrt{\bar{x}^2 + 2}$$

При этом интересны выражения для зазеркальных функций в оригинальной системе координат (получится ли взять ряды?):

$$\int x - \sqrt{x^2 - 2} \approx log(x), \quad \text{при} \quad x \gg 0.$$

© Демидов А.А., 2025

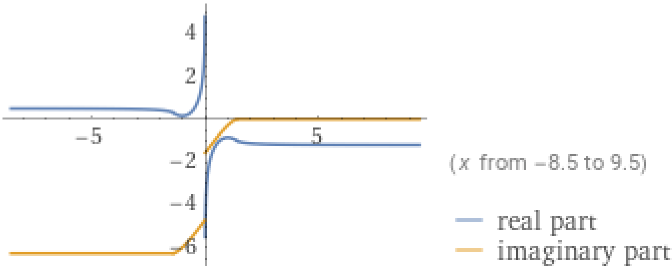


Рис 1. Графики функций в зазеркальной системе координат.

Несмотря, что графики не должны «шевелиться» при повороте листка бумаги, прямой расчёт $WolframAlpha$ не даёт совпадения, **они шевелятся**.

Также:

$$\lim_{x\to\infty}\int\left(\frac{1}{x}-\left(x-\sqrt{x^2-2}\right)\right)dx=-\frac{1}{2}-\log(2)$$

Либо мы «уловили» ошибки округления, либо бесконечно- удалённую точку, либо что-то ещё, неизвестное и интересное. Если аккуратный расчёт не устранит проблему — противоречие.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УЛЬТРАГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

М.Н. Демченко (Санкт-Петербург, ПОМИ)
demchenko@pdmi.ras.ru

В работе исследуется асимптотическое поведение на бесконечности решения $U(t, s, x_1, \ldots, x_d, y_1, \ldots, y_n)$ следующей задачи в евклидовом пространстве:

$$\left(\partial_{ts}^2+\partial_{x_1}^2+\ldots+\partial_{x_d}^2-\partial_{y_1}^2-\ldots-\partial_{y_n}^2\right)U=0, \qquad (1)$$

$$U|_{t=0}=U_0. \qquad (2)$$

Уравнение (1) является ультрагиперболическим, а гиперплоскость $\{t=0\}$, на которой задана функция U_0, является характеристической для данного уравнения. Это видно, если перейти к функции $u(x, y)$ переменных

$$x=(x_0, x_1, \ldots, x_d), \quad y=(y_0, y_1, \ldots, y_n),$$

© Демченко М.Н., 2025

которая связана с решением U соотношением

$$u(x,y) = U((x_0 - y_0)/2, (x_0 + y_0)/2, x_1, \dots, x_d, y_1, \dots, y_n).$$

Уравнение (1) при этом принимает вид

$$(\Delta_x - \Delta_y)u = 0,$$
$$\Delta_x = \partial_{x_0}^2 + \ldots + \partial_{x_d}^2, \quad \Delta_y = \partial_{y_0}^2 + \ldots + \partial_{y_n}^2,$$

а гиперплоскость $\{t = 0\}$ в координатах x, y задается уравнением $x_0 = y_0$.

В работе А.С. Благовещенского [1] была установлена корректность задачи (1), (2) в определенном классе функций. В частности, был получен следующий закон сохранения:

$$\|U(t)\|_{L_2} = \|U_0\|_{L_2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Асимптотические свойства решения указанной задачи, установленные в данной работе, удобнее сформулировать в терминах функции $u(x,y)$. Предположим, что

$$x = \tau\theta, \quad y = (\tau + p)\omega,$$

где $(\theta, \omega, p) \in S^d \times S^n \times \mathbb{R}$ (S^m — единичная сфера в $\mathbb{R}^{m+1}$), τ — большой положительный параметр. При $\tau \to +\infty$ точка (x,y) стремится к бесконечности вдоль характеристики. Мы будем предполагать, что $\theta_0 \neq \omega_0$. Это условие означает, что характеристическое направление (θ, ω) не лежит в гиперплоскости, на которой заданы начальные данные. Также предполагается, что $N := d + n \geqslant 3$, а функция U_0 принадлежит классу Шварца. Будет получено соотношение

$$u(x,y) = \frac{1}{\tau^{N/2}} F(\theta, \omega, p)(1 + o(1)), \quad \tau \to +\infty,$$

а также формула для асимптотического коэффициента F.

Подобное асимптотическое соотношение известно для решений задачи Коши для *гиперболических* уравнений (мы упомянем лишь наиболее ранние работы по этой тематике [2, 3]). Данные Коши при этом задаются на пространственно-ориентированной гиперплоскости. Асимптотические свойства решений ультрагиперболических уравнений изучались в работах [4, 5]. Однако, там ставились условия, отличные от условия (2).

Литература

1. Благовещенский А.С. О задаче для ультрагиперболического уравнения с данными на характеристической плоскости / А.С. Благовещенский // Вестник Ленинградского университета. Сер. : Математики, механики и астрономии. — 1965. — № 13. — С. 13–19.

2. Благовещенский А.С. О некоторых новых корректных задачах для волнового уравнения / А. С. Благовещенский // Труды V Всесоюзного симпозиума по дифракции и распространению волн. — Ленинград : Наука, 1971. — С. 29–35.

3. Лакс П. Теория рассеяния / П. Лакс, Р. Филлипс. — М. : Мир, 1971.

4. Демченко М.Н. Существование решения задачи рассеяния для ультрагиперболического уравнения / М.Н. Демченко // Записки научных семинаров ПОМИ. — 2023. — Т. 521, С. 79–94.

5. Демченко М.Н. Существование решения неоднородного ультрагиперболического уравнения / М.Н. Демченко // Записки научных семинаров ПОМИ. — 2024. — Т. 533, С. 77–100.

О ВОСПРОИЗВОДЯЩИХ ЯДРАХ В ВЕСОВЫХ КЛАССАХ ФУНКЦИЙ

А.Л. Джабраилов (Грозный, ЧГУ)
ahmed_0065@mail.ru

Известно, что важными инструментами при работе с гильбертовыми пространствами и аналитическими функциями являются воспроизводящие ядра. Такие ядра определяют скорость роста решений краевой задачи, вблизи границы области, на которой задано уравнение, что тесно связано с теоремами интерполяции, а также другими вопросами. Рассмотрим воспроизводящие ядра, приспособленные для работы с операторами, содержащими оператор Бесселя.

Пусть F — это класс функций, определённых на множестве E, который образует гильбертово пространство (комплексное или вещественное). Функция $K(x, y)$, $x, y \in E$, называется воспроизводящим ядром класса F, если выполняются следующие условия:

1. для любого y функция $K(x, y)$ рассматривается как функция от x и принадлежит классу F;

2. выполняется воспроизводящее свойство: для любого $y \in E$ и любой функции $f \in F$ справедливо равенство:

$$f(y) = (f(x), K(x, y))_x.$$

© Джабраилов А.Л., 2025

Знак x в скалярном произведении указывает на то, что скалярное произведение применяется к функциям по x.

Будем иметь дело с n-мерным евклидовым пространством $\mathbb{R}^n$, открытым ортантом $\mathbb{R}^n_+=\{x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ x_1>0,\ldots,x_n>0\}$. Пусть $\gamma=(\gamma_1,...,\gamma_n)$ — мультииндекс, состоящий из положительных действительных чисел $\gamma_i>0$, $i=1,...,n$, и, пусть, $|\gamma|=\gamma_1+\ldots+\gamma_n$. Пусть $L_p^\gamma(\mathbb{R}^n_+)=L_p^\gamma$, $1\leqslant p<\infty$ — пространство измеримых на $\mathbb{R}^n_+$ функций, четных по каждой из переменных x_i, $i=1,...,n$ при $x\in\mathbb{R}^n$, таких, что $\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}|f(x)|^p x^\gamma dx<\infty$, $x^\gamma=\prod\limits_{i=1}^n x_i^{\gamma_i}$. Для вещественного $p\geqslant 1$, L_p^γ–норма функции f определяется равенством

$$||f||_{L_p^\gamma(\mathbb{R}^n_+)}=||f||_{L_p^\gamma}=||f||_{p,\gamma}=\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}|f(x)|^p x^\gamma dx\right)^{1/p}.$$

Функцию

$$P_\gamma(x,\delta)=\frac{2^n\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\prod\limits_{j=1}^n\Gamma\left(\frac{\gamma_j+1}{2}\right)}\,\delta\,(\delta^2+|x|^2)^{-\frac{n+|\gamma|+1}{2}},\qquad \delta>0.$$

будем называть **общим ядром Пуассона**.

Пусть $\mathbf{F}_\gamma$ — многомерное преобразование Ханкеля (см. [1]).

Теорема 1. *Функция $P_\gamma(x,\delta)$ обладает свойствами*

1. $\mathbf{F}_\gamma[P_\gamma(x,\delta)](\xi)=e^{-\delta|\xi|}$,
2. $\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}P_\gamma(x,\delta)x^\gamma dx=\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}P_\gamma(x,1)x^\gamma dx=1$,
3. $P_\gamma(x,\delta)\in L_p^\gamma$, $1\leqslant p\leqslant\infty$.

Введем обозначение

$$(\mathbf{P}_{\gamma,\delta}f)(x)=(f(x)*P_\gamma(x,\delta))_\gamma,$$

где $(\cdot*\cdot)_\gamma$ — обобщенная свертка (см. [1]).

Теорема 2. *Если $f\in L_p^\gamma$, $1\leqslant p\leqslant\infty$ или $f\in C_0\subset L_\infty^\gamma$, то*

$$||(\mathbf{P}_{\gamma,\delta}f)(x)-f(x)||_{p,\gamma}\to 0\qquad \textit{при}\qquad \delta\to 0.$$

Литература

1. Shishkina E.L. Transmutations, singular and fractional differential equations with applications to mathematical physics / E.L. Shishkina, S.M. Sitnik. — Cambridge : Elsevier. Academic Press, 2020. — 592 p.

ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ И НЕЙМАНА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ $2m$ ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ

Г. Джангибеков, Г.М. Козиев

(Душанбе, ИМ НАН Таджикистана, МУТПТ)

gulkhoja@list.ru, gulnazar88@mail.ru

Рассмотрим общую эллиптическую систему уравнений порядка $2m$ на плоскости $z = x + iy$, комплексная запись которой имеет вид

$$\sum_{n=-m}^{m} a_n(z)\frac{\partial^{2m}\omega}{\partial\overline{z}^{m+n}\partial z^{m-n}} + b_n(z)\frac{\partial^{2m}\overline{\omega}}{\partial\overline{z}^{n-m}\partial z^{n+m}} + T, \tag{1}$$

где $\omega = u(x,y) + iv(x,y)$, T — дифференциальный оператор низшего порядка, $\frac{\partial}{\partial\overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$, $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$. Будем считать, что коэффициенты в (1) являются непрерывными в $\overline{D}$ функциями, а $g(z) \in L^p(D)$, $2 < p < \infty$. По главной части системы (1) построим матрицу-функцию

$$\mathcal{G}(z,t) = \begin{pmatrix} \mathcal{P}_{2m}(z,t) & \mathcal{Q}_{2m}(z,t) \\ \hat{\mathcal{Q}}_{2m}(z,t) & \hat{\mathcal{P}}_{2m}(z,t) \end{pmatrix},\ |t| = 1,\ z \in \overline{D},$$

$\mathcal{P}_{2m}(z,t) = \overline{t}^m \sum_{n=-m}^{m} a_n(z) t^{m+n}$, $\mathcal{Q}_{2m}(z,t) = \overline{t}^m \sum_{n=-m}^{m} b_n(z) t^{m-n}$. Эллиптичность системы (1) означает, что для $\forall z \in \overline{D}, |t| = 1$ должно выполняться неравенство

$$\det\mathcal{G}(z,t) \equiv |\mathcal{P}_{2m}(z,t)|^2| - |\mathcal{Q}_{2m}(z,t)||^2 \neq 0. \tag{2}$$

Без ограничения общности будем считать, что $D = \{z : |z| < 1\}$. Для уравнения (1) будем рассматривать задачу:

Задача Дирихле. *Найти функцию $\omega(z)$ из класса $W_p^{2m}(D) \cap C^{m-1}(\overline{D})$, удовлетворяющую внутри D уравнению (1), а на её границе Γ — краевым условиям*

$$\left.\frac{\partial^j\omega}{\partial n^j}\right|_{\Gamma} = 0,\ j = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{3}$$

© Джангибеков Г., Козиев Г.М., 2025

где $\frac{\partial\omega}{\partial n}$ *— означает производную функции* $\omega(z)$ *по направлению внешней нормали в точках контура* Γ.

В работах [1], [2] И. Н. Векуа был предложен новый метод исследования рассмотренных там граничных задач для систем уравнений в частных производных эллиптического типа путем перехода к эквивалентному сингулярному интегральному уравнению по ограниченной области.

Далее, в работе Б. В. Боярского [3] указанным методом доказано, что при $m = 1$ система второго порядка (1) имеет три гомотопический класс и в случае сильно эллиптических систем с помощью принципа сжатых отображений показана фредгольмовость задачи Дирихле и Неймана, а в работе Г. Джангибекова [4] для двух других гомотопических классах системы (1) (при $m = 1$) получены необходимые и достаточные условия нетеровости и формулы для подсчета индексов рассматриваемых задач в терминах коэффициентов (1).

Этот метод применяется и в настоящей работе.

Пежде всего устанавливается, что множество всех систем (1) удовлетворяющих условию (3) разбиваются на $2m+1$ гомотопических классов $\nu_n(n = 0, \pm1, \cdot, \pm m)$. Введём следующие обозначения:

$$\Delta_n(z) = |a_n(z)|^2 - |b_n(z)|^2,\ \lambda_{\nu,n} = \overline{a}_\nu a_n - b_\nu \overline{b}_n,\ \mu_{\nu,n} = \overline{a}_\nu b_n - b_\nu \overline{a}_n,$$

$\nu = 0, \pm1, \ldots, \pm m;\ n = \pm1, \ldots, \pm m, \nu \neq n,\ M(z)$ — определенная положительная функция выражающая через коэффициенты системы (1).

Теорема. *Для того чтобы задача Дирихле* (3) *для любой эллиптической системы* (1) *с непрерывными коэффициентами в классе* $W_p^{2m}(D) \cap C^{m-1}(\overline{D})$, *была нетеровой, необходимо и достаточно выполнение одного из следующих (исключающих друг друга) условий:*

$$\Delta_0(z) > M(z) + \Big(M^2(z) + \sum_{n=-m, n\neq 0}^{m} (|\mu_{0,n}(z)|^2 - |\lambda_{0,n}(z)|^2)\Big)^{1/2} \forall z \in \overline{D}, \tag{4}$$

$$\Delta_\nu(z) > M(z) + \Big(M^2(z) + \sum_{n=-m, n\neq \nu}^{m} (|\mu_{\nu,n}(z)|^2 - |\lambda_{\nu,n}(z)|^2)\Big)^{1/2}$$

$$\text{и}\quad \overline{a_\nu(\tau)} b_0(\tau) - b_\nu(\tau)\overline{a_0(\tau)} \neq 0\ \forall z \in \overline{D},\ \tau \in \Gamma,\ \nu = \pm1, \cdots, \pm m. \tag{5}$$

При этом, если выполнено (4), *то задача фредгольмова, а если выполнено* (5), *то его индекс равен* $\varkappa =$

$2\nu Ind_\Gamma \left(\overline{a_\nu(\tau)} b_0(\tau) - b_\nu(\tau)\overline{a_0(\tau)}\right)$. Аналогичная теорема имеет место для задачи Неймана для системы (1).

Литература

1. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции / И.Н. Векуа. —М. : Физматгиз, 1959. — 628 с.

2. Векуа И.Н. Новые методы решения эллиптических уравнений. / И.Н. Векуа. —М. -Л: Тех.лит., 1948. — 298 с.

3. Боярский Б.В. Исследования по уравнениям эллиптического типа на плоскости и граничным задачам теории функций.// Дисс. докт. физ.-мат. наук. Москва, —1960.

4. Джангибеков Г. Об одном классе сингулярных интегральных операторов и его приложениях к краевым задачам для эллиптических систем на плоскости / Г. Джангибеков // ДАН СССР. —1993. — Т. 330. —№ 4, С. 415–419.

МОДЕЛИ ДВОЙНОЙ СЕЗОННОЙ АВТОРЕГРЕССИИ С ДРОБНЫМ ИНТЕГРИРОВАНИЕМ[1]

Щ.А.В. Дината, А.Н. Моисеев (ИПМКН ТГУ, Россия)
simatupangdinata@yandex.ru

Цель данной работы — представить класс моделей, которые удовлетворяют этим требованиям, расширяя хорошо известные авторегрессионные модели, предложенные Боксом и Дженкинсом (1976). Расширение заключается в том, чтобы параметр дифференцирования d, D_1, D_2 мог принимать любое действительное значение, а не ограничиваться целыми числами. Было установлено, что для соответствующих значений d, D_1, D_2, а именно в пределах диапазона $0 < d+D_1+D_2 < 0.5$, эти процессы с дробным дифференцированием могут эффективно моделировать долгосрочную устойчивость.

Definition 1. Пусть $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ представляют собой последовательность наблюдений, моделируемую обобщенной моделью двойной сезонной авторегрессии с дробным дифференцированием. Исходная модель может быть записана как:

$$\left(\underbrace{\varphi_p(B)}_{\mathrm{AR}(p)}\underbrace{\Phi_{P_1}(B^{S_1})}_{\mathrm{AR}(P_1)}\underbrace{\Omega_{P_2}(B^{S_2})}_{\mathrm{AR}(P_2)}\right) D\ln(Z_t-\mu) = \varepsilon_t \tag{1}$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке (про № DANA BAZNAS Респуллика Индонезия 75074934).

© Дината Щ.А.В., Моисеев А.Н., 2025

где $\varphi_p(B)$, $\Phi_{P_1}(B^{S_1})$, и $\Omega_{P_2}(B^{S_2})$ представляют авторегрессионные компоненты, которые характеризуют несезонную и сезонные части модели. $D\ln(Z_t-\mu)$ представляет собой преобразованную временную серию Z_t, после применения логарифмического преобразования и дифференцирования для удаления трендов и сезонности, центрированную вокруг своего среднего значения μ. ε_t — это ошибка белого шума. Авторегрессионные компоненты модели DSARFI отражают структуру временной зависимости данных на разных лагах и сезонных периодах. $\varphi_p(B)=\sum_{i=0}^{p}(-\varphi_i)B^i, \quad 1\leqslant i\leqslant p$, где B — это оператор сдвига назад, а φ_i — авторегрессионные коэффициенты для несезонной части модели. $\Phi_{P_1}(B^{S_1})=\sum_{l=0}^{P_1}(-\Phi_l)B^{S_1 l}, \quad 1\leqslant l\leqslant P_1, S_1\in\mathbb{N}$, где B^{S_1} соответствует сезонному периоду S_1, отражая периодичность сезонных эффектов в серии. Следовательно, $\Omega_{P_2}(B^{S_2})=\sum_{h=0}^{P_2}(-\Omega_h)B^{S_2 h}, \quad 1\leqslant h\leqslant P_2, S_2\in\mathbb{N}$, где B^{S_2} указывает на второй сезонный период, позволяя модели захватывать несколько сезонностей. Для учета трендов и сезонных колебаний модель DSARFI вводит несколько операторов дифференцирования, где d, D_1 и D_2 могут быть дробными значениями, и $\nabla^d=(1-B)^d$, $\nabla_{S_1}^{D_1}=(1-B^{S_1})^{D_1}$, $\nabla_{S_2}^{D_2}=(1-B^{S_2})^{D_2}$, определяется следующим образом:

$$\nabla^d=1-dB+\frac{d(d-1)}{2!}B^2-\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\prod_{a=0}^{k-1}(d-a)}{k!}(-B)^k.$$

$$\nabla_{S_1}^{D_1}=1-D_1B^{S_1}+\frac{D_1(D_1-1)}{2!}B^{2S_1}-\cdots=\\=\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{\prod_{a=0}^{j-1}(D_1-a)}{j!}\left(-B^{S_1}\right)^j\right)$$

$$\nabla_{S_2}^{D_2}=1-D_2B^{S_2}+\frac{D_2(D_2-1)}{2!}B^{2S_2}-\cdots=\\=\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{\prod_{a=0}^{l-1}(D_2-a)}{l!}\left(-B^{S_2}\right)^l\right)$$

Definition 2. Пусть $\{Z_t\}, t\in\mathbb{Z}$, предложенная часть двойной сезонной ARI может быть описана следующим образом:

$$\sum_{h=0}^{P_2}\sum_{l=0}^{P_1}\sum_{i=0}^{p}\Omega_h\Phi_l\varphi_i Z_{t-S_2h-S_1l-i}=0 \tag{2}$$

Definition 3. Пусть $\{Z_t\}, t \in \mathbb{Z}$, предложенная часть двойной сезонной авторегрессии с дробным дифференцированием может быть описана следующим образом:

$$\sum_{c=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{P_2}\sum_{l=0}^{P_1}\sum_{i=0}^{p}\mathcal{U}\Omega_h\Phi_l\varphi_i Z_{t-y} = 0 \tag{3}$$

где $\mathcal{U} = (-1)^{c+j+k} g_{y,S_1,S_2}\psi(c)\beta(j)\alpha(k)$, с

$$\alpha(k) = \frac{\prod_{a=0}^{k-1}(d-a)}{k!}, \quad \beta(j) = \frac{\prod_{a=0}^{j-1}(D_1-a)}{j!}, \quad \psi(c) = \frac{\prod_{a=0}^{c-1}(D_2-a)}{c!},$$

и

$$-\sum_{\substack{y=0\\ \max\to\infty}}^{\max} \mathrm{G}_{y,S_1,S_2} Z_{t-y} = 0,$$

а также

$$g_{n,S_1,S_2} = \begin{cases} 1 & \text{если } \left(y = S_2h + S_1l + i + k + j + c\right), y \in \mathbb{Z}^+ \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

где $\forall i, l, h, c, k, j, l : 1 \leqslant i \leqslant p, 1 \leqslant l \leqslant P_1, 1 \leqslant h \leqslant P_2, 0 < c, 0 < j, k < y$, и

$$\sum_{l=0}^{y}\sum_{j=0}^{y}\sum_{k=0}^{y}\sum_{h=0}^{P_2}\sum_{l=0}^{P_1}\sum_{i=0}^{p}\mathcal{U}\Omega_h\Phi_l\varphi_i = -\sum_{\substack{n=1\\ \max\to\infty}}^{\max} \mathrm{G}_{y,S_1,S_2}$$

Наконец, уравнение может быть преобразовано в следующую форму:

$$Z_t = -\sum_{\substack{n=1\\ \max\to\infty}}^{\max} \mathrm{G}_{y,S_1,S_2} Z_{t-y} \tag{4}$$

Теорема 1. Пусть $\{Z_t\}, t \in \mathbb{Z}^+$, это двойной сезонный процесс, определенный как выше, с нулевым средним, первым и вторым сезонными периодами $S_1, S_2 \in \mathbb{N}$. Пусть $\varphi_p(B)\Phi_{P_1}(B^{S_1})\Omega_{P_2}(B^{S_2}) = 0$ не имеют общих корней. Тогда выполняется следующее: процесс $\{Z_t\}$ является **стационарным**, если $d + D_1 + D_2 < 0.5$, $D_1 + D_2 < 0.5$ и $\varphi_p(B)\Phi_{P_1}(B^{S_1})\Omega_{P_2}(B^{S_2}) \neq 0$, для $|z| \leqslant 1$. Стационарный процесс $\{Z_t\}$ обладает **средней памятью**, если $-0.5 < d + D_1 + D_2 < 0$, $-0.5 < D_1 + D_2 < 0$, а также $\varphi_p(B)\Phi_{P_1}(B^{S_1})\Omega_{P_2}(B^{S_2}) \neq 0$, для $|z| \leqslant 1$.

В этой статье приведены несколько теоретических моделей двойной сезонной авторегрессии с дробным дифференцированием. Мы показываем коэффициенты функции двойной сезонной авторегрессии, описываем основные свойства двойного сезонного авторегрессионного процесса и предоставляем более подробный анализ поведения процесса для значений d, D_1, D_2 в указанном диапазоне.

Литература

1. Бисонгини, С. Свойства сезонных процессов с долгосрочной памятью. / С. Бисонгини С. Р. С. Лопес // Mathematical and Computer Modelling: Elsevier. 49:9 — (2009), — С. 1837–1851.

2. Садаеи, H. J. Метод краткосрочного прогнозирования нагрузки на основе нечетких временных рядов, сезонности и процессов с долгосрочной памятью. / H. J. Садаеи, F. G. Гимараес // International Journal of Approximate Reasoning: Elsevier. 83:9 — (2017), — С. 2014, 196–217.

3. Сухартоно Ли М. Н., Прогнозирование числа туристов с использованием подмножеств, мультипликативной или аддитивной сезонной модели ARIMA. / Сухартоно Ли М. Н. // Matematika: Department of Mathematical Sciences UTM, — С. 169–182.

4. Хоскинг. Моделирование устойчивости в гидрологических временных рядах с использованием дробного дифференцирования. / Хоскинг, Р. М. Джонатан // Water Resources Research: Wiley Online Library. 20:12, — С. 1898–1908.

О СЛАБОМ СВОЙСТВЕ САРДА[1]

Р.В. Дрибас (Долгопрудный, МФТИ)

dribas.rv@phystech.su

Пусть $\alpha \in (0,1)$ и $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ — $C^{1,\alpha}$-гёльдерова функция. Пусть S — критическое множество f, т.е. множество точек $x \in [0,1]^2$, в которых $\nabla f(x) = 0$.

Если f непрерывно дифференцируема, то по теореме Сарда

$$f_{\#}(\mathbf{1}_S \mathcal{L}^2) \perp \mathcal{L}^1, \tag{1}$$

где $\mathcal{L}^d$ — мера Лебега на $\mathbb{R}^d$, $\mathbf{1}_S$ — индикатор множества S, $f_{\#}\mu$ — образ меры μ под действием функции f и $\mu \perp \nu$ означает, что меры μ и ν взаимно сингулярны.

[1] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда 24-21-00315.

© Дрибас Р.В., 2025

Определение 1. *Функция f обладает ослабленным свойством Сарда, если для неё выполнено* (1).

Для $t \in \mathbb{R}$ обозначим $E_t := f^{-1}(t)$. Пусть E_t^* — объединение всех связных компонент E_t строго положительной длины (т.е. меры Хаусдорфа $\mathcal{H}^1$). Пусть $E^* := \bigcup_{t\in\mathbb{R}} E_t^*$.

Следующее определение было введено в [1]:

Определение 2. *Функция f обладает слабым свойством Сарда, если*

$$f_\#(\mathbf{1}_{S\cap E^*}\mathcal{L}^2) \perp \mathcal{L}^1. \tag{2}$$

Очевидно, что из ослабленного свойства Сарда следует слабое.

В [5] было показано, что если градиент f имеет ограниченную вариацию, то f обладает ослабленным свойством Сарда.

Кроме того, в [2] показано, что слабое свойство Сарда функции f равносильно единственности ограниченного обобщённого решения задачи Коши для уравнения неразрывности с полем $\nabla^\perp f$.

При дополнительном предположении, что f монотонна, в работе [6] было показано, что слабое и ослабленное свойства Сарда эквивалентны. В связи с этим возникает вопрос, эквивалентны ли эти свойства в общем случае.

Ранее Боникатто в работе [3] был построен пример, показывающий, что это не так в липшицевом случае. Мы показали, что эти свойства не эквивалентны даже для $C^{1,\alpha}$-гёльдеровых функций.

Теорема 1. *Для любого $\alpha \in (0,1)$ существует $f \in C^{1,\alpha}([0,1])^2$ обладающая слабым свойством Сарда, но не обладающая ослабленным.*

Точность данной теоремы гарантируется теоремой 2 в [4], которая утверждает, что $C^{1,1}$-гладкие функции обладают сильным свойством Сарда, а значит, и ослабленным свойством Сарда.

Доклад основан на совместной работе с А.С. Головнёвым и Н.А. Гусевым.

Литература

1. Alberti G. Structure of level sets and Sard-type properties of Lipschitz maps / G. Alberti, S. Bianchini, G. Crippa // Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. — 2013. — V. XII № 4 — P. 863–902

2. Alberti G. A uniqueness result for the continuity equation in two dimensions / G. Alberti, S. Bianchini, G. Crippa // J. Eur. Math. Soc. — 2011. — V. 16(2) — P. 201–234

3. Bonicatto P. Untangling of trajectories for non-smooth vector fields and Bressan's Compactness Conjecture / P. Bonicatto // PhD Thesis — 2017

4. Bates S.M. Toward a precise smoothness hypothesis in Sard's theorem / S.M. Bates // Proc. Amer. Math. Soc. — 1993. — V. 117 — P. 279–283

5. Bianchini S. Steady Nearly Incompressible Vector Fields in Two-Dimension: Chain Rule and Renormalization / S. Bianchini, N.A. Gusev // Arch. Rational Mech. Anal. — 2016. — V. 222 — P. 451–505

6. Gusev N.A. The Nelson conjecture and chain rule property / N.A. Gusev, M.V. Korobkov // URL: -https://arxiv.org/abs/2411.09338

ПРОИЗВЕДЕНИЯ РИССА НА ЕДИНИЧНОЙ СФЕРЕ[1]

Е.С. Дубцов (Санкт-Петербург, ПОМИ РАН)

dubtsov@pdmi.ras.ru

Классические произведения Рисса. Пусть $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. По определению пара (J, a) называется допустимой, если $J = \{j_k\}_{k=1}^{\infty}$, $j_k \in \mathbb{N}$, $j_{k+1}/j_k \geqslant 3$, и $a = \{a_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{D}$. Каждая допустимая пара (J, a) порождает на единичной окружности $\partial\mathbb{D}$ классическое произведение Рисса μ с помощью формулы

$$\mu = \mu(J, a) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\overline{a}_k \overline{z}^{j_k}}{2} + 1 + \frac{a_k z^{j_k}}{2} \right), \quad z \in \partial\mathbb{D},$$

где бесконечное произведение следует понимать в слабом* смысле.

Пусть m — нормированная мера Лебега на окружности $\partial\mathbb{D}$. В силу теоремы Зигмунда имеет место следующая дихотомия:

(i) если $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 < \infty$, то $\mu \ll m$ и $d\mu/dm \in L^2(\partial\mathbb{D})$;

(ii) если $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 = \infty$, то $\mu \perp m$.

Утверждение (ii) в дихотомии Зигмунда — это частный случай следующего результата Перьера [4] о взаимной сингулярности произведений Рисса.

Предложение [4]. *Пусть (J, a) и (J, b) — допустимые пары. Предположим, что $a - b \notin \ell^2$. Тогда $\mu(J, a) \perp (J, b)$.*

Произведения Рисса на сфере. Зафиксируем $n \geqslant 2$ и рассмотрим единичную сферу $S = S_n = \{\zeta \in \mathbb{C}^n : |\zeta| = 1\}$. В силу части (i) дихотомии Зигмунда для построения нетривиальных (сингулярных) аналогов произведений Рисса на сфере следует использовать

[1] Исследования выполнены за счет гранта Российского научного фонда № 23-11-00171, https://rscf.ru/project/23-11-00171/.

© Дубцов Е.С., 2025

голоморфные однородные многочлены, введенные Рылем и Войтащиком [5], либо голоморфные многочлены с подобными свойствами, см., например, [1] и [2].

Будем говорить, что $\{R_j\}_{j=1}^{\infty}$ — последовательность Рыля–Войтащика, если

- R_j — голоморфный однородный многочлен степени j,
- $\|R_j\|_{L^\infty(S)} = 1$,
- $\|R_j\|_{L^2(S)} \geqslant \delta > 0$ для всех $j = 1, 2, \ldots$.

Пусть $R = \{R_j\}_{j=1}^{\infty}$ — последовательность Рыля–Войтащика, $J = \{j_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$, $j_{k+1}/j_k \geqslant 3$, и $a = \{a_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{D}$. Тогда (R, J, a) называется тройкой Рисса.

Каждая тройка Рисса (R, J, a) порождает стандартное произведение Рисса $\Pi(R, J, a)$ с помощью формального равенства (см. [2])

$$\Pi(R, J, a) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\overline{a}_k \overline{R}_{j_k}}{2} + 1 + \frac{a_k R_{j_k}}{2} \right).$$

Пусть $\mathcal{U}(n)$ — группа унитарных операторов на гильбертовом пространстве $\mathbb{C}^n$.

Теорема 1. *Пусть (R, J, a) и (R, J, b) — тройки Рисса на единичной сфере S_n, $n \geqslant 2$. Предположим, что $a - b \notin \ell^2$. Тогда существует последовательность $U = \{U_j\}_{j=1}^{\infty}$, $U_j \in \mathcal{U}(n)$, такая что $\Pi(R \circ U, J, a)$ и $\Pi(R \circ U, J, b)$ взаимно сингулярны.*

Пусть σ_n — нормированная мера Лебега на сфере S_n.

Теорема 2. *Пусть (R, J, a) — тройка Рисса на сфере S_n, $n \geqslant 2$.*

1. Предположим, что $a \notin \ell^2$. Тогда существует последовательность $U = \{U_j\}_{j=1}^{\infty}$, $U_j \in \mathcal{U}(n)$, такая что $\Pi(R \circ U, J, a) \perp \sigma_n$.

2. Предположим, что $a \in \ell^2$. Тогда $\Pi(R, J, a) \ll \sigma_n$.

Доказательства сформулированных теорем даны в работе [3].

Литература

1. Bourgain J. Applications of the spaces of homogeneous polynomials to some problems on the ball algebra / J. Bourgain // Proc. Amer. Math. Soc. — 1985. — V. 93, № 2. — P. 277–283.

2. Doubtsov E. Henkin measures, Riesz products and singular sets / E. Doubtsov // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). — 1998. — V. 48, № 3. — P. 699–728.

3. Doubtsov E. Mutual singularity of Riesz products on the unit sphere / E. Doubtsov // Proc. Amer. Math. Soc. — 2025. — в печати.

4. Peyrière J. Étude de quelques propriétés des produits de Riesz / J. Peyrière // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). — 1975. — V. 25, № 2. — P. 127–169.

5. Ryll J. On homogeneous polynomials on a complex ball / J. Ryll, P. Wojtaszczyk // Trans. Amer. Math. Soc. — 1983. — V. 276, № 1. — P. 107–116.

О ТОЧКАХ РАВНОВЕСИЯ В БИМАТРИЧНОЙ ИГРЕ 2Х2

В.Н. Думачев, В.А. Родин, С.В. Синегубов
(Воронеж, ВИ МВД РФ)
rodin_v@mail.ru

Существование и описание равновесных ситуаций биматричной игры 2х2 хорошо исследованы (Дж.Нэш). Для каждой игры (пары матриц) применяется исследование несложных неравенств. Эти неравенства содержат 4 параметра связанных с матрицами [1].

В докладе для описания равновесных ситуаций предложен совершенно другой подход. Мы применяем в допустимых случаях вычисления частных производных от функций характеризующих средние выигрыши, а в случаях невозможности их применения проводим графический анализ. Кроме того получены общие формулы для вычисления суммы выигрыша через определители игровых матриц. В известных авторам работах указанный подход и формулы, позволяющие автоматизировать процесс решения задач равновесия, не найдены. Как приложение метод полезен для применения алгоритмов теории игр в задачах для силовых структур [2]. Напомним определения. Рассмотрим игру 2х2 заданную платежными матрицами игроков A и B

$$\begin{pmatrix} (a_1; b_1) & (a_1; b_2) \\ (a_2; b_1) & (a_2; b_2) \end{pmatrix}.$$

Средние выигрыши каждого игрока

$$H_A\,(x; y) = a_{11}xy + a_{12}x(1-y) + a_{21}(1-x)y + a_{22}(1-x)(1-y);$$

$$H_B\,(x; y) = b_{11}xy + b_{12}x(1-y) + b_{21}(1-x)y + b_{22}(1-x)(1-y).$$

Определение. Пара чисел $0 \leqslant x_0 \leqslant 1$, $0 \leqslant y_0 \leqslant 1$ определяет равновесную ситуацию, если для любых $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$ одновременно выполняются следующие неравенства:

© Думачев В.Н., Родин В.А., Синегубов С.В., 2025

$$H_A(x;y_0) \leqslant H_A(x_0;y_0), H_B(x_0;y) \leqslant H_B(x_0;y_0).$$

Для описания равновесных ситуаций мы воспользуемся структурой поверхности гиперболического параболоида. Средние выигрыши каждого игрока преобразуем к виду

$$H_A(x;y) = (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})xy + (a_{12} - a_{22})x + (a_{21} - a_{22})x + a_{22};$$

$$H_B(x;y) = (b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22})xy + (ba_{12} - b_{22})x + (ba_{21} - b_{22})x + b_{22}.$$

Введем обозначения:

$$C = a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}; \alpha = a_{22} - a_{12};$$

$$D = b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22}; \beta = a_{22} - a_{12}.$$

Теорема. *Если $CD \neq 0$, то точка равновесия $(x_0;y_0)$ определяется из решения системы*

$$\frac{d}{dx}H_A(x;y) = 0, \frac{d}{dy}H_B(x;y) = 0.$$

Средние выигрыши в точках равновесия вычисляются по формулам:

$$H_A(0;0) = a_{22}; H_B(0;0) = b_{22};$$

$$H_A(1;1) = a_{11}; H_B(1;1) = b_{11};$$

$$x_0 = \frac{\beta}{D}; y_0 = \frac{\alpha}{C};$$

$$H_A(x_0;y_0) = \frac{det(A)}{C}; H_B(x_0;y_0) = \frac{det(B)}{D}.$$

Литература

1. Родин В.А. Аналитический подход к описанию равновесных ситуаций в биматричной игре 2х2 / В.А.Родин , С.В.Синегубов // Вестник Воронежского института МВД России. — 2024.—№ 4. — С. 32-41.

2. Никитенко А. Н., Меньших Т. В. Описание типов равновесий в теоретико-игровых моделях при принятии управленческих

решений / А. Н.Никитенко , Т. В.Меньших // Актуальные проблемы деятельности подразделений уголовно-исполнительной системы : сборник материалов всероссийской научно-практической конференции. — Воронеж, 2023. —С. 372-374.

О ПЕРИОДИЧНОСТИ КОЛЕБАНИЙ УПРУГИХ СЕТОК

А.А. Дьячков, В.Л. Прядиев (Воронеж, ВГУ)
artem.dyachkov.20@mail.ru, pryad@mail.ru

Пусть Γ — связный геометрический граф (в смысле монографии [1]), γ_j, $j = \overline{1,m}$, — его рёбра, J и $\partial\Gamma$ — множества его соответственно внутренних и граничных вершин. Известно, (см., например, [2]), что если длины рёбер Γ равны 1, то решение начально-краевой задачи

$$u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t),\ x \in \Gamma,\ t > 0, \tag{1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x) \text{ и } u_t(x,0) = 0,\ x \in \overline{\Gamma}, \tag{2}$$

$$u(b,t) = 0,\ b \in \partial\Gamma,\ t \geqslant 0, \tag{3}$$

при условиях трансмиссии

$$\sum_{j|\overline{\gamma_j}\ni a} \alpha_j(a) u'_j(a,t) = 0,\ a \in J,\ t \geqslant 0, \tag{4}$$

является квазипериодичным, если все $\alpha_j(a)$ положительны и для любых внутренних вершин a и b, соединяемых ребром γ_j, $\alpha_j(a) = \alpha_j(b)$; $u'_j(a,t)$ в (4) — производная функции $u(\,\cdot\,,t)$ в точке a вдоль ребра γ_j в направлении от a. До недавнего времени известные нам примеры, когда решение задачи (1)-(4) при указанных условиях периодично, ограничивались только случаем, когда Γ — звезда, причём либо $\partial\Gamma = \varnothing$, либо $|J| = 1$ (этого достаточно для периодичности). Кроме того, если ни одно из последних двух равенств не выполняется, то уже при $m = 3$ в случае $|\partial\Gamma| \in \{1;2\}$ (и тогда $|J| > 1$) и при всех $\alpha_j(a) = 1$ решение задачи (1)-(4), вообще говоря, непериодичино. Естественно, возникает вопрос: «Не является ли условие о том, что Γ — звезда и либо $\partial\Gamma = \varnothing$, либо $|J| = 1$, не только достаточным, но и необходимым для периодичности решения задачи (1)-(4)?» Нами было обнаружено, что ответ на этот вопрос отрицателен. А именно, если $\Gamma \setminus J = \bigcup\limits_{j=1}^{3} (a; b_j)$ ($b_k \neq b_p$, при $k \neq p$) и $|a - b_j| = 1$

© Дьячков А.А., Прядиев В.Л., 2025

для $j = \overline{1,3}$, то решение задачи (1)-(4) будет периодическим, как минимум, в следующих двух случаях:

$$\partial\Gamma = \{b_2\},\ \alpha_1(a) = 2,\ \alpha_2(a) = \alpha_3(a) = 1 \tag{5}$$

$$\partial\Gamma = \{b_3\},\ \alpha_1(a) = \alpha_2(a) = 1,\ \alpha_3(a) = 2. \tag{6}$$

Ограничимся пояснением к случаю (5). Пусть $v_j(y,t) = u(yb_j + (1-y)a, t)$ и $\varphi_j(y) = \varphi(yb_j + (1-y)a)$, $j = \overline{1,3}$. Тогда $v_j(y,t) = \frac{1}{2}(\widetilde{\varphi}_j(y-t) + \widetilde{\varphi}_j(y+t))$, где $\widetilde{\varphi}_j \in C^2(\mathbb{R})$ и $\widetilde{\varphi}_j\big|_{[0;1]} = \varphi_j$, причём в силу (3) и (4) $\eta(t+n) = C^n\eta(t)$ при любых $t \in [0;1)$ и $n = \overline{0,\infty}$, где $\eta(\tau) = (\widetilde{\varphi}_1(\tau);\ \widetilde{\varphi}_2(\tau);\ \widetilde{\varphi}_3(\tau);\ \widetilde{\varphi}_1(1-\tau);\ \widetilde{\varphi}_2(1-\tau);\ \widetilde{\varphi}_3(1-\tau))^T$, а C — матрица, множество собственных значений которой есть множество всех корней 6-ой степени из -1. Последнее обстоятельство влечёт $C^{12} = E$, где E — единичная матрица, откуда вытекает 12-периодичность функции η, а значит, и 12-периодичность по t всех $v_j(y,t)$, т. е., в итоге, 12-периодичность по t решения $u(x,t)$.

Замечание. *Если в (2) условие $u_t(x,0) = 0$ заменить условием $u_t(x,0) = \psi(x)$, то при $\partial\Gamma \neq \varnothing$ решение задачи (1)-(4) будет квазипериодичным (см. [2]), а значит, и ограниченным. Но тогда и при такой замене в (2) в случаях (5) и (6) решение задачи (1)-(4) остаётся периодическим.*

Литература

1. Покорный Ю.В. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю.В. Покорный, О.М. Пенкин, В.Л. Прядиев, А.В. Боровских, К.П. Лазарев, С.А. Шабров. — М. : ФИЗМАТЛИТ, — 2004. — 272 с.

2. Копытин А.В. Некоторые вопросы теории эволюционных задач на сетях: диссертация кандидата физико - математических наук: 01.01.02 / А.В. Копытин. — Воронеж : Воронеж. гос. ун-т, — 2002. — 77 с.

ПОСТРОЕНИЕ АДАПТИВНЫХ ПРОЗРАЧНЫХ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА НА ОСНОВЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ ЛОКАЛЬНЫХ ВОЛНОВЫХ ЧИСЕЛ ВБЛИЗИ ИСКУССТВЕННОЙ ГРАНИЦЫ[1]

В.А. Егоренков, В.А. Трофимов (Москва, МГУ; Китай, Гуанчжоу, Южно-Китайский университет технологий, SCUT)
Egorenkov-v-a@cs.msu.ru

Компьютерное моделирование научных и прикладных задач, которые ставятся в неограниченной или большой физической области, требуют использования искусственных краевых условий (ИКУ) для ограничения вычислительной области. В идеале такие ИКУ должны быть неотражающими (прозрачными). Часто необходимость использовать ИКУ возникает при решении уравнения Шрёдингера, которое широко используется в разных областях науки. Одним из примеров таких задач являются задачи лазерной физики, в частности задача о распространения пучка света в линейной или нелинейной среде. Решение подобных задач, особенно в нелинейном случае, может быть крайне чувствительно к формированию ложной отраженной волны от искусственной границы, что делает вопрос о построении эффективных прозрачных ИКУ актуальной задачей.

Данный доклад посвящен построению адаптивных прозрачных краевых условий для двумерного линейного уравнения Шрёдингера, описывающего дифракцию оптических пучков. Эффективность ИКУ существенно зависит от их адаптации к решению задачи вблизи искусственной границы. Поэтому при их построении используются локальные волновые числа (ЛВЧ), которые зависят как от пространственных координат, так и от времени. Для вычисления ЛВЧ используется их аппроксимация в виде интегрального соотношения, записанного на основе инвариантов уравнения Шредингера, и решение задачи вблизи искусственной границы [1]. Это позволяет учесть изменения локальных характеристик оптического излучения из-за его дифракции.

Компьютерное моделирование показало, что эффективность рассматриваемого подхода существенно зависит от точности вычисления ЛВЧ. Как следствие этого, из-за малости амплитуды волны при ее подходе к искусственной границе необходимо вычислять ЛВЧ с

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 24-71-00031).
© Егоренков В.А., Трофимов В.А., 2025

динамическим отступом от границы и усреднять по нескольким соседним точкам, что приводит к подавлению случайных флуктуаций (ошибок округления). Данный подход аналогичен методу, применяемому при измерении сигнала со случайным шумом.

Другим важным фактором является необходимость учета обоих компонент волнового вектора (проекции ЛВЧ на оси координат) в случае наличия дифракции перечной к направлению распространения оптического пучка [2].

Для оценки влияния дифракции пучка на эффективность применения ИКУ рассматривался случай неподвижного оптического пучка. Продемонстрирована ее зависимость от шага сетки по оси, для которой ставятся ИКУ, и разности фаз волны в соседних узлах сетки вдоль данной оси вблизи искусственной границы: чем сильнее изменяется фаза, тем меньше должен быть шаг по сетке для достижения той же точности.

Для подтверждения полученных результатов компьютерного моделирования проводилось их сравнение с аналитическим решением задачи и с расчетами, проведенными в существенно расширенной области.

Литература

1. Trofimov V.A. Efficiency of using adaptive artificial boundary conditions at computer simulation of contrast spatio-temporal laser-induced structures in a semiconductor / V.A. Trofimov, M.M. Loginova, V.A. Egorenkov // Comp and Math Methods. 2021. — Vol 3, № 6. — P. e1165.

2. Trofimov V.A. Cross-impact of the beam local wavenumbers on the efficiency of self-adaptive artificial boundary conditions for 2D nonlinear Schrodinger equation / V.A. Trofimov, M.M. Loginova, V.A. Egorenkov, Y. Yang, M. Wang // Mathematical Methods in the Applied Sciences. — 2023. — Vol 46, № 15. — P. 16006–16036.

МОДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ПРОСТРАНСТВАХ ЗИГМУНДА

А.Ю. Егорова (Рязань, РГРТУ имени В. Ф. Уткина)
ayu_ egorova@mail.ru

Существование и единственность решения первой начально-краевой задачи для параболических систем в анизотропных пространствах Гёльдера $C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\bar{\Omega})$, $0 < \alpha < 1$, в областях с достаточно гладкими криволинейными границами из класса $C^{1+\alpha/2}$, хорошо известна [1, гл. 7]. Для ограниченных плоских областей с негладкими боковыми границами из пространства $H^{1/2+\omega}$ однозначная разрешимость первой краевой задачи для параболических по Петровскому систем доказана в [2]-[4].

В анизотропных пространствах Зигмунда для одного параболического уравнения второго порядка разрешимость первой начально-краевой задачи установлена в [5]. В данной работе рассматривается в модельном случае первая начально-краевая задача для параболической по Петровскому системы второго порядка с постоянными коэффициентами в анизотропных пространствах Зигмунда $H_m(\bar{D}_+)$, $m \geqslant 3$. Для того, чтобы классическое решение задачи в замыкании области принадлежало $H_m(\bar{D}_+)$, вводится дополнительное условие согласования, которое имеет разностный характер.

Рассмотрим в полуполосе $D_+ = D \cap \{x > 0\}$, где $D = \mathbb{R} \times (0,T)$, $0 < T < \infty$, с «боковой» границей $\Sigma = \bar{D} \cap \{x = 0\}$ модельную первую начально-краевую задачу для параболической по Петровскому системы второго порядка

$$Lu = \partial_t u - A\partial_x^2 u = f, \quad u|_{t=0} = \psi, \quad u|_{\Sigma} = \varphi, \tag{1}$$

где $u = (u_1,...,u_p)^T$, $f = (f_1,...,f_p)^T$, $\psi = (\psi_1,...,\psi_p)^T$, $\varphi = (\varphi_1,...,\varphi_p)^T$, $p \in \mathbb{N}$; $A = ||a_{ij}||_{i,j=1}^p$ — матрица вещественных коэффициентов системы размерности $p \times p$.

Положим $u^{(k)}(x) = \partial_t^k u(x,0)$. Для $\sigma > 1$ будем говорить, что для первой краевой задачи выполняются условия согласования порядка σ, если:

1) в случае $\sigma \notin \mathbb{N}$ выполнены соотношения $\partial_t^k \varphi|_{\Sigma} = u^{(k)}|_{\Sigma}$, $k = 1, \ldots, [\sigma]$, где $[\sigma]$ – целая часть числа σ;

© Егорова А.Ю., 2025

2) в случае $\sigma \in \mathbb{N}$ выполнены соотношения $\partial_t^k \varphi|_\Sigma = u^{(k)}|_\Sigma$, $k = 1, \ldots, \sigma - 1$, и для $\sigma \geqslant 2$

$$K_\sigma = \sup_{0<t\leqslant T} t^{-1} |\overline{\Delta}_t \partial_t^{\sigma-1} \varphi(0) - A\Delta^2_{t^{1/2}} u^{(\sigma-1)}(0,0) - \overline{\Delta}_t \partial_t^{\sigma-2} f(0,0)| < \infty,$$

где $\overline{\Delta}_t \varphi(0) = \varphi(t) - \varphi(0)$, $\overline{\Delta}_t f = f(0,t) - f(0,0)$, $\Delta^2_{t^{1/2}} u^{(\sigma-1)}(0,0) = u^{(\sigma-1)}(2t^{1/2}, 0) - 2u^{(\sigma-1)}(t^{1/2}, 0) + u^{(\sigma-1)}(0,0)$ и K_σ — константа согласования. Для $\sigma \notin \mathbb{N}$ полагаем $K_\sigma = 0$.

Теорема 1. *Пусть $m \in \mathbb{N}$, $f \in H_m\left(\bar{D}_+\right)$, $\psi \in H_{m+2}\left(\bar{\mathbb{R}}_+\right)$, $\varphi \in H_{m+2}(\Sigma)$, и выполнены условия согласования порядка $(m+2)/2$. Тогда существует единственное классическое решение $u \in H_{m+2}\left(\bar{D}_+\right)$ первой краевой задачи (1) и справедливо неравенство*

$$|u|_{m+2,D_+} \leqslant C\left(|f|_{m,D_+} + |\psi|_{m+2,\mathbb{R}_+} + |\varphi|_{m+2,\Sigma} + K_{(m+2)/2}\right).$$

Литература

1. Ладыженская О. А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О.А. Ладыженская, В.А. Солонников, Н.Н. Уральцева. — М. : Наука, 1967. — 736 с.

2. Бадерко Е. А. Единственность решения первой начально-краевой задачи для параболической системы с дифференцируемыми коэффициентами в полуполосе с негладкой боковой границей/ Е.А. Бадерко, С.И. Сахаров // Дифференциальные уравнения. — 2021. — Т. 57. — № 5. — С. 625–631.

3. Бадерко Е. А. О единственности первой и второй начально-краевых задач для параболических систем в ограниченных областях на плоскости / Е.А. Бадерко, М.Ф. Черепова // Дифференциальные уравнения. — 2021. — Т. 57. — № 8. — С. 1039–1048.

4. Бадерко Е. А. Об однозначной разрешимости начально-краевых задач для параболических систем в ограниченных плоских областях с негладкими боковыми границами / Е. А. Бадерко, С. И. Сахаров // Дифференциальные уравнения. — 2023. — Т. 59. — № 5. — С. 608–618.

5. Коненков А. Н. Решение модельных задач теплопроводности в пространствах Зигмунда / А.Н. Коненков // Дифференциальные уравнения. — 2008. — Т. 44. — № 10. — С. 1388–1398.

О СИСТЕМАХ ФУНКЦИЙ, ОРТОГОНАЛЬНЫХ ВМЕСТЕ СО СВОИМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

М.Л. Жаданова (Воронеж, ВГУ)
masha.minina97@mail.ru

Система функций

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}, k \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

образующая ортонормированный базис в пространстве $L_2(-\pi, \pi)$ обладает следующим свойством: производные этих функций $\varphi_k'(x)$ также попарно ортогональны

$$(\varphi_k', \varphi_m') = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_k'(x) \cdot (\varphi_m'(x))^* dx = 0, k \neq m. \tag{2}$$

Здесь $(\varphi_m'(x))^*$ — комплексное сопряжение к функции $\varphi_m'(x)$. То же самое справедливо и для системы функций

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin kx, k \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

В обоих случаях будем говорить, что (1) и (3) — это тригонометрические базисы. Именно свойство (2) является одной из причин широкого применения тригонометрических систем функций в математической физике [1].

В настоящей работе показывается, что для периодических гладких функций свойство (2) является определяющим, т.е. ему удовлетворяют только тригонометрические базисы.

Теорема. *Пусть система функций $\varphi_k(x)$, $k \in \mathbb{Z}$, образует ортонормированный базис в $L_2(-\pi, \pi)$, все функции дважды непрерывно дифференцируемы на отрезке $[-\pi, \pi]$, удовлетворяют условию (2) и периодическим краевым условиям*

$$\varphi_k(-\pi) = \varphi_k(\pi), \varphi_k'(-\pi) = \varphi_k'(\pi). \tag{4}$$

Тогда $\varphi_k(x)$ — это тригонометрический базис.

Доказательство. Рассмотрим скалярное произведение

$$(\varphi_k'', \varphi_m) = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_k''(x) \cdot (\varphi_m(x))^* dx =$$

© Жаданова М.Л., 2025

$$= \varphi_k'(x) \cdot (\varphi_m(x))^* \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi_k'(x) \cdot (\varphi_m'(x))^* dx = 0, k \neq m.$$

Следовательно,

$$\varphi_k''(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (\varphi_k'', \varphi_m)\varphi_m(x) = (\varphi_k'', \varphi_k)\varphi_k(x).$$

Обозначив $(\varphi_k'', \varphi_k) = -\lambda_k$, получим задачу на собственные функции

$$\varphi_k''(x) + \lambda_k \varphi_k(x) = 0$$

с краевыми условиями (4). Хорошо известно, что нетривиальные решения данной задачи получаются при условии $\lambda_k = k^2$, а нормированные собственные функции образуют системы (1) или (3). Теорема доказана.

Так как каждому $\lambda_k \neq 0$ отвечают две линейно независимые собственные функции, то тригонометрический базис получается с точностью до ортогональных преобразований всех таких пар.

Данная теорема легко обобщается на случай произвольного отрезка $[-\ell, \ell]$ и для непериодических однородных краевых условий.

Литература

1. Владимиров В.С. Уравнения математической физики / В.С. Владимиров, В.В. Жаринов. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 400 с.

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ ДИНИ[1]

И.В. Женякова, М.Ф. Черепова (Москва, НИУ «МЭИ»)
zheniakovaiv@mpei.ru, cherepovamf@mpei.ru

В слое $D = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in \mathbb{R}^n, 0 < t < T\}$, $0 < T < +\infty$, задан равномерно-параболический оператор

$$Lu = \partial_t u - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\partial_{ij}u + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)\partial_i u + b_0(x,t)u,$$

[1] Результаты получены в рамках выполнения государственного задания (проект FSWF-2023-0012).

© Женякова И.В., Черепова М.Ф., 2025

где $\partial_i = \partial/\partial x_i$, $\partial_{ij} = \partial^2/\partial x_i \partial x_j$. Предполагаем, что вещественные коэффициенты оператора L определены в $\overline{D}$ и удовлетворяют следующим условиям:

а) $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\sigma_i\sigma_j \geqslant \delta|\sigma|^2$ для некоторого $\delta > 0$ и всех $(x,t) \in \overline{D}$, $\sigma \in \mathbb{R}^n$;

б) функции a_{ij}, b_i, b_0, $i,j = 1,..,n$, ограничены в $\overline{D}$;

в) $|\Delta_{x,t} a_{ij}(x,t)| \leqslant \omega_0(|\Delta x| + |\Delta t|^{1/2})$, (x,t), $(x+\Delta x,\ t+\Delta t) \in \overline{D}$, $i,j = 1,...n$, где ω_0 — модуль непрерывности, удовлетворяющий двойному условию Дини и для некоторого $\varepsilon_0 \in (0,1)$ функция $\omega_0(z)z^{-\varepsilon_0}$, $z > 0$, почти убывает (см. определения в [1]).

г) $|\Delta_{x,t} b_i(x,t)| \leqslant \omega_1(|\Delta x| + |\Delta t|^{1/2})$, (x,t), $(x+\Delta x,\ t+\Delta t) \in \overline{D}$, $i = 0,1,...n$, где модуль непрерывности ω_1 удовлетворяет условию Дини.

В D рассмотрим задачу Коши

$$Lu = f \text{ в } D,\ u(x,0) = h \text{ в } \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

Предполагаем, что для функций f и h выполнены следующие условия:

1) f непрерывна в D и конечна величина

$$\|f;D\|_{\omega_2} = \sup_D \frac{t^{1/2}|f(x,t)|}{\omega_2(t^{1/2})},$$

где ω_2 — модуль непрерывности такой, что для некоторого $\epsilon \in (0,1)$ функция $\omega_2(z)z^{-\varepsilon}$, $z > 0$, почти убывает;

2) f локально Дини-непрерывна по x в D с модулем непрерывности, удовлетворяющим условию Дини;

3) h непрерывна и ограничена в $\mathbb{R}^n$ вместе с производными $\partial_i h$, $i = 1,...,n$, и конечна величина

$$\|h;\mathbb{R}^n\|^{1,\omega_3} = \sup_{\mathbb{R}^n}|h(x)| + \sum_{i=1}^{n}\sup_{\mathbb{R}^n}|\partial_i h(x)| + \sum_{i=1}^{n}\sup_{\mathbb{R}^n}\frac{|\partial_i h(x+\Delta x) - \partial_i h(x)|}{\omega_3(|\Delta x|)}.$$

Здесь ω_3 — некоторый модуль непрерывности.

Пусть ω — модуль непрерывности. Обозначим через $H^{1,\omega}(\overline{D})$ пространство функций $u : \overline{D} \to \mathbb{R}$, непрерывных и ограниченных в $\overline{D}$ вместе с производными $\partial_i u$, $i = 1,...,n$, с нормой

$$\|u;D\|^{1,\omega} = \sup_D|u(x,t)| + \sum_{i=1}^{n}\sup_D|\partial_i u(x,t)| + \sup_D\frac{|\Delta_t u(x,t)|}{|\Delta t|^{1/2}\omega(|\Delta t|^{1/2})} +$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sup_{D}\frac{|\Delta_{x,t}\partial_i u(x,t)|}{\omega(|\Delta x|+|\Delta t|^{1/2})}.$$

Теорема. *Пусть для коэффициентов оператора L выполнены условия а)-г). Тогда для любых функций f и h, удовлетворяющих условиям 1)-3), существует классическое решение задачи (1), причем $u \in H^{1,\omega}(\overline{D})$, $\omega = \omega_2 + \omega_3$, и справедлива оценка*

$$\|u; D\|^{1,\omega} \leqslant C\Bigg(\|f; D\|_{\omega_2} + \|h; \mathbb{R}^n\|^{1,\omega_3}\Bigg).$$

Единственность классического решения задачи (1) следует из принципа максимума (см., например, [2]).

Литература

1. Zhenyakova, I.V. The Cauchy Problem for a Multi-Dimensional Parabolic Equation with Dini-Continuous Coefficients /I.V. Zhenyakova, M.F. Cherepova // Journal of Mathematical Sciences. 2022. Vol. 264. № , pp. 581–602.

2. Ильин, А.М. Линейные уравнения второго порядка параболического типа. /А.М. Ильин, А.С. Калашников, О.А. Олейник // УМН. 1962. Т. 17. Вып. 3 (105), С. 3–146.

СТОХАСТИЧЕСКАЯ ЛИНЕЙНАЯ СИСТЕМА ОСКОЛКОВА С МНОГОТОЧЕЧНЫМ НАЧАЛЬНО-КОНЕЧНЫМ УСЛОВИЕМ[1]

С.А. Загребина, Т.Г. Сукачева

(Челябинск, ЮУрГУ; Великий Новгород, НовГУ)

zagrebinasa@susu.ru, tamara.sukacheva@novsu.ru

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞. В цилиндре $\Omega \times \mathbb{R}$ рассмотрим систему уравнений

$$(1 - æ\nabla^2)v_t = \nu\nabla^2 v - (v \cdot \nabla)v - \nabla p + f, \quad \nabla \cdot v = 0, \tag{1}$$

моделирующую динамику скорости $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, $v_k = v_k(x,t)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, и давления $p = p(x,t)$, $(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$, вязкоупругой

[1] Публикация подготовлена в рамках проекта *Математическое моделирование природных процессов* (государственное задание в сфере научной деятельности), исследование поддержано грантом РНФ № 24-11-20037 (https://rscf.ru/project/24-11-20037) и Челябинской области.

© Загребина С.А., Сукачева Т.Г., 2025

несжимаемой жидкости. Здесь параметр $\nu \in \mathbb{R}_+$ характеризует вязкие, а параметр $\ae \in \mathbb{R}$ – упругие свойства жидкости. Прообразом такой жидкости являются высокопарафиновые сорта нефти, добываемые, в частности, на месторождениях Западной Сибири. Систему (1) впервые получил и исследовал А.П. Осколков [1]. Поэтому впоследствии она получила название *система Осколкова.*

А.П.Осколковым и его учениками доказана однозначная разрешимость различных начально-краевых задач для системы (1) и разнообразных ее обобщений при *положительных значениях* параметра $\ae$ в ограниченных и неограниченных областях пространства $\mathbb{R}^n$, $n \in \{2,3,4\}$. Соответствующие уравнения в специальным образом построенных пространствах могут быть редуцированы к абстрактной модели $L\dot{u} = Mu + N(u)$, где L, M — линейные, а N — нелинейный операторы.

Рассмотрим линейную абстрактную модель $L\dot{u} = Mu + f$, в банаховых пространствах $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$, причем операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ (т.е. линеен и непрерывен), $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ (т.е. линеен, замкнут и плотно определен). Пусть оператор M (L,p)-ограничен [2], причем его L-спектр удовлетворяет условию [3]

$$\sigma^L(M) = \bigcup_{j=0}^{m} \sigma_j^L(M),\ m \in \mathbb{N},\ \text{причем}\ \sigma_j^L(M) \neq \varnothing,\ \text{существует}$$
$$\text{замкнутый контур}\ \gamma_j \subset \mathbb{C},\ \text{ограничивающий область}\ D_j \supset \sigma_j^L(M),$$
$$\text{такой, что}\ \overline{D_j} \cap \sigma_0^L(M) = \varnothing,\ \overline{D_k} \cap \overline{D_l} = \varnothing\ \text{при всех}$$
$$j,k,l = \overline{1,m}, k \neq l.$$

Тогда при $j = \overline{0,m}$ существуют проекторы

$$P_j = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_j} R_\mu^L(M)d\mu \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}); \quad Q_j = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_j} L_\mu^L(M)d\mu \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}).$$

Рассмотрим линейное стохастическое уравнение $L \overset{\circ}{\eta} = M\eta + N\omega$, где $\eta = \eta(t)$ — искомый, а $\omega = \omega(t)$ — заданный стохастический $\mathbf{K}$-процесс, с многоточечным начально-конечным условием

$$\lim_{t\to 0+} P_0(\eta\,(t) - \xi_0) = 0, \quad P_j(\eta(\tau_j) - \xi_j) = 0, \quad j = \overline{1,m}.$$

Работа состоит из трех частей. В первой части строятся пространства дифференцируемых случайных процессов со значениями в сепарабельном гильбертовом пространстве. Причем под производной понимается производная Нельсона – Гликлиха. Случайные процессы, имеющие производные Нельсона – Гликлиха, мы называем дифференцируемыми «шумами». Во второй части представлены результаты о разрешимости стохастической задачи при условии (L,p)-ограниченности оператора M, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, и условии, гарантирующем существование относительно спектральных проекторов P_j, $j = \overline{0,n}$. В третьей части содержатся приложения абстрактных результатов к линейной стохастической системе Осколкова [3].

Литература

1. Осколков А.П. О разрешимости в целом первой краевой задачи для одной квазилинейной системы 3-го порядка, встречающейся при изучении движения вязкой жидкости / А.П. Осколков // Записки науч. сем. ЛОМИ. — 1972. — Т. 27. — С. 145–160.

2. Свиридюк Г.А. К общей теории полугрупп операторов / Г.А. Свиридюк // Успехи мат. наук. — 1994. — Т. 49, № 4. — С. 45–74.

3. Sukacheva T. G. Analysis of the stochastic Oskolkov system with a multipoint initial-final value condition / T. G. Sukacheva, S.A. Zagrebina // GSA (Global and Stochastic Analysis). — V.11, issue 4. — P. 166–177.

САМОПОДОБНЫЕ СПЛАЙНЫ[1]

Т.И. Зайцева (Москва, МГУ)

zaitsevatanja@gmail.com

Рассмотрим растягивающую целочисленную матрицу $M \in \mathbb{Z}^{n\times n}$, т.е. её собственные значения больше единицы по модулю. Решётку $\mathbb{Z}^n$ можно разбить на $m = |\det M|$ классов эквивалентности $y \sim x \Leftrightarrow y - x \in M\mathbb{Z}^n$. Выберем по представителю $d_i \in \mathbb{Z}^n$ из каждого класса эквивалентности, полученное множество назовём *набором цифр*: $D(M) = \{d_i : i = 0, \dots, m-1\}$.

Определение 1. *Тайл $G(M,D)$, порождённый растягивающей матрицей $M \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ и набором цифр $D(M) = \{d_i : i = 0, \dots, m-1\}$ — это множество $G = \{\sum_{k=1}^{\infty} M^{-k} s_k : s_k \in D(M)\}$, если оно имеет меру Лебега один.*

Тайлы рассматривались в литературе в связи с приложениями в теории аппроксимации и алгоритмах геометрического моделирования (алгоритмы SubD) [1]. В частности, на основе любого тайла можно построить многомерную систему всплесков Хаара с $m-1$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда развития теоретической физики и математики «Базис» (стипендия №21-8-10-8-1).

© Зайцева Т.И., 2025

порождающей функцией. В общем случае $G(M, D)$ может иметь целочисленную меру. Тайлы всегда компакты и самоподобны, их целые сдвиги $\{G+k\}_{k\in\mathbb{Z}^n}$ замощают всё $\mathbb{R}^n$ в один слой [2].

По аналогии с кардинальными B-сплайнами на отрезке, рассмотрим определение тайловых B-сплайнов.

Определение 2. *Тайловый B-сплайн $B_\ell^G = \chi_G * \cdots * \chi_G$ определяется как ℓ свёрток характеристической функции тайла G.*

Масштабирующим уравнением с матричным растяжением называется разностное уравнение вида $\varphi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} c_k\,\varphi(Mx-k)$, где $x\in\mathbb{R}^n$. Из определения следует, что тайловые B-сплайны являются решениями масштабирующих уравнений.

Каждое масштабирующее уравнение порождает алгоритм геометрического моделирования (subdivision scheme, алгоритм SubD). Это итеративный линейный алгоритм. Его входными данными являются значения функции на «грубой» решётке, к которой на каждом шаге добавляются подразделением новые точки. Новые значения функции в регулярных точках при этом считаются по линейным соотношениям с коэффициентами из масштабирующего уравнения. Если схема сходится, в пределе получится некоторая непрерывная функция / поверхность. Благодаря простоте применения и скорости работы алгоритм активно используется, например, в компьютерной мультипликации для генерации персонажей. Так, в 2005 году алгоритмы SubD получили кинематографическую премию Оскар за технический вклад в мультипликацию. Гладкость полученной поверхности для регулярных точек совпадает с гладкостью масштабирующего уравнения, поэтому интересны масштабирующие уравнения с высокой гладкостью. Данная работа посвящена поиску таких уравнений среди тайловых B-сплайнов.

Применим для вычисления показателей гладкости тайловых B-сплайнов соответствующий аппарат для масштабирующих уравнений. Мы используем недавнее обобщение методов типа Литтлвуда-Пэли на случай произвольной матрицы, чтобы найти гладкость по Соболеву. Известно, что показатель гладкости по Соболеву совпадает с гладкостью по Гёльдеру в пространстве L_2. Ранее этот метод был получен лишь для изотропных матриц (подобных ортогональной, умноженной на число). Формула в общем случае достаточно сложна, однако, при $m < 6$ можно показать, что можно пользоваться «простой» версией.

Некоторые из тайловых B-сплайнов удивительным образом имеют большую гладкость, чем классические B-сплайны того же порядка. Такие сплайны, соответствующие тайлы и алгоритмы SubD назовём сверхгладкими. На основе вспомогательных результатов о тайловых B-сплайнов, получен следующий результат.

Теорема 1. *Существует не менее 20 различных сверхгладких алгоритмов SubD на основе сплайнов двух переменных с числом цифр не более пяти, где мы отождествляем те тайлы, которые дают одинаковую гладкость у сплайнов..*

Теорема 1 конструктивна, все семейства найдены в явном виде. Мы также предполагаем, что число 20 точное. Таким образом, на основе найденных сверглвдких сплайнов получены новые эффективные алгоритмы SubD.

Литература

1. Charina M. Multiple multivariate subdivision schemes: Matrix and operator approaches / Charina M., Mejstrik T. // Comp. Appl. Math. — 2019. T. 349. — C. 279–291.

2. Gröchenig K. Self-similar lattice tilings / Gröchenig K., Haas A. // J. Fourier Anal. Appl. — 1994. — T. 1. — C. 131–170.

О ПОЛУГРУППАХ, ПОРОЖДЕННЫХ КВАДРАТИЧНО ИНТЕГРИРУЕМЫМИ БЕЗДИВЕРГЕНТНЫМИ ВЕКТОРНЫМИ ПОЛЯМИ[1]

К.Ю. Замана (Долгопрудный, МФТИ)
zamana.kyu@phystech.edu

Пусть $\boldsymbol{v} \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^d)$ — бездивергентное (т.е. $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$ в смысле обобщенных функций) векторное поле. Оно порождает линейный оператор $A_0\colon L^2(\mathbb{R}^d) \supset D(A_0) \to L^2(\mathbb{R}^d)$ с областью определения $D(A_0) = C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, действующий по формуле

$$A_0\rho = \boldsymbol{v} \cdot \nabla\rho \quad \forall \rho \in D(A_0) = C_c^\infty(\mathbb{R}^d). \tag{1}$$

Поскольку $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$, то оператор A_0 кососимметричен, а сопряженный к нему оператор имеет вид

$$A_0^*\rho = -\operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v}) \quad \forall \rho \in D(A_0^*) = \{\rho \in L^2(\mathbb{R}^d) \ : \ \operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v}) \in L^2(\mathbb{R}^d)\}.$$

В [1] (см. также [2]) Нельсоном была высказана гипотеза, что если поле $\boldsymbol{v}$ лежит в $L^2(\mathbb{R}^d)$ и имеет компактный носитель, то оператор

[1] Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 24-21-00315).

© Замана К.Ю., 2025

(1) является существенно кососопряженным, т.е. его замыкание $A = \overline{A_0}$ совпадает с $-A_0^* = -A^*$. Если это так, то по теореме Стоуна оператор $-A$ порождает c_0-группу унитарных операторов на $L^2(\mathbb{R}^d)$, разрешающую уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho(t,x)}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho(t,x)\boldsymbol{v}(x)) = 0 \tag{2}$$

при любом начальном условии из $L^2(\mathbb{R}^d)$ при всех значениях $t \in \mathbb{R}$, причем эти решения единственны в классе $C(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^d))$ и сохраняют L^2-норму начального условия.

Контрпример к этой гипотезе для $d \geqslant 3$ был построен Айзенманом в [2]. Кроме того, как было показано в [3], существует такое бездивергентное векторное поле $\boldsymbol{v} \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ с компактным носителем, для которого уравнение (2) имеет ненулевое решение в классе $L^\infty(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^2))$ с нулевым начальным условием. Хотя это еще не противоречит напрямую гипотезе при $d = 2$, но ставит ее справедливость под сомнение и в этом случае.

В связи с этим возникает необходимость в исследовании связи между существенной кососопряженностью оператора A_0 и существованием и единственностью обобщенных решений уравнения (2) в классе $L^\infty(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^d))$. Для случая ограниченного поля $\boldsymbol{v}$ такие исследования проводились в [4] с использованием так называемого свойства ренормализации. В рамках данного исследования будем говорить, что поле $\boldsymbol{v}$ обладает свойством ренормализации в классе $L^\infty(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^d))$, если для всякого решения ρ уравнения (2) этого класса и для всякой функции $\beta \in C^1(\mathbb{R})$, такой что $\beta' \in L^\infty(\mathbb{R})$ и $\beta(0) = 0$, функция $\beta \circ \rho$ тоже является решением уравнения (2).

Настоящее исследование использует идеи работы [4] и распространяет ее результаты на случай квадратично интегрируемого поля $\boldsymbol{v}$ с компактным носителем. Основным результатом является следующая

Теорема 1. *Пусть $\boldsymbol{v} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ — бездивергентное векторное поле с компактным носителем, A_0 — порождаемый этим полем по формуле (1) оператор. Тогда следующие условия эквивалентны:*

а) поле $\boldsymbol{v}$ удовлетворяет свойству ренормализации в классе $L^\infty(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^d))$;

б) у уравнения (2) существует единственное обобщенное решение в классе $L^\infty(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^d))$ при любом начальном условии из $L^2(\mathbb{R}^d)$;

в) оператор A_0 существенно кососопряжен.

Доклад основан на совместной работе с Н.А. Гусевым, М.В. Коробковым и Е.Ю. Пановым.

Литература

1. Nelson E. Les ecoulements incompressibles d'energie finie / E. Nelson // Colloques internat. Centre nat. rech. sci. — 1962. — № 117. — P. 159–165.

2. Aizenman M. On Vector Fields as Generators of Flows: A Counterexample to Nelson's Conjecture / M. Aizenman // Annals of Math. — 1978. — V. 107, № 2. — P. 287–296.

3. Alberti G. A uniqueness result for the continuity equation in two dimensions / G. Alberti, S. Bianchini, G. Crippa // Journal of the European Mathematical Society. — 2014. — V. 16, № 2. — P. 201–234.

4. Panov E.Yu. On one criterion of the uniqueness of generalized solutions for linear transport equations with discontinuous coefficients / E.Yu. Panov // arXiv.org. — 2015. — URL: https://arxiv.org/abs/1504.00836. — 27 p.

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ И АНТИПЕРИОДИЧЕСКИМИ УСЛОВИЯМИ

А.А. Зверев, С.А. Шабров (Воронеж, ВГУ)
InoplaneTemin@rambler.ru

Применяя концепцию поточечного подхода, предложенного Ю.В. Покорным (см., например, [1]), проведено исследование краевых задач с негладкими решениями, периодическими и антипериодическими краевыми условиями. Изучаемые задачи имеют вид

$$\begin{cases} -(pu')(x) + \int\limits_0^x u dQ = F(x) - F(0) - (pu')(0) \\ u(0) = u(l), \\ u'(0) = u'(l), \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} -(pu')(x) + \int\limits_0^x u dQ = F(x) - F(0) - (pu')(0) \\ u(0) = -u(l), \\ u'(0) = -u'(l). \end{cases} \tag{2}$$

Предполагается, что функции $p(x)$, $F(x)$ имеют ограниченную вариацию на $[0, l]$, причем $\inf\limits_{[0,l]} p(x) > 0$, $p(0) = p(l)$; функция $Q(x)$

© Зверев А.А., Шабров С.А., 2025

строго возрастает на $[0,l]$; функции $p(x)$, $Q(x)$, $F(x)$ являются непрерывными в точках $x=0$ и $x=l$. Решения задач (1) и (2) мы ищем в классе абсолютно-непрерывных функций, производные которых имеют ограниченную вариацию на $[0,l]$.

В [2] установлены условия единственности решений задач (1) и (2). В работе [3] получена формула представления решения задачи (1) в явном виде. Также была получена формула представления решения задачи (2).

Теорема 1. *Обозначим через* $u_1(x,\lambda)$ *решение задачи*

$$\begin{cases} -(pu')(x)+\int\limits_0^x udQ = F_0(x)-F_0(0)+\psi(\lambda)(F_1(x)-F_1(0))-(pu')(0), \\ u(0)=u(l), \\ u'(0)=u'(l), \end{cases}$$

пусть $u_2(x,\lambda)$ — *решение задачи*

$$\begin{cases} -(pu')(x)+\int\limits_0^x udQ = F_0(x)-F_0(0)+\psi(\lambda)(F_1(x)-F_1(0))-(pu')(0), \\ u(0)=-u(l), \\ u'(0)=-u'(l), \end{cases}$$

где функции $F_0(x)$, $F_1(x)$ *имеют ограниченную вариацию на* $[0,l]$. *Тогда если функция* $\psi(\lambda)$ *непрерывна по* λ, *то* $u_1(x,\lambda)$ *и* $u_2(x,\lambda)$ *непрерывно зависят от* λ *по норме пространства* $C[0,l]$.

Кроме того, рассмотрены спектральные задачи

$$\begin{cases} -(pu')(x)+\int\limits_0^x udQ = \lambda\int\limits_0^x udM-(pu')(0) \\ u(0)=u(l), \\ u'(0)=u'(l), \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} -(pu')(x)+\int\limits_0^x udQ = \lambda\int\limits_0^x udM-(pu')(0) \\ u(0)=-u(l), \\ u'(0)=-u'(l), \end{cases} \tag{4}$$

где функция $M(x)$ строго возрастает на $[0,l]$.

Теорема 2. *Спектр задач (3) и (4) не более чем счетен, состоит из собственных значений, причем, единственно возможная точка сгущения есть бесконечность.*

Литература

1. Покорный Ю.В. Интеграл Стилтьеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях / Ю.В. Покорный // Доклады РАН. — 1999. — Т. 364, № 2. —С. 167–169.

2. Шабров С.А. О математических моделях второго порядка с производными по мере и периодическими и антипериодическими условиями / С.А. Шабров, Т.В. Гридяева, Ф.В. Голованева, М.Б. Давыдова // Вестник ВГУ. Сер. : Физика. Математика. — 2023. — № 1. — С. 94–101.

3. Зверев А.А. Об интегральной обратимости краевой задачи с периодическими условиями и негладкими решениями / А.А. Зверев, С.А. Шабров, Ф.В. Голованева, П.В. Садчиков // Вестник ВГУ. Сер. : Физика. Математика. — 2024. — № 1. — С. 24–38.

АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИЯ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ДЕФОРМАЦИЯХ РАЗРЫВНОЙ СТИЛТЬЕСОВСКОЙ СТРУНЫ[1]

М.Б. Зверева, М.И. Каменский, С.А. Шабров
(Воронеж, ВГУ, ВГПУ)
margz@rambler.ru

В работе строится алгоритм нахождения приближенного решения краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения

$$-(pu'_\mu)(x) + (pu'_\mu)(0) + \int\limits_0^x u\,d[Q] = F(x) - F(0) \qquad (1)$$

с краевыми условиями

$$u(0) = 0, \qquad (2)$$

$$-p(l)u'_\mu(l) \in N_{[-m,m]}(u(l)), \qquad (3)$$

где $N_{[-m,m]}(u(l))$ — внешний нормальный конус в точке $u(l)$. Такая задача моделирует малые деформации разрывной стилтьесовской струны под воздействием внешней силы с установленным ограничителем на перемещение правого конца (см. [1]).

Зафиксируем произвольное число $h > 0$. Заменим всякую точку ξ разрыва возрастающей на $[0, l]$ функции $\mu(x)$ (в случае, когда

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда в рамках научного проекта № 22-71-10008.

© Зверева М.Б., Каменский М.И. Шабров С.А., 2025

множество точек разрыва бесконечно возьмем точки ξ, в которых скачок $\Delta\mu(\xi) \geqslant 0.5h$) парой $\{\xi-0, \xi+0\}$ и обозначим полученное множество через $\overline{[0,l]}_\mu$. Выберем на $\overline{[0,l]}_\mu$ точки x_i^* непрерывности $\mu(x)$ так, чтобы на каждом промежутке $[0,\xi_1-0]$, $[\xi_1+0,\xi_2-0]$, ... $[\xi_n+0,l]$ выполнялись неравенства $\mu(x_{i+1}^*)-\mu(x_i^*)<h$. Таким образом, мы получили разбиение множества $\overline{[0,\ell]}_\mu$. Перенумеруем точки, входящие в разбиение, как $0=x_0<x_1<...x_N=l$. Определим базисные функции $\varphi_k(x)$, где $k=1,...N-1$, следующим образом:

$$\varphi_k(x)=\begin{cases}\dfrac{\mu(x)-\mu(x_{k-1})}{\mu(x_k)-\mu(x_{k-1})}, & \text{если } x\in[x_{k-1},x_k]\\ \dfrac{\mu(x_{k+1})-\mu(x)}{\mu(x_{k+1})-\mu(x_k)}, & \text{если } x\in[x_k,x_{k+1}]\\ 0, \ \text{если } x\notin[x_{k-1},x_{k+1}]\end{cases}$$

Также определим базисную функцию

$$\varphi_N(x)=\begin{cases}\dfrac{\mu(x)-\mu(x_{N-1})}{\mu(l)-\mu(x_{N-1})}, & x\in[x_{N-1},l],\\ 0, \ \text{для остальных } x.\end{cases}$$

Обозначим через u_p приближенное решение краевой задачи для уравнения (1) с краевым условием (2) и краевым условием

$$p(l)u'_\mu(l)=0, \tag{5}$$

найденное методом конечных элементов как линейная комбинация базисных функций $\varphi_k(x)$ $(k=1,2,\ldots,N)$. Пусть w_p — приближенное решение задачи

$$\begin{cases}-(pw'_\mu)(x)+(pw'_\mu)(0)+\int\limits_0^x w\,d[Q]=0,\\ w(0)=0,\\ p(l)w'_\mu(l)=1,\end{cases}$$

найденное методом конечных элементов.

Для нахождения приближенного решения u_h задачи (1), (2), (3) будем применять следующий алгоритм:

1. Находим приближенное решение u_p задачи (1), (2), (5). Если окажется, что $|u_p(l)|<m$, то полагаем, что $u_h=u_p$.
2. Если $u_p(l)\geqslant m$, то полагаем $u_h=\dfrac{m-u_p(l)}{w_p(l)}w_p+u_p$.

3. Если $u_p(l) \leqslant -m$, то полагаем $u_h = \dfrac{-m - u_p(l)}{w_p(l)} w_p + u_p$.

Обозначим $\langle \varphi, \psi \rangle = \int\limits_0^l p\varphi'_\mu \psi'_\mu d\mu + \int\limits_0^l \varphi\psi d[Q]$.

Теорема 1. *Пусть $u(x)$ — точное решение задачи (1), $u_h(x)$ — приближенное решение, найденное по указанному выше алгоритму. Тогда*

$$\langle u - u_h, u - u_h \rangle \leqslant Ch,$$

где константа C не зависит от h.

Литература

1. Zvereva M. The deformations problem for the Stieltjes strings system with a nonlinear condition / M. Zvereva, M. Kamenskii, P. Raynaud de Fitte, Ch. - F. Wen // Journal of Nonlinear and Variational Analysis. —2023. — V.7, iss. 2. —P. 291–308.

О СВОЙСТВАХ π-ИНТЕГРАЛА

М.Б. Зверева, Д.Е. Марфин,
А.К. Ютишев, С.А. Шабров (Воронеж, ВГУ)
shaspoteha@mail.ru

В 1999 году Юлием Витальевичем Покорным в работе [1] был введен π-интеграл следующим образом. Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют конечное на $[0;\ell]$ изменение. Положим

$$\int\limits_0^\ell u\, d\,[v] = uv\Big|_0^\ell - \int\limits_0^\ell v\, du, \qquad (1)$$

где $uv\Big|_0^\ell = u(\ell)v(\ell) - u(0)v(0)$ и интеграл в правой части равенства (1) понимается по Лебегу-Стилтьеса. Квадратные скобки мы поставили, чтобы отличать его от обычного интеграла. Пусть $v_0(x)$ непрерывная составляющая функции $v(x)$ и $s(v)$–множество точек разрыва функции $v(x)$.

© Зверева М.Б., Марфин Д.Е., Ютишев А.К., Шабров С.А., 2025

Теорема 1. *Если π-интеграл существует, то он может быть вычислен следующим образом*

$$\int\limits_0^\ell u\,d\,[v] = \int\limits_0^\ell u\,dv_0 +$$
$$+ \sum_{s\in S(v):0<s\leqslant\ell} u\,(s-0)\,\Delta^- v(s) + \sum_{s\in S(v):0\leqslant s<\ell} u\,(s+0)\,\Delta^+ v(s), \quad (2)$$

где $u\,(s-0)$ и $u\,(s+0)$ — левое и правое предельное значение функции $u(x)$ в точке s; $\Delta^- v(s) = v(s) - v\,(s-0)$ и $\Delta^+ v(s) = v\,(s+0) - v(s)$ — левый и правый скачки функции $v(x)$ в точке s соответственно.

В ряде случаев введенный интеграл совпадает с интегралом Лебега-Стилтьеса (в случае его существования), например, в случае регулярных функций. Другие возможные ситуации совпадения интегралов можно найти в [2]. Однако, в общем случае он отличается от классического интеграла Лебега-Стилтьеса и не может быть сведен к нему, о чем говорит следующая теорема.

Теорема 2. *Существует функция $v(x)$, имеющая конечное на $[0;\ell]$ изменение, такая, что для всякой функции $\varphi(x)$, порождающей на $[0;\ell]$ заряд, найдется функция $u(x)$, принадлежащая пространству функций с ограниченной вариацией, такая, что равенство*

$$\int\limits_0^\ell u\,d[v] = \int\limits_0^\ell w\,d\varphi$$

невозможно. Здесь $w(x)$ — функция, которая ставится в соответствие функции $u(x)$.

Литература

1. Покорный, Ю. В. Интеграл Стилтьеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях / Ю. В. Покорный // Доклады РАН. — 1999. — Т. 364, № 2. — С. 167–169.

2. Зверева, М. Б. О некоторых вопросах качественной теории дифференциальных уравнений с производными Стилтьеса: дис.... канд. наук / Воронеж. гос. ун-т ; науч. рук. Ю. В. Покорный. — 15.11.2005. — 120 с.

ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЕ СЛАБОГО РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МОДЕЛИ КЕЛЬВИНА-ФОЙГТА ВТОРОГО ПОРЯДКА СО СГЛАЖЕННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ЯУМАННА

В.Г. Звягин, М.В. Турбин (Воронеж, ВГУ)
mrmike@mail.ru

В докладе рассматривается модель Кельвина–Фойгта с реологическим соотношением со сглаженной производной Яуманна:

$$\sigma = 2\mu_1\mathcal{E}(v) + 2\mu_2\left(\frac{d\mathcal{E}(v)}{dt} + \mathcal{E}(v)W_\rho(v) - W_\rho(v)\mathcal{E}(v)\right) +$$

$$+2\mu_3\int_0^t e^{-(t-s)/\lambda}\mathcal{E}(v)(s, z(s; 0, x))ds. \qquad (1)$$

Здесь $(t, x) \in [0, T] \times \Omega$, где $T > 0$, а $\Omega \subset \mathbb{R}^n (n = 2, 3)$ — ограниченная область с гладкой границей. Функция v — скорость движения жидкости, σ — девиатор тензора напряжений, $\mathcal{E}(v)$ — тензор скоростей деформаций, λ — время релаксации, μ_1, μ_2, μ_3 — некоторые физические константы. Исходя из физического смысла, $\lambda > 0, \varkappa_2 > 0$. Тензор $W_\rho(v)(t, x) = \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x - y)W(v)(t, y)dy$ — сглаженный тензор завихренности. Здесь $\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — гладкая функция с компактным носителем, $\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)dx = 1$ и $\rho(x) = \rho(y)$ для x и y с одинаковыми евклидовыми нормами. Функция z — решение задачи Коши в интегральной форме:

$$z(t; 0, x) = x + \int_0^t v(s; z(s; 0, x))ds, \quad t \in [0, T], \quad x \in \Omega.$$

То есть z — это траектория частицы, которая при $t = 0$ находилась в точке x.

Подставляя σ из соотношения (1) в систему уравнений движения жидкости, получаем следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^n v_i\frac{\partial v}{\partial x_i} - \mu_1\Delta v - \mu_2\frac{\partial \Delta v}{\partial t} -$$

$$-2\mu_2\mathrm{Div}\left(\sum_{i=1}^n v_i\frac{\partial\mathcal{E}(v)}{\partial x_i} + \mathcal{E}(v)W_\rho(v) - W_\rho(v)\mathcal{E}(v)\right) -$$

© Звягин В.Г., Турбин М.В., 2025

$$-\mu_3 \mathrm{Div} \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} \mathcal{E}(v)(s, z(s; 0, x)) ds + \nabla p = f, \quad \mathrm{div}\ v = 0; \qquad (2)$$

$$z(t; 0, x) = x + \int_0^t v(s; z(s; 0, x)) ds, \quad t \in [0, T], \quad x \in \Omega; \qquad (3)$$

Здесь Div — матричная дивергенция.

Дли системы (2)–(3) рассматривается начально-краевая задача с начальным и граничным условиями:

$$v(0, x) = v_0(x), \quad x \in \Omega; \quad v|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0. \qquad (4)$$

Пусть $f \in L_2(0, T; V^{-1})$, $v_0 \in V^1$.

Определение 1. *Слабым решением задачи (2)–(4) называется функция $v \in E_1 = \{v : v \in L_\infty(0, T; V^1), v' \in L_2(0, T; V^{-1})\}$, которая удовлетворяет для любой $\varphi \in V^3$ при п.в. $t \in (0, T)$ равенству*

$$\begin{gathered}\langle (v' + \mu_2 A v'), \varphi \rangle - \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx + \mu_1 \int\limits_\Omega \nabla v : \nabla \varphi \, dx + \\ + \mu_3 \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} \int_\Omega \mathcal{E}(v)(s, z(s; 0, x)) : \mathcal{E}(\varphi)\, dx\, ds - \\ - \mu_2 \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx - \mu_2 \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx + \\ + 2\mu_2 \int\limits_\Omega \big(\mathcal{E}(v) W_\rho(v) - W_\rho(v) \mathcal{E}(v) \big) : \nabla \varphi \, dx = \langle f, \varphi \rangle\end{gathered}$$

и начальному условию $v(0) = v_0$.

Основным результатом является следующая теорема:

Теорема 1. *Существует хотя было дно слабое решение $v \in E_1$ начально–краевой задачи (2)–(4).*

Доказательство теоремы 1 проводится при помощи аппроксимационно-топологического подхода к исследованию задач гидродинамики [1].

Литература

1. Звягин В.Г. Математические вопросы гидродинамики вязкоупругих сред / В.Г. Звягин, М.В. Турбин. — М. : КРАСАНД, 2012. — 416 с.

КЛЕТОЧНЫЕ СХЕМЫ КАК МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТОПОЛОГИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ СХЕМ

В.С. Зизов (Москва, МГУ)
vzs815@gmail.com

Введение Канонический базис работы [1] состоит из 3 функциональных элементов и описывает модель и поведение клеточной схемы (КС) из функциональных и коммутационных элементов. Позднее в работе [2] было дано описание КС через вложение схемы из функциональных элементов (СФЭ) в прямоугольную решётку.

Клеточная модель, применяемая для математического описания топологии интегральных схем (ИС), является важным инструментом в области проектирования и анализа полупроводниковых устройств. Эта модель была разработана для упрощения и автоматизации процесса проектирования ИС, позволяя эффективно описывать и анализировать сложные структуры.

Основные принципы клеточной модели. Интегральная схема представляется как прямоугольная решётка, состоящая из ячеек (клеток). Каждая ячейка может содержать один или несколько элементов ИС. Размер и форма ячеек могут быть стандартизированы, что позволяет использовать модульный подход к проектированию.

Для каждой ячейки определяются параметры, такие как электрические характеристики, геометрические размеры и взаимосвязи с соседними ячейками. Математическое описание включает уравнения, которые связывают эти параметры между собой и с внешними условиями.

Топология ИС описывается через связи между ячейками. Это позволяет представить всю схему в виде графа, где вершины — это ячейки, а ребра — это соединения между ними. Такое представление облегчает анализ и оптимизацию схемы, поскольку можно применять алгоритмы графов для решения задач маршрутизации, минимизации задержек и других задач проектирования.

Согласно упрощённой модели [3] средняя величина мощности, рассеиваемой на выходах синхронной схемы (комбинационного узла) при постоянном напряжении питания и частоте синхронизации выражается как $P_{dyn} = KE_sC_L$, где E_s - переключательная активность схемы, а C_L - ёмкостная нагрузка. Значение K определяется при архитектурном проектировании и в отдельных узлах схемы мо-

© Зизов В.С., 2025

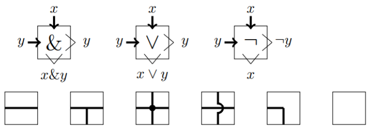


Рис 1. Пример базиса $Б_0$, *функциональные элементы* (&) конъюнкции, ($\vee$) дизъюнкции и ($\neg$) отрицания. *Коммутационные элементы*: 1) проводник, 2) Т-образный разветвитель, 3) разветвитель, 4) пересечение без соединения, 5) поворот.

жет быть принято за константу. Тогда можно ввести функционал D мощности **КС** следующим образом.

Мощностью одного функционального элемента будем считать мощность самого ФЭ, принятую за ёмкостную характеристику участка схемы, непосредственно подключенного в выходу ФЭ (характеристику сети). При переключении его состояния с «1» на «0» или обратно, произведение $E_s C_L$ будет равно сумме ёмкостных характеристик ФЭ и КЭ, принятых за 1 и С соответственно.

Определим *функционал площади* схем, который далее будет их критерием сложности. Схема Σ, не содержащая ни рядов, ни столбцов, состоящих только из изоляторов, имеет следующие размерности: *длину* l, измеряемую по горизонтали, и *высоту* h, измеряемую по вертикали. Всюду далее без ограничения общности будем считать, что $h \leqslant l$. Тогда площадью $A(\Sigma)$ клеточной схемы Σ называется площадь прямоугольной решётки схемы Σ, или, что то же самое, произведение длины и высоты схемы

$$A(\Sigma) = l(\Sigma)h(\Sigma). \tag{1}$$

Введём ограничения на класс Q функций алгебры логики от n переменных:

1. Его мощность, то есть число ФАЛ в этом классе, равно $|Q(n)|$
2. Класс достаточно широкий, то есть $logn = o(loglog|Q|)$

Тогда верны следующие теоремы. Эти оценки обобщают результаты, полученные в [3], [4].

Теорема 1. (о верхней оценке) *Для класса Q функций алгебры логики от n переменных существует КС Σ*

$$L(\Sigma) \leqslant \frac{1}{2}|Q(n)| * n + O(|Q(n)|\sqrt{n}).$$

Теорема 2. (о нижней оценке) *Для класса Q функций алгебры логики от n переменных существует КС Σ*

$$L(\Sigma) \geqslant \frac{1}{2}|Q(n)| * n - O(|Q(n)|\sqrt{n}).$$

Литература

1. Кравцов С.С. О реализации функций алгебры логики в одном классе схем из функциональных и коммутационных элементов / С.С. Кравцов // Проблемы кибернетики. — 1967. — Т. 19 — С. 285–292.

2. Lozhkin S. A. Asymptotically sharp estimates for the area of multiplexers in the cellular circuit model / S. A. Lozhkin , V. S. Zizov // Discrete Mathematics and Applications. – 2024. – Vol. 34, no. 2. – P. 103–115.

3. Yeap G.P. Practical Low Power Digital VLSI Design / G.P. Yeap // Kluwer Academic Publisher — 1998.

4. Ложкин С. А. Уточненные оценки сложности дешифратора в модели клеточных схем из функциональных и коммутационных элементов / С. А. Ложкин , В. С. Зизов // Ученые записки Казанского университета. Серия Физико-математические науки. — 2020. — Т. 162, № 3. — С. 322–334.

ОБ АЛГОРИТМЕ ПОСТРОЕНИЯ МАТРИЦЫ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ[1]

С.П. Зубова, Е.В. Раецкая (Воронеж, ВГУ; Воронеж,ВГЛТУ)
spzubova@mail.ru, raetskaya@inbox.ru

Для системы

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{1}$$

$x = x(t)$, $u = u(t)$, $t \in [t_0, t_k]$, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, и для произвольно заданных чисел $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$ требуется построить такую обратную связь

$$u = Kx, \tag{2}$$

чтобы спектр матрицы $A + BK$ совпадал с $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$, то есть чтобы

$$det(A + BK - \lambda_j I) = 0, \tag{3}$$

[1] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-20012, https://rscf.ru/project/24-21-20012/

© Зубова С.П., Раецкая Е.В., 2025

(в случае комплексных λ_j они должны быть попарно упорядоченными).

Решение такой задачи особенно актуально для построения стабилизирующего состояния $\widetilde{x}(t)$, которое удовлетворяет (1), (2), условию $\widetilde{x}(t_0) = \widetilde{x}_0$ с произвольным $\widetilde{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ и стремится к нулю с течением времени t. Для этого достаточно построить матрицу обратной связи K такую, что спектр матрицы $A + BK$ состоит из λ_j, $j = 1, 2, ..., n$, и $Re\lambda_j < 0$.

В [1] разработан метод построения матрицы K, заключающийся в расщеплении уравнения $(A + BK)v = \lambda v$ с двумя неизвестными K и v на два уравнения:

$$Q(\lambda I - A)v = 0 \tag{4}$$

относительно v и

$$Kv = B^{-}(\lambda I - A)v + z, \quad \forall z \in KerB \tag{5}$$

относительно K.

Метод каскадной декомпозиции, разработанный в работах [2] —[6] и примененный к (4), дает возможность построения линейно независимых $v_j = v(\lambda_j)$ и построения K из уравнения (5) с $v = v_j$ и $\lambda = \lambda_j$, $j = 1, 2, ..., n$.

Метод каскадной декомпозиции, однако, трудоемкий: на каждом шаге декомпозиции требуется производить расщепление пространства на подпространства, находить проекторы на подпространства, строить полуобратные матрицы.

Но с помощью этого метода разработан новый алгоритм построения вектора v, где на каждом шаге декомпозиции производится некоторая замена неизвестных и формируется линейная алгебраическая система. Решение этой системы приводит к определению некоторых компонент вектора v и выявлению условия корректности этой системы. В условии корректности производится замена переменных и так далее.

Простота этого алгоритма дает возможность создания намного более простых вычислительных программ, чем известные [7].

Литература

1. Zubova С.П. Solution of the spectrum allocation problem for a linear control system with closed feedback /S.P. Zubova, E.V. Raetskaya //Differential Equations. — 2024. —Vol. 60, № 6, P. 763 – 781.

2. Zubova S.P. Solution of a semi-boundary value problem for a degenerate partial differential equation /S.P. Zubova, E.V. Raetskaya //Differential Equations. — 2022. —Vol. 58, № 9, P. 1182 – 1194.

3. Zubova S.P. Solution of inverse problems for linear dynamical systems by the cascade method /S.P. Zubova, E.V. Raetskaya // Doklady Mathematics. 2012. V. 86, № 3. P. 846–849.

4. Zubova S.P. Algorithm to solve linear multipoint problems of control by the method of cascade decomposition /S.P. Zubova, E.V. Raetskaya // Automation and Remote Control. —2017. —Vol. 78, № 7, P. 1189 – 1202.

5. Zubova S.P. Solution of the multi-point control problem for a dynamic system in partial derivatives /S.P. Zubova, E.V. Raetskaya //Mathematical Methods in the Applied Sciences. — New York :AIMS Press, 2021. —Vol. 44, № 15, P. 11998 – 12009.

6. Zubova S.P. Construction of Controls Providing the Desired Output of the Linear Dynamic System /S.P. Zubova, E.V. Raetskaya //Automation and Remote Control. —2018. —Vol. 79, № 5, P. 774 – 791.

7. Зубов Н.Е. Матричные методы в теории и практике автоматического управления летательных аппаратов /Н.Е. Зубов, Е.А. Микрин, В.Н. Рябченко // М. : Изд-во МГТУ им. Баумана. —2016, —67 с.

ФОРМУЛЫ РАЗЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ ПО ФРЕЙМУ ГАБОРА, ПОРОЖДЕННОМУ ФУНКЦИЕЙ ГАУССА

М.С. Иванова (Воронеж, ВГУ)
ma123456789@inbox.ru

Для численного решения дифференциальных уравнений часто используют метод Галеркина в той или иной вариации, который основан на представлении приближенного решения как линейной комбинации базисных функций. Однако помимо традиционных базисов существуют, активно развивающиеся с конца 80-х годов фреймы. Они предоставляют гибкий и эффективный инструмент для разложения функций, в том числе и для аппроксимации решений дифференциальных уравнений.

© Иванова М.С., 2025

Определение 1. Набор функций $g_k \in L_2(\mathbb{R})$, $k \in \mathbb{Z}$ называется фреймом [1], если для $\forall f \in L_2(\mathbb{R})$ выполняются неравенства

$$A||f||^2 \leqslant \sum_{k'=-\infty}^{+\infty} |(f, g_k)|^2 \leqslant B||f||^2,$$

где $0 < A, B < \infty$ некоторые конечные положительные постоянные.

Определение 2. Если система функций

$$g_{k,m}(x, \alpha_1, \alpha_2) = (g - \alpha_1 k) \cdot e^{i\alpha_2 m x}, k, m \in \mathbb{Z}$$

образует фрейм, то его называют фреймом Габора.

Вообще говоря, разложение по фрейму не является единственным. Но среди всех разложений есть единственное, для которого ℓ_2 норма коэффициентов разложения будет минимальной. Его можно получить при помощи канонического двойственного фрейма [2],[3].

Функция–окно $g(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ порождает фрейм Габора при $\alpha_1\alpha_2 < 2\pi$. В дальнейшем рассматриваются только фреймы с этим окном. При $\alpha_1\alpha_2 = \frac{\pi}{N}$ двойственный фрейм $\tilde{g}_{k,m}$ выписывается явной формулой

$$\tilde{g}_{k,m}(x, \alpha_1, \alpha_2) = \frac{1}{2N\sqrt{\pi}} \sum_{k'=-\infty}^{+\infty} c_{k'}(2N\alpha_1) exp\left(\frac{-(x - \alpha_1(k'N + 2k))^2}{2}\right) \times$$

$$\times \sum_{m'=-\infty}^{+\infty} c_{k'}(2N\alpha_2) exp(i\alpha_2(2m + Nm')x),$$

где

$$c_k = \frac{1}{K} exp\left(\frac{k^2}{2}\right) \sum_{r=|k|}^{\infty} (-1)^r exp\left(-\frac{(r + 0.5)^2}{4}\right),$$

$$K = \sum_{r=-\infty}^{\infty} (4r + 1) exp\left(-\frac{(2r + 0.5)^2}{4}\right).$$

Для произвольной функции f коэффициенты разложения находятся интегрированием $a_{k,m} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\tilde{g}^*_{k,m}(x, \alpha_1, \alpha_2)dx$. В отличие от базисов для функций, входящих во фрейм, разложение тоже требуется искать.

Обычно при решении дифференциальных уравнений при помощи фреймов Габора используется переход к конечномерной системе [4] с численным решением полученной алгебраической системы. В работе выписаны формулы разложения по фрейму Габора и численно проверены для $g_{k,m}(x)$, $xg_{k,m}(x)$, $x^2g_{k,m}(x)$, $g'_{k,m}(x)$, $g''_{k,m}(x)$. Полученные результаты позволят продлить аналитическую составляющую решения и скоратить рассчеты.

Литература

1. Christensen Ole An Introduction to Frames and Riesz Bases / Ole Christensen // Birkhauser. — 2016. —P. 704

2. Janssen A. J. E. M. Some Weyl-Heisenberg frame bound calculations / A. J. E. M. Janssen //Indag. Math., New Ser. —1996. — С. 165–183.

3. Киселев Е.А. Локализация оконных функций двойственных и жестких фреймов Габора, порожденных функцией Гаусса / Е. А. Киселев, Л. А. Минин, И. Я. Новиков, С. Н. Ушаков. — М. : Матем. сб, 215:3, 2024. — С. 80–99.

4. Gerassimos A. Athanassoulis A Gabor-Galerkin approach for solving infinite-energy problems with constrained-at-infinity admissible functions / Gerassimos A. Athanassoulis, Konstantinos S. Politis //Days on Diffraction —2004.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДРОБНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ КАПУТО-ФАБРИЦИО

М. Илолов, Дж.Ш. Рахматов, Т. Маматкулов (Душанбе, Центр инновационного развития науки и новых технологий НАНТ, Таджикский национальный университет)
ilolov.mamadsho@gmail.com

1. В 2015 году Капуто и Фабрицио предложили новую концепцию дробной производной с регулярным ядром [1]. В дальнейшем многими авторами были установлены важные свойства этой концепции и были указаны ее приложения в различных направлениях науки технологий [2]. Приводим некоторые определения и утверждения необходимые в дальнейшем.

Определение 1 ([1]). *Пусть* $0 < \alpha < 1$ *и* $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *непрерывная дифференцируемая функция. Дробная производная Капуто-Фабрицио порядка* α *определяется следующим образом*

$$^{CF}D_t^{\alpha}u(t) = \frac{1}{1-\alpha}\int_0^t exp\left[-\frac{\alpha(t-s)}{1-\alpha}\right]u'(s)ds, t \geqslant 0.$$

© Илолов М.И., Рахматов Дж.Ш., Маматкулов Т., 2025

Напомним важные ее свойства:

(i) Для $\alpha \to 1$ имеем

$$\lim_{\alpha \to 1} {}^{CF}D_t^{\alpha} u(t) = u'(t). \tag{1}$$

(ii) Обозначим через $\mathcal{L}(u)$ преобразование Лапласа функции u. Преобразование Лапласа дробной производной ${}^{CF}D_t^{\alpha}$ с $0 < \alpha < 1$ имеет вид

$$\mathcal{L}({}^{CF}D_t^{\alpha} u)(\lambda) = \frac{\lambda \mathcal{L}(u)(\lambda) - u(0)}{\lambda(1-\alpha) + \alpha}, \lambda > 0. \tag{2}$$

Замечание 1. Заметим, что дробная производная Капуто-Фабрицио имеет несингулярное ядро, а именно $exp[-\frac{\alpha t}{1-\alpha}]$. Напротив, классические дробные производные Капуто и Римана-Лиувилля имеют сингулярное ядро $g_{\alpha}(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, 0 < \alpha < 1$. Это позволяет нам исследовать важные свойства нелокального оператора ${}^{CF}D_t^{\alpha}$. Одним из очевидных но очень важных свойств этого оператора является

$${}^{CF}D_t^{\alpha} u(0) = 0, 0 < \alpha < 1.$$

Лемма 1. *Пусть $g \in C(\mathbb{R}_+)$, тогда решение задачи Коши для дробного дифференциального уравнения Капуто-Фабрицио (3)*

$${}^{CF}D_t^{\alpha} u(t) = g(t), t > 0, 0 < \alpha \leqslant 1 \tag{3}$$

с условием

$$u(0) = u_0$$

имеет вид

$$u(t) = u_0 + (1-\alpha)(g(t) - g_0) + \alpha \int_0^t g(s) ds.$$

2. Сформулируем теперь обратные задачи. Пусть $0 < t_0 < T < \infty$. Наша основная обратная задача состоит в реконструкции функции на $(0, t_0)$ при условии, что эта функция и ее производная заданы на (t_0, T).

ОЗ1. Для заданных функций $\varphi, \Phi : (t_0, T) \to \mathbb{R}$ найти функцию на $u(0,T) \to \mathbb{R}$ такую, что

$$u\Big|_{(t_0,T)} = \varphi \text{ и } {}^{CF}D_0^{\alpha} u\Big|_{(t_0,T)} = \Phi. \tag{4}$$

Смысл ОЗ1 состоит в реконструкции истории в уравнении субдиффузии, когда поток пропорционален дробному по времени производной от температурного градиента [3].

Далее сформулируем ОЗ2, которая допускает редукцию к ОЗ1.

ОЗ2. Для заданных функций $\varphi, \Phi : \Omega \times (t_0, T) \to \mathbb{R}$ найти $u, F : \Omega \times (0, T) \to \mathbb{R}$ такие, что

$$
{}^{CF}D_0^{\alpha}\beta u(x,t) + D^l u(x,t) - Au(x,t) = F(x,t), x \in \Omega, t \in (0,T) \qquad (5)
$$

и

$$
u\Big|_{\Omega\times(t_0,T)} = \varphi, F\Big|_{\Omega\times(0,T_0)} = \Phi.
$$

Здесь, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ с некоторым числом $N \in \mathbb{N}$, $D^l = \sum_{j=1}^{l} q_j \frac{\partial_j}{\partial t}$, с некоторым $l \in \mathbb{N}, q_j \in \mathbb{R}$, и A и B операторы действующие на функции зависящие от x. Далее всюду будем считать, что A и B с их областями определения $\mathcal{D}(A)$ и $\mathcal{D}(B)$ такие, что $A : \mathcal{D}(A) \subseteq C(\Omega) \to C(\Omega)$, $B : \mathcal{D}(B) \subseteq C(\Omega) \to C(\Omega)$. Кроме того будем предполагать, что B обратимый оператор.

Уравнение (5) является обобщением дробного волнового уравнения Капуто

$$
{}^{C}D_0^{\beta}u + \lambda(-\Delta)^{\alpha}u = F, \beta \in (1,2), \alpha \in [0.5, 1], \lambda > 0,
$$

затухающего волнового уравнения Римана-Лиувилля

$$
\frac{\partial^2}{\partial t^2}u + \mu^R D_0^{\beta}u - \lambda\Delta u = F, \beta \in (0,1) \cup (1,2)
$$

и некоторых уравнений субдиффузии вида

$$
{}^{C}D_0^{\beta}u - \lambda\Delta u = F \text{ и } \frac{\partial}{\partial t}u - \lambda^R D_0^{\alpha}\Delta u, 0 < \alpha < 1.
$$

Отметим, что операторы A и B в (5) могут быть нелинейными. В случае когда $\Phi = 0$, ОЗ2 означает реконструкцию источника, который был активным в прошлом используя состояние u в левой окрестности T. Такого рода обратные задачи возникают в сейсмологии, геотермии, загрязнении подземных вод и т.д. [4].

3. Приводим результат об единственности решения (4).

Предварительно сформулируем общее утверждение.

Лемма 2. *Пусть k действительная аналитическая функция и $v \in L_1(0, t_0)$. Тогда*

$$\omega(t) = \int_0^{t_0} k(t-s)v(s)ds$$

является действительной аналитической функцией на (t_0, ∞).

Наряду с преобразованием Лапласа $\mathcal{L}(\lambda)$ для производной Капуто-Фабрицио рассмотрим также другое интегральное преобразование Янга.

Интегральное преобразование Янга функции $u(t)$ определяется в виде

$$\mathcal{X}(\nu) = \mathcal{Y}(u(t))(\nu) = \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{\nu}} u(t)dt, t > 0$$

при условии, что интеграл справа существует для некоторого ν.

Отметим связь между преобразованием Лапласа и Янга в виде следующих утверждений.

Лемма 3. *Пусть $\mathcal{L}(\nu)$ преобразование Лапласа функции $u(t)$ и $\mathcal{X}(\nu)$ преобразование Янга. Тогда*

$$\mathcal{X}(\nu) = \mathcal{L}(1/\nu).$$

Лемма 4. *Пусть $u(t) \in C(\mathbb{R}_+)$. Тогда преобразование Янга дробной производной ${}^{CF}D_t^{\alpha}, 0 < \alpha < 1$ имеет вид*

$$\mathcal{Y}({}^{CF}D_t^{\alpha} u)(\nu) = \frac{\mathcal{Y}[u(t) - \nu u(0)]}{1 + \alpha(1-\nu)}.$$

Теперь сформулируем основной результат.

Теорема 1. *Пусть $W_1^n(0, T)$-пространство Соболева n-раз дифференцируемых обобщенных функций заданные на $(0, T)$. Пусть также*

$$\left. {}^{CF}D_t^{\alpha} u \right|_{(t_0, T)} = 0.$$

Тогда задача (4) имеет лишь нулевое решенте, $u = 0$.

Доказательство теоремы основано на предыдущих леммах 1-4 и на применении преобразования Янга и метода декомпозиции Адамяна.

Литература

1. Caputo M. A new definition of fractional derivative without singular kernel / M. Caputo, M. Fabrizio // Prog. Fract. Differ. Appl. — 2015. —1. — pp. 73–85.

2. Abbas S. Caputo-Fabrizio fractional differential equations with instantenous impulses /S. Abbas, M. Benchonza, J.J. Nieto // Mathematics. —2021. —6. — pp. 2932–2946.

3. Postvenko Ju. Fractional heat conduction equation and associated thermal stress / Ju. Postvenko. —2004. —28. — pp. 81–102.

4. Ilolov, M.(2024). A Regularization Method for an Inverse Problem Represented by a First-Kind Integral Equation / M. Ilolov, K. Kuchakshoev, J.Sh. Rahmatov // In: Ashyralyev, A., Ruzhansky, M., Sadybekov, M.A. (eds) Analysis and Applied Mathematics. — AAM 2022. — Trends in Mathematics(). — vol 6. — Birkhauser, Cham. — $https://doi.org/10.1007/978-3-031-62668-5\_23$

ОБ АППРОКСИМАЦИИ НЕКОТОРЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ СВЕРТКИ

Мигдад И. Исмайлов (Азербайджанский Государственный Университет Нефти и Промышленности, Бакинский Инженерный Университет)

migdad-ismailov@rambler.ru

В работе доказаны обобщения аналога теоремы Коровкина ([1]) в пространствах Орлича и в пространствах Лебега с переменным показателем суммируемости.

Пусть $C_{2\pi}(R)$ и $L^p_{2\pi}(R)$, $1 \leqslant p < +\infty$, пространства функций из $C[-\pi,\pi]$ и $L^p(-\pi,\pi)$ и соответственно, которые 2π -периодически продолжены на всю прямую R. Пусть $\{\varphi_n\}_{n\in N} \subset L^1_{2\pi}(R)$ такая, что $\varphi_n \geqslant 0$ п.в. на R и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(t)dt = 1$. Последовательность $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ называется аппроксимативно тождественным, если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi} \varphi_n(t)dt = 0$, $\forall\delta \in (0,\pi)$. Рассмотрим последовательность операторов свертки

$$L_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\varphi_n(t)dt, n \in N, f \in L^p_{2\pi}(R).$$

© Исмайлов Мигдад И., 2025

В [2] установлены эквивалентные условия сходимости в $L^p_{2\pi}(R)$ последовательности операторов L_n к тождественному оператору. В гранд-пространствах Лебега этот вопрос изучался в [3]. В предлагаемой работе результат доказывается в пространствах Орлича и в пространствах Лебега с переменным показателем суммируемости.

Пусть $\Phi(t) : [0, +\infty) \to R$ - функция Юнга, через $L^\Phi(-\pi, \pi)$ обозначается банахово пространство Орлича ([4]) измеримых на $[-\pi, \pi]$ функций $f : [-\pi, \pi] \to C$ с конечной Люксембург-нормой

$$\|f\|_\Phi = \inf\left\{\lambda > 0 : \int_{-\pi}^{\pi} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) dx \leqslant 1\right\}.$$

Пусть $L^\Phi_{2\pi}(R)$ пространство функций $f \in L^\Phi(-\pi, \pi)$ которые 2π-периодически продолжены на всю прямую R.

Теорема 1._Пусть пространство $L^\Phi(\Omega)$ рефлексивно. Тогда следующие свойства эквивалентны:_

a) $\forall f \in L^\Phi_{2\pi}(R)$ $\lim\limits_{n\to\infty} \|L_n f - f\|_\Phi = 0$ и $\forall f \in C_{2\pi}(R)$ $\lim\limits_{n\to\infty} \|L_n f - f\|_\infty = 0$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(t) \sin^2 \frac{t}{2} dt = 0$;

c) $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ – аппроксимативно тождественное.

Пусть дана функция $p(\cdot) : [-\pi, \pi] \to [1, +\infty)$ и $p_+ = \operatorname*{ess\,sup}\limits_{x\in[-\pi,\pi]} p(x)$. Обозначим через $L^{p(\cdot)}(-\pi, \pi)$ банахово пространство Лебега с переменным показателем $p(\cdot)$ измеримых на $[-\pi, \pi]$ функций f : $[-\pi, \pi] \to C$ с конечной нормой ([5])

$$\|f\|_{p(\cdot)} = \inf\left\{\lambda > 0 : \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)^{p(x)} dx \leqslant 1\right\}.$$

Определение 1. Говорят, что функция $p(x)$ удовлетворяет условию log-Гёльдера (коротко $p \in \mathrm{P}^{\log}(-\pi, \pi)$, если $\exists c > 0$ такое, что

$$|p(x_1) - p(x_2)| \leqslant -\frac{c}{\ln|x_1 - x_2|}, \forall x_1, x_2 \in [-\pi, \pi], |x_1 - x_2| \leqslant \frac{1}{2}.$$

Пусть $L^{p(\cdot)}_{2\pi}(-\pi, \pi)$ пространство функций $f \in L^{p(\cdot)}(-\pi, \pi)$ которые 2π-периодически продолжены на всю прямую R.

Справедлива

Теорема 2. _Пусть $p \in \mathrm{P}^{\log}(-\pi, \pi)$ и $p_+ < +\infty$. Следующие свойства эквивалентны:_

a) $\forall f \in L_{2\pi}^{p(\cdot)}(R)\ \lim\limits_{n\to\infty} \|L_n f - f\|_{p(\cdot)} = 0$ и

$\forall f \in C_{2\pi}(R)\ \lim\limits_{n\to\infty} \|L_n f - f\|_\infty = 0$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$;

c) $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ – аппроксимативно тождественное.

Отметим, что достаточность условия сходимости последовательности операторов свертки в пространстве $L_{2\pi}^{p(\cdot)}(R)$ к тождественному оператору, другим способом, изучалась в [6].

Литература

1. Korovkin P.P. On convergence of linear positive operators in the space of continuous functions / P.P. Korovkin // Dokl. Akad. Nauk SSSR, — 1953. 90. — P. 961–964.

2. Altomare F. Korovkin-type approximation theory and its applications / Altomare F., Campiti M. — v. 17. de Gruyter, — 1994.

3. Zeren Y. Korovkin-type theorems and their statistical versions in grand Lebesgue spaces / Zeren Y., Ismailov M.I., Karacam C. // Turk. J. Math., — 2020. 44. — P. 1027–1041.

4. Красносельский М. А. Выпуклые функции и пространства Орлича / Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б. — М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., — 1958.

5. Cruz-Uribe D.V. Variable Lebesgue spaces / Cruz-Uribe D.V., Fiorenza A. — Basel, Switzerland: Birkhauser, — 2013.

6. Israfilov D. M. Convolutions and approximations in the variable exponent spaces / Israfilov D. M., Guven, A. // J. BAUN Inst. Sci. Technol., — 2022. 24. 2., — P. 636–644.

НЕКОТОРЫЕ ОЦЕНКИ РАССТОЯНИЯ МЕЖДУ ТОЧКАМИ МАКСИМУМА МОДУЛЯ И НУЛЯМИ ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ

М.В. Кабанко (Курск, КГУ)

kabankom@gmail.com

В теории целых и субгармонических функций одной из важнейших проблем является проблема связи между ростом целой (субгармонической) функции и распределением нулей целой (риссовской меры субгармонической) функции. В данной работе исследуется связь расстояния между множеством нулей целой функции и точками, в которых достигается максимум модуля. Первые результаты в этом

© Кабанко М.В., 2025

направлении были получены А. Макентайром в работе [1]. Дальнейшее развитие этих идей получило в работах И.В. Островского и А. Юрейна (например, [2]), в которых получили более точные оценки для исследуемых расстояний.

В настоящей работе это расстояние оценивается на основе уточненного порядка относительно модельной функции, который был введён Б.Н. Хабибуллиным в работе [3] и, в дальнейшем, использовался авторами работы [4] для уточнения классических результатов и приложений в теории роста целых и субгармонических функций.

Определение 1. *Функция M на открытом луче $\mathbb{R}^+$, строго положительная и выпуклая относительно логарифма, для которой $M'(r) > 0$ при всех $r \in \mathbb{R}^+$ и $\lim\limits_{r\to+\infty} M(r) = +\infty$, называется модельной функцией роста.*

Определение 2. *Абсолютно непрерывная функция ρ_M называется уточнённым порядком относительно модельной функции роста $M(r)$, если существуют пределы*

$$\lim_{r\to+\infty} \rho_M(r) = \varrho \in \mathbb{R}, \quad \lim_{r\to+\infty} \frac{M(r)}{M'(r)} \rho'_M(r) \ln M(r) = 0\,.$$

Здесь под $\rho'_M(r)$ мы понимаем наибольшее производное число. Далее, поскольку модельная функция роста M фиксированная, то индекс M в обозначении уточненного порядка мы будем опускать.

Обозначим через Z_f множества нулей функции $f(z)$. Под $\operatorname{dist}(a, G)$ будем понимать расстояние между точкой a и множеством G:

$$\operatorname{dist}(a, G) = \inf_{z\in G} |a - z|.$$

Теорема *Пусть $\rho_M(r)$ — собственный уточненный порядок целой функции $f(z)$ и $\sigma = \sigma_f$ — тип функции $f(z)$ относительно модельной функции $\rho_M(r)$. Тогда*

$$\varliminf_{|w|\to\infty} \operatorname{dist}(w, Z_f) \frac{\psi(|w|)V'(|w|)}{|w|} \geqslant \frac{-\exp(M^{\varrho}(1))}{\sigma \cdot M^{\varrho}(e^{\frac{1}{\varrho}})}.$$

где w — точка максимума модуля, $V(r) = (M(r))^{\rho(r)}$ — функция роста, относительно мультипликаивной модельной функции $M(r)$ и $\psi(r) = \frac{1}{(\ln M(r))'}$.

Литература

1. Macintyre A.J. Wiman's method and flat regions of integral functions / A.J. Macintyre // Quart. J. Math. — 1938. — Vol. 9. — P. 81–88.

2. Ostrovskii I.V. Maximum modulus points and zero sets of entire functions of regular growth / I.V. Ostrovskii, A.E. Üreyen // C. R. Math. Acad. Sci. Paris. — 2005. — Vol. 341. No. 8. — P. 381–384.

3. Хабибуллин Б.Н. Обобщение уточненного порядка / Б.Н. Хабибуллин // Доклады Башкирского университета. — 2020. — Т. 5. Вып. 2. — С. 1–5.

4. Кабанко М.В. Об уточненной функции роста относительно модельной / М.В. Кабанко, К.Г. Малютин, Б.Н. Хабибуллин // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. — 2023. — Т. 230. — С. 56–74.

ВЫЧИСЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ДИСКРЕТНЫХ ПОЛУОГРАНИЧЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ ЗАДАННЫХ НА КВАНТОВЫХ ГРАФАХ С ИЗМЕНЯЮЩИМИСЯ ВО ВРЕМЕНИ РЕБРАМИ

С.И. Кадченко (Магнитогорск, МГТУ им. Г.И. Носова)
sikadchenko@mail.ru

В последнее время возникает интерес к разработке вычислительно эффективных алгоритмов решения прямых и обратных спектральных задач, заданных на квантовых графах с изменяющимися во времени ребрами. В работе описана методика решения прямых спектральных задач для дифференциальных операторов в частных производных, заданных на графах типа звезда с переменными длинами ребер, которая проиллюстрирована на примере оператора теплопроводности.

Рассмотрим два вида графа-звезда: граф G_0, у которого длины ребер L_j постоянные и граф G_t, у которого длины ребер изменяются во времени по законам $L_j(t) = l_j L(t)$, $l_j \in R_+$. На графе $G = G_0 \bigcup G_t$ введем необходимое нам пространство суммируемых с квадратом функций $L^{2,1}(G)$

$$||u||_{L^{2,1}(G)} = \int\limits_0^T \Big(\int\limits_G (\mathbf{y},t) d\mathbf{y} \Big)^{1/2} dt, \ \mathbf{y} = (y_1, ..., y_{j_0}), \ y_j \in (0, L_j(t)).$$

Для нахождения собственных значений $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ вектор-оператора теплопроводности заданного на графе G_t, рассмотрим

© Кадченко С.И., 2025

следующие спектральные задачи

$$\frac{\partial \psi_j}{\partial t} - \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial x_j^2} = \mu \psi_j,\ x_j = (0, L_j(t)),\ j = \overline{1, j_0},$$

$$\psi_1(0,t) = \ldots = \psi_{j_0}(0,t) = 0, \quad \psi_1(L_1(t),t) = \ldots = \psi_{j_0}(L_{j_0}(t),t), \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{j_0} \frac{\partial}{\partial x_j} \psi_j(L_j(t),t) = 0, \quad \psi_j(x_j,0) = \varphi_j(x_j)$$

для его проекций на ребра графа. Используя замену переменных,

$$y_j = \frac{x_j}{L(t)}, \quad t_1 = t, \quad 0 \leqslant y_j \leqslant l_j$$

перейдем от задач (1), заданных на графе G_t, к эквивалентным спектральным задачам на графе G_0

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi_j(y_j,t) - \frac{1}{L^2(t)}\frac{\partial^2}{\partial y_j^2}\psi_j(y_j,t) - \frac{\dot{L}(t)}{L(t)} y_j \frac{\partial}{\partial y_j}\psi_j(y_j,t) = \mu\psi(y_j,t),$$

$$\psi_1(0,t) = \cdots = \psi_{j_0}(0,t), \quad \psi_1(l_1,t) = \cdots = \psi_{j_0}(l_{j_0},t),$$

$$\sum_{j=1}^{j_0} \frac{\partial}{\partial y_j}\psi_j(l_j,t) = 0, \quad \psi_j(y_j,0) = \varphi_j(y_j).$$

На основе разработанной методики вычисления собственных значений дискретных полуограниченных операторов найдены формулы для вычисления приближенных собственных значений $\tilde{\mu}_n(t)$ в момент времени $t = T$ вектор-оператора теплопроводности [1]

$$\tilde{\mu}_n(T) = -\frac{D_n^2}{2}\left(1 - e^{-2\lambda_n T}\right) + D_n^2 \int\limits_0^T R_n(t) \frac{e^{-2\lambda_n t}}{L(t)} dt + \tilde{\delta}_n(T),$$

где

$$R_n(t) = \frac{\lambda_n^2}{L(t)} - \frac{B_n^2 \dot{L}(t)}{8\lambda_n} \sum_{j=1}^{j_0} \frac{\sin(2\lambda_n l_j) - 2\lambda_n l_j \cos(2\lambda_n l_j)}{\sin^2(\lambda_n l_j)},$$

$$D_n = \sqrt{\frac{2\lambda_n}{1 - e^{-2\lambda_n T}}}, \quad B_n = \sqrt{\frac{2}{\sum\limits_{j=1}^{j_0} \frac{l_j - \frac{\sin(2\lambda_n l_j)}{2\lambda_n}}{\sin^2(\lambda_n l_j)}}},$$

λ_n – корни трансцендентного уравнения $\displaystyle\sum_{j=1}^{j_0} \mathrm{ctg}(\lambda l_j) = 0.$

Литература

1. Kadchenko S.I. Numerical methods for solving spectral problems on quantum graphs. Journal of Computational and Engineering Mathematics / S.I.Kadchenko, A.V. Stavtseva, L.S. Ryazanova // . — 2021. — Т. 8, № 3. С. — 49-70.

О ЛАКУНАРНОСТИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ ФУНКЦИЙ

А.Д. Казакова, М.Г. Плотников (Москва, МГУ)
anna.kazakova@math.msu.ru, mgplotnikov@gmail.com

Множество $A \subset D$ — *множество единственности* для системы функций (f_n) с областью определения D, если из сходимости к нулю на $D \backslash A$ ряда $\sum_n c_n f_n$ вытекает равенство нулю всех c_n. Такие множества для многих систем (напр., тригонометрической, Уолша, Хаара, Франклина) служили предметом многочисленных исследований.

Лакунарные в разных смыслах системы $(\varphi_k\colon [0,1] \to \mathbb{R})$ часто являются системами ε-единственности, т.е. такими, что для некоторого $\varepsilon > 0$ сходимость к нулю на множестве меры $> 1-\varepsilon$ ряда $\sum_k c_k \varphi_k$ влечет равенство нулю всех c_k. Так, все системы, для которых имеет место L_2-L_q-неравенство Хинчина (*системы q-лакунарности*) являются системами ε-единственности [1].

Мы изучали класс систем функций, которые по некоторым свойствам ведут себя подобно лакунарным, а по другим — нет.

Пусть задано натуральное $p \geqslant 2$, $\omega := \exp(2\pi i/p)$. Функции $R_k(x) := \omega^{\lfloor x \cdot p^{k+1} \rfloor}$, $k = 0, 1, \ldots$, $x \in [0,1)$, называют *обобщенными функциями Радемахера*, а их всевозможные конечные произведения — *функциями Виленкина–Крестенсона* (*Уолша* при $p = 2$). Обозначим E_p класс подсистем системы Виленкина–Крестенсона, каждая из которых задается счетным множеством M таким, что для каждого $k \in \mathbb{N}_0$ множества $\{n \in M\colon\ n_k \neq 0\}$ конечны, n_k — коэффициенты p-ичного разложения числа n. В случае $p = 2$ такие множества M рассматривались в ряде задач Лукомским [2].

Теорема 1. *Множествами единственности для* E_p*-систем являются все множества* $X \subset [0,1)$*, «малые» либо с метрической*

© Казакова А.Д., Плотников М.Г., 2025

точки зрения ($\mu X = 0$)*, либо с топологической* (*множества первой категории*).

Например, множества диофантовых и лиувиллевых чисел из $[0, 1)$ — множества единственности для каждой из E_p-систем (а их объединение — нет).

Теорема 2. *Существуют* E_p*-системы, не являющиеся системами* ε*-единственности и, как следствие, не являющиеся системами* q*-лакунарности ни для какого* $q > 2$.

Теорема 1 является аналогом теоремы из [3] для лакунарных (по Адамару) подсистем Уолша, В тоже время, как показывает теорема 2, в вопросах q-лакунарности и ε-единственности ряды по некоторым E_p-системам ведут себя иначе, нежели лакунарные ряды Уолша. Кроме того, еще одно свойство лакунарных рядов Уолша, состоящее в том, что сходящийся к нулю на множестве положительной меры такой ряд вырождается в полином, тоже не выполняется для E_p-систем.

Из теоремы 2 вытекает, что теорема 1 точна в части, связанной с мерой: $\mu(X) = 0$ нельзя заменить сразу для всего класса E_p на $\mu(X) = \delta$ ни для какого $\delta > 0$.

Для тригонометрических аналогов E_p-систем верен гораздо более сильный аналог метрической части теоремы 1: множествами единственности для них являются все множества неполной меры [4].

Первый автор является стипендиатом Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС».

Литература

1.Гапошкин В.Ф. Лакунарные ряды и независимые функции / В.Ф. Гапошкин // УМН — 1966. — Т. 21, вып. 6. — С. 3–82.

2. Лукомский С.Ф. О коэффициентах лакунарных тригонометрических рядов и рядов Радемахера, сходящихся на множествах нулевой меры / С.Ф. Лукомский // Изв. вузов. — 1995. — № 3. — С. 37–47.

3. Coury J. Some results on lacunary Walsh series / J. Coury // Pacific J. Math. — 1973, Vol. 45, № 2. — P. 419—425.

4. Казакова А.Д. Множества единственности для подсистем тригонометрической системы / А.Д. Казакова, М.Г. Плотников // Матем. заметки — 2025, Т. 117, вып. 1. — в печати.

О ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ КРИВЫХ

С.И. Калмыков (Shanghai, SJTU)
kalmykovsergei@sjtu.edu.cn

Доклад посвящен точной оценке числа самопересечений у плоской замкнутой кривой с тригонометрической параметризацией. Кроме того, показывается, что такая кривая общего вида является нормальной в смысле Уитни и что вложения окружностей являются плотными среди всех отображений окружности в плоскость относительно интегральной нормы.

Основано на совместных работах с Л.В. Ковалевым [1] и [2].

Литература

1. Kalmykov S. Self-intersections of Laurent polynomials and the density of Jordan curves / S. Kalmykov, L.V. Kovalev // Proc. Amer. Math. Soc. — 2023. — V. 151, № 2. — P. 547–554.

2. Kalmykov S. A sharp bound on the number of self-intersections of a trigonometric curve / S. Kalmykov, L.V. Kovalev // J. Math. Anal. Appl. — 2025. — V. 543, № 2. — 128995.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ПРЕДЕЛЬНОГО ЦИКЛА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ЛИНИЕЙ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯ

М.М. Каримов, Э.М. Мухамадиев, И.Дж. Нуров
(РФ, Вологда, ВоГУ, Таджикистан, Душанбе, ТНУ)
azharsoft@mail.ru

Настоящая работа посвящена анализу предельных циклов для кусочно-линейных систем с разрывом на линии переключения [1-3]. Введем в рассмотрение функцию $h(y, y') = y^2 + (y')^2 - r^2$, где $r \in \mathbb{R}$, и кусочно-линейное дифференциальное уравнение вида

$$y'' + g(y, y') = 0, \tag{1}$$

где

$$g(y, y') = \begin{cases} a_1 y' + b_1(y - c_1), h(y, y') > 0, \\ \\ a_2 y' + b_2(y - c_2), h(y, y') < 0, \end{cases} \tag{2}$$

© Калмыков С.И., 2025
© Каримов М.М., Мухамадиев Э.М., Нуров И.Дж., 2025

здесь a_i, b_i, c_i — вещественные числа, $i = 1, 2$. Окружность, описываемая равенством $h(y, y') = 0$, является линией переключения.

Заметим, что функция $g(y, y')$ на линии $h(y, y') = 0$ в общем случае имеет разрыв. Дифференциальное уравнение вида (1), где $g(y, y')$ определяется равенством (2), называют «сшитым» или «склеенным» дифференциальным уравнением [2]. Как известно [1, 2], многие прикладные задачи приводят к рассмотрению подобных сшитых систем.

Уравнение (1) эквивалентно следующей системе дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -g(x_1, x_2), \end{cases} \tag{3}$$

где $x_1 = y, x_2 = y'$. Траектории системы (3) в областях $G_1 = \{(x_1, x_2) : h(x_1, x_2) > 0\}$ и $G_2 = \{(x_1, x_2) : h(x_1, x_2) < 0\}$ определяются решениями линейных систем

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -a_1 y' - b_1(y - c_1), \end{cases} \tag{4}$$

и

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -a_2 y' - b_2(y - c_2), \end{cases} \tag{5}$$

соответственно. На линии сшивания $h(x_1, x_2) = 0$ траектория системы (3) доопределяется в зависимости от поведения решений указанных линейных систем.

Нас интересует случай, когда коэффициенты a_i и b_i удовлетворяют условию $4b_i > a_i^2$, $i = 1, 2$. Это означает, что корни характеристических уравнений, соответствующих системам (4) и (5), являются комплексными числами.

Пусть $a_1 > 0$, $a_2 < 0$ и $r = 1$. Более подробно проследим за поведением траектории кусочно-линейной системы (3), когда

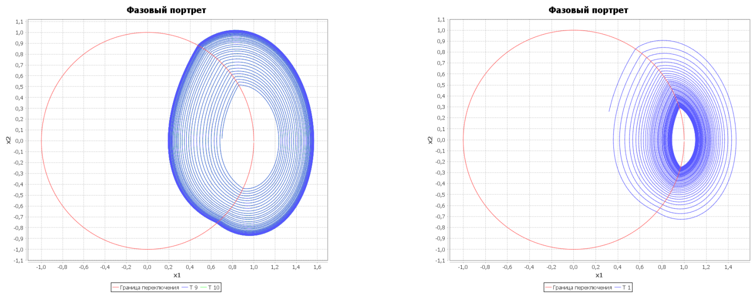
$$|c_i| > \frac{1}{b_i}\sqrt{a_i^2 + (1 - b_i)^2}, \quad i = 1, 2. \tag{6}$$

Условия (6) эквивалентны тому, что окружность $h(x_1, x_2) = 0$ во всех точках, за исключением точек $(-1, 0)$ и $(1, 0)$, не имеет контакта с системами (4) и (5). Отметим, что точки $(-1,0)$ и $(1,0)$ являются особыми точками системы (3).

Дополнительно предположим, что $0 < c_1 < 1 < c_2$. Эти условия вместе с условиями (6) эквивалентны следующим условиям:

$$\frac{1}{b_1}\sqrt{a_1^2 + (1-b_1)^2} < c_1 < 1, c_2 > \max\left\{\frac{1}{b_2}\sqrt{a_2^2 + (1-b_2)^2}, 1\right\}. \quad (7)$$

На рисунке 1 приведен фазовый портрет, иллюстрирующий утверждения леммы.



а) устойчивый фокус. б) неустойчивый фокус.

Рис. 1

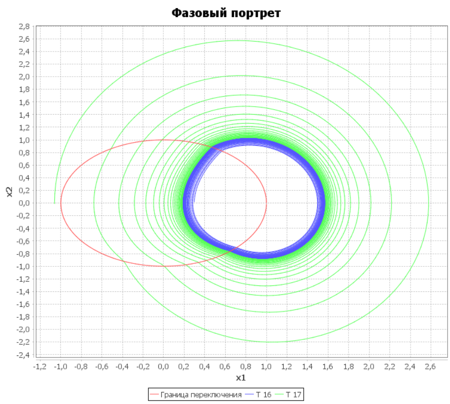


Рис. 2

Из условий (7) следует, что $1 - b_i(1 - c_i) \neq 0, i = 1, 2$ и, следовательно, определено число

$$\gamma = \frac{a_1}{b_1(1-c_1)(1-b_1(1-c_1))} - \frac{a_2}{b_2(1-c_2)(1-b_2(1-c_2))}.$$

Лемма. *Пусть выполнены условия (7). Тогда особая точка* $(1, 0)$ *системы (3) является неустойчивым фокусом, если* $\gamma < 0$*, и является устойчивым фокусом, если* $\gamma > 0$.

Теорема. *Пусть выполнены условия (7) и* $\gamma < 0$*. Тогда система (3) имеет предельный цикл.*

На рисунке 2 приведён фазовый портрет возникновения предельного цикла согласно теореме.

Литература

1. Андронова А. А. Теория колебаний / А. А. Андронова, А. А. Витт, С. Э. Хайкин. — М. : Наука, 1959. — 919 с.

2. Баутин Н. Н. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости / Н. Н. Баутин, Е. А. Леонтович. — М. : Наука, 1976. — 490 с.

3. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью / А. Ф. Филиппов. — М. : Наука, 1985. — 223 с.

КОЭРЦИТИВНЫЕ НЕРАВЕНСТВА И РАЗДЕЛИМОСТЬ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ТРИКОМИ

О.Х. Каримов, А. Азамкулов
(Душанбе, ИМ НАН Таджикистана)
karimov_olim@mail.ru

В данной работе речь идет о коэрцитивных оценках и разделимости оператора Трикоми в гильбертовом пространстве. В работах (см.[1]–[4] и имеющиеся там ссылки) исследуются коэрцитивные свойства и разделимость дифференциальных операторов.

В пространстве $L_2(R^2)$ рассматриваем дифференциальное уравнение

$$M[u] = -(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}) + V(x, y)u(x, y) = f(x, y), \qquad (1)$$

где $V(x, y)$-положительная функция.

© Каримов О.Х., Азамкулов А., 2025

Для удобства записи вводим обозначение $F(x,y) = V^{1/2}(x,y)$.

Предположим, что для всех точек (x,y) из R^2 выполнены неравенства:

$$\left\| F^{-1/2}(x,y) \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} F^{-3/2}(x,y) \right\|^2 \leqslant \sigma_1, \quad (\forall (x,y) \in R^2)$$

$$\left\| F^{-1/2}(x,y) y^{\frac{1}{2}} \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} F^{-3/2}(x,y) \right\|^2 \leqslant \chi_1, \quad (\forall (x.y) \in R^2)$$

где $0 < \sigma_1, \chi_1 < 4$, а значение функции F и его производных взяты в точке (x,y).

Пусть, кроме того, выполнены неравенства

$$\left\| V^{-1/2}(x,y) \frac{\partial V(x,y)}{\partial y} V^{-1}(x,y) \right\|^2 \leqslant \sigma, \quad (\forall (x,y) \in R^2)$$

$$\left\| V^{-1/2}(x,y) y^{\frac{1}{2}} \frac{\partial V(x,y)}{\partial x} V^{-1}(x) \right\|^2 \leqslant \chi, \quad (\forall (x.y) \in R^2)$$

где $0 < \sigma, \chi < 4$.

Тогда справедлива следующая

Теорема 1. *При выполнении условия $\alpha < 2$, $\beta < 2$, $\frac{\sigma}{2\alpha} + \frac{\chi}{2\beta} < 1$ уравнение (1) разделяется в пространстве $L_2(R^2)$. Для всех $u(x,y) \in L_2(R^2) \cap W_2^2(R^2)$ таких, что $L[u] \in L_2(R^2)$ справедливы включения*

$$-(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}), \;\; V(x,y)u(x,y), \;\; y^{\frac{1}{2}} V^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x}, \;\; V^{1/2}(x,y) \frac{\partial u(x)}{\partial y} \in L_2(R^2).$$

При этом имеет место коэрцитивное неравенство

$$\|Vu; L_2(R^2)\| + \left\| y^{\frac{1}{2}} V^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x}; L_2(R^2) \right\| + \left\| V^{\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial y}; L_2(R^2) \right\| +$$

$$+ \left\| (\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}); L_2(R^2) \right\| \leqslant K \|f(x,y); L_2(R^2)\|,$$

где положительное число K не зависит от $u(x,y)$, $f(x,y)$.

Литература

1. Everitt W.N. Some properties of the domains of certain differential operators / W.N. Everitt, M. Gierz // Proc. London Math.Soc. — 1971. — Vol. 23, P. 301–324.

2. Бойматов К.Х. Теоремы разделимости, весовые пространства и их приложения / К.Х. Бойматов // Труды МИАН СССР. — 1984. — Т. 170, С. 37–76.

3. Zayed E.M.E. Separation of the Tricomi differential operator in Hilbert space with application to the existance and uniqueness theorem /E.M.E. Zayed, S.A. Omran // Int. J. Contemp. Math. Sciences. —2011.—Vol.6,—№ 8, P. 353–364.

4. Каримов О.Х. Коэрцитивные оценки, разделимость и коэрцитивная разрешимость нелинейных эллиптических дифференциальных уравнений недивергентного вида / О.Х. Каримов , З.Дж. Хакимова// Чебышевский сборник. — 2023. — Т. 23. — № 24(2), С. 197–213.

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ОЦЕНИВАНИЯ АСИМПТОТИКИ СПЕКТРА ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ В СЛУЧАЕ БЫСТРО РАСТУЩИХ ПОТЕНЦИАЛОВ

А.В. Качкина (Москва, МГУ)
alisa-kachkina@mail.ru

Рассматривается оператор Штурма–Лиувилля $\mathbb{L}_q$ в гильбертовом пространстве $L_2[0,+\infty)$, порождаемый дифференциальным выражением: $l_q(y) = -y''(x) + q(x)y(x)$, и граничным условием в нуле: $y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0$, где $q(x)$ — непрерывная на $[0,+\infty)$ действительнозначная функция. Область определения оператора $\mathbb{L}_q$: $D(\mathbb{L}_q) = \{y \in L_2[0,+\infty) : y, y'$ абсолютно непрерывны на любом $[a,b] \subset [0,+\infty)$, $-y''+q(x)y \in L_2[0,+\infty)$ и $y(0)\cos\alpha+y'(0)\sin\alpha = 0\}$. Если потенциал $q(x) \to +\infty$, $x \to +\infty$, то оператор $\mathbb{L}_q$ полуограничен снизу и имеет чисто дискретный спектр $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\lambda_n \to +\infty$, $n \to +\infty$ (Э. Ч. Титчмарш [1], А. М. Молчанов [2]). Поэтому можно говорить об асимптотике собственных значений, занумеровав их в порядке возрастания.

В данной работе исследуется метод нахождения асимптотики собственных значений оператора $\mathbb{L}_q$ для классов потенциалов, быстро растущих на бесконечности.

Обозначим через $\widetilde{\mathfrak{Q}}$ класс функций $q \in C[0,+\infty) \cap C^2(0,+\infty)$, хотя бы при одном значении $1 < \gamma < 4/3$ удовлетворяющих условиям:

$$q''(x) \geqslant 0, \quad x \geqslant x_0, \tag{1}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{xq'(x)}{q(x)} = +\infty \tag{2}$$

© Качкина А.В., 2025

$$q''(x) \leqslant (q'(x))^{\gamma}, \quad x \geqslant x_0. \tag{3}$$

Обозначим $c_n = (\pi n)^2$, $n \in \mathbb{N}$. В работе [3] доказано, что в случае $q \in \widetilde{\mathfrak{Q}}$ имеет место асимптотика $n \sim \frac{1}{\pi}\lambda_n^{1/2} p(\lambda_n)$, $n \to +\infty$. Отсюда получаем, что $\lambda_n \sim \frac{c_n}{p^2(\lambda_n)}$, $n \to +\infty$, то есть для некоторой последовательности $\alpha_n \to 1$, $n \to +\infty$ выполнено равенство: $\lambda_n = \frac{\alpha_n c_n}{p^2(\lambda_n)}$, $n \in \mathbb{N}$.

В принятых ранее обозначениях для натуральных i положим по определению: $R_n^0 = c_n$, $\quad L_n^i = \frac{\alpha_n c_n}{p^2(R_n^{i-1})}$, $\quad R_n^i = \frac{\alpha_n c_n}{p^2(L_n^i)}$.

Теорема. *Рассмотрим произвольную функцию $q \in \widetilde{\mathfrak{Q}}$ и обратную к ней функцию p. Зафиксируем для q введенные выше обозначения для последовательностей. Тогда в этих обозначениях для всех номеров n, больших некоторого $N \in \mathbb{N}$, верны следующие утверждения:*

$$1)\ L_n^i < L_n^{i+1},\ R_n^{i-1} > R_n^i; \qquad 2)\ L_n^i < \lambda_n < R_n^i, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Данная теорема доказывается, основываясь на характере роста функции p, обратной для потенциала. С помощью полученного метода можно исследовать поведение собственных значений оператора Штурма-Лиувилля для различных классов потенциалов, удовлетворяющих условиям формул (1), (2) и (3). Подобный метод с конечным числом итерационных шагов использован для нахождения асимптотики спектра оператора $\mathbb{L}_q$ в случае более узкого класса потенциалов в работе [4]. Асимптотики собственных значений оператора $\mathbb{L}_q$ могут использоваться при нахождении регуляризованных следов [5], [6], при решении обратных задач и при нахождении базисных свойств собственных функций.

Литература

1. Титчмарш Э. Ч. Разложение по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка / Титчмарш Э. Ч. // т.1, Москва, ИЛ, 1960.

2. Молчанов А. М. Об условиях дискретности спектра самосопряженных дифференциальных уравнений второго порядка / А. М.Молчанов // Труды Моск. матем. об-ва т.2, 1953, 169–200.

3. Козко А. И. Асимптотика спектра дифференциального оператора $-y'' + q(x)y$ с граничным условием в нуле и быстро растущим потенциалом / А.И.Козко // Дифференц. уравнения, 41:5 (2005), 611–622; Differ. Equ., 41:5 (2005), 636–648.

4. Качкина А. В., Оператор Штурма–Лиувилля с быстро растущим потенциалом и асимптотика его спектра / А. В.Качкина .// Чебышевский сборник, т. XXV, вып. 3 (94), 2024, с. 143–157.

5. Козко А. И. Регуляризованные следы сингулярных дифференциальных операторов с каноническими краевыми условиями / А.И. Козко , А. С.Печенцов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех. 2011. № 4, С. 11–17.

6. Садовничий В. А. Регуляризованные следы сингулярных дифференциальных операторов / В. А.Садовничий , А. С.Печенцов , А. И.Козко // Доклады РАН. 2009, том 427, с. 461-465.

О СХОДИМОСТИ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА С ОДНОРОДНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ ВТОРОГО РОДА

А.В. Климишин (Москва, РУДН)

sa-sha-02@yandex.ru

В данной работе использован метод [1] для построения решения смешанной краевой задачи с условиями второго рода на боковых гранях в цилиндрической области прямоугольного сечения с данными Коши на заданной поверхности.

В цилиндре прямоугольного сечения

$$D^{\infty} = \{(x, y, z) : 0 < x < l_x, 0 < y < l_y, -\infty < z < +\infty\}$$

рассмотрим область $D(F, H)$, то есть часть цилиндра, ограниченную с одной стороны плоскостью $z = H$, с другой — поверхностью

$$S = \{(x, y, z) : 0 < x < l_x, 0 < y < l_y, z = F(x, y) < H\},\ F \in C^2.$$

В области $D(F, H)$ рассмотрим следующую смешанную краевую задачу

$$\begin{aligned}
&\Delta u(M) = 0,\ M \in D(F, H),\\
&u|_S = f, \quad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = g,\\
&\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{x=0, l_x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{y=0,\, l_y} = 0.
\end{aligned}$$

© Климишин А.В., 2025

Пусть функции f и g в задаче заданы с погрешностью, то есть вместо f и g заданы функции f^δ и g^δ , такие что

$$||f^\delta - f||_{L_2(S)} \leqslant \delta, \quad ||g^\delta - g||_{L_2(S)} \leqslant \delta.$$

Построим приближенное решение, сходящееся к точному решению задачи при $\delta \to 0$.

Устойчивое приближенное решение будем строить на основе применения метода регуляризации Тихонова. В качестве приближенного решения рассматриваем экстремаль функционала Тихонова [2] с условным стабилизатором [3] нулевого порядка $\alpha > 0$.

Приближенное, устойчивое к погрешностям в данных, решение задачи может быть получено в виде

$$u_\alpha^\delta(M) = v_\alpha^\delta(M) + \Phi^\delta(M),\ M \in D(F, H).$$

Где

$$\Phi^\delta(M) = \int\limits_S \left[g^\delta(P)\tilde{\varphi}(M,P) - f^\delta(P)\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial n_P}(M,P)\right] d\sigma_P,$$

$$v_\alpha^\delta(M) = -\sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{\tilde{\Phi}_{nm}^\delta(a) e^{k_{nm}(z_M - a)}}{1 + \alpha e^{2k_{nm}(H-a)}} \cos\frac{\pi n x_M}{l_x} \cos\frac{\pi m y_M}{l_y} dxdy.$$

$\tilde{\Phi}_{nm}^\delta(a)$ — коэффициенты Фурье функции $\Phi^\delta(M)|_{M\in\Pi(a)}$:

$$\tilde{\Phi}_{nm}^\delta(a) = \frac{4\epsilon_n\epsilon_m}{l_x l_y} \int\limits_{\Pi(a)} \Phi^\delta(x,y,a) \cos\frac{\pi n x}{l_x} \cos\frac{\pi m y}{l_y} dxdy.$$

Для $a < \min\limits_{(x,y)} F(x,y)$ и $M \in \Pi(a)$, где

$$\Pi(a) = \{(x,y,z) : 0 < x < l_x, 0 < y < l_y, z = a\}.$$

а $\tilde{\varphi}(M,P)$ — функция источника исходной задачи

$$\tilde{\varphi}(M,P) = \frac{1}{2l_x l_y} C + \frac{2}{l_x l_y} \sum_{n,m=0, n^2+m^2\neq 0}^{\infty} \epsilon_n\epsilon_m \frac{e^{-k_{nm}|z_M - z_P|}}{k_{nm}} \times$$
$$\times \cos\frac{\pi n x_M}{l_x} \cos\frac{\pi m y_M}{l_y} \cos\frac{\pi n x_P}{l_x} \cos\frac{\pi m y_P}{l_y}$$

где

$$k_{nm} = \sqrt{\left(\frac{\pi n}{l_x}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{l_y}\right)^2}, \qquad \epsilon_n = \begin{cases} 1 & \text{n} \neq 0, \\ 0,5 & \text{n} = 0. \end{cases}$$

Для приближенного устойчивого решения обратной задачи вида $u_\alpha^\delta(M) = v_\alpha^\delta(M) + \Phi^\delta(M)$ доказывается теорема сходимости.

Теорема. *Пусть решение смешанной краевой задачи существует. Тогда для любого* $\alpha = \alpha(\delta)$ *такого, что* $\alpha(\delta) \to 0$ *и* $\delta/\sqrt{\alpha(\delta)} \to 0$ *при* $\delta \to 0$ *функция* $u_{\alpha(\delta)}$ *вида* $u_\alpha^\delta(M) = v_\alpha^\delta(M) + \Phi^\delta(M)$ *равномерно сходится при* $\delta \to 0$ *к точному решению в* $D(F + \varepsilon, H - \varepsilon)$, $0 < \varepsilon < 0,5(H - \max\limits_{(x,y)} F(x,y))$.

Данный подход может быть использован для построения эффективных вычислительных алгоритмов численного решения задачи. Актуальность решения определяется большим разнообразием моделей, используемых в приложениях, которые могут быть к ней сведены [3, 4].

Литература

1. Laneev E.B. Application of the minimum principle of a Tikhonov smoothing functional in the problem of processing thermographic data / E.B. Laneev, N.Yu. Chernikova, O. Baaj //Advances in Systems Science and Applications — 2021. — № 1. — С. 139–149.

2. Тихонов А.Н. Методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин // М. : Наука. — 1979.

3. Гласко В.Б. Обратные задачи математической физики / В.Б. Гласко // М. : Изд-во МГУ. — 1979.

4. Laneev E.B. On a linear inverse potential problem with approximate data on the potential field on an approximately given surface / E.B. Laneev, E.Yu. Ponomarenko // Eurasian mathematical journa. — 2023. — 14 (1) — С. 57–70.

ОЦЕНКИ ПРИБЛИЖЕНИЙ ФУНКЦИЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ В ПРОСТРАНСТВАХ С НЕСИММЕТРИЧНОЙ НОРМОЙ.

А.И. Козко (Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова)

prozerpi@yahoo.co.uk

Пусть $\mathbb{T}$ — одномерный тор, реализованный как отрезок $[-\pi;\pi]$ с отождествлёнными точками $-\pi$ и π. Через $L_p(\mathbb{T})$, $1 \leqslant p < +\infty$

© Козко А.И., 2025

обозначим пространство действительнозначных на $\mathbb{T}$ функций, суммируемых в p-ой степени, с нормой

$$\|f(\cdot)\|_p = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

В случае $p = +\infty$ полагаем, что $f \in C(\mathbb{T})$ и $\|f\|_\infty = \max_{x\in\mathbb{T}} |f(x)|$. Для $r \in \mathbb{N}$, $a > 0$, $h \in \mathbb{R}$ определим обобщённый разностный оператор порядка r:

$$\Delta_h^{a,r}(f,x) = \Delta_h \Delta_{ah} \ldots \Delta_{a^{r-1}h}(f,x),$$

$\Delta_h f(x) = f(x) - f(x+h)$. Обозначим $\omega_{a,r}(f;h) = \sup_{|t|\leqslant h} \|\Delta_t^{a,r} f\|_p$ и $E_n(f)_{L_p(\mathbb{T})} = \inf_{t\in\mathbb{T}_n} \|f - t\|_{L_p(\mathbb{T})}$ — наилучшее приближение функции f в норме $L_p(\mathbb{T})$ тригонометрическими полиномами степени не выше, чем n. Нами получен аналог прямой теоремы приближения для несимметричных пространств со знакочувствительными весами, в которой оценивается наилучшее приближение через модуль гладкости см. [1]. Различным задачам теории приближения в несимметричных пространствах посвящено много работ см. [1]–[5] и список цитируемой литературы там. Приведём следствие для симметричного случая (для обычной L_p нормы без знакочувствительных весов).

Следствие 1. *Для любого $r, n, a \in \mathbb{N}$ и $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — возрастающей последовательности положительных чисел, $\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = +\infty$, $f \in L_p$, $p \in [1;+\infty]$ справедливо $E_n(f)_{L_p(\mathbb{T})} \leqslant C\omega_{a,r}(f, \lambda_n^{-1})_p$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ с положительной константой C, зависящей от n.*

Отметим известные случаи: для $a = 1$, т.е. для классического модуля непрерывности r-го порядка в обычных $L_p(\mathbb{T})$ пространствах, следствие 1 было получено С.Б. Стечкиным в 1949 г. Он интересовался случаем $p = +\infty$, хотя его методы дают возможность без труда получить это утверждение при любом $p \in [1;+\infty]$. Случай $a = 1$ и $r = 1$ в пространствах $C(\mathbb{T}) = L_\infty(\mathbb{T})$ с $\lambda_n = 2nk$, $k \in \mathbb{N}$ был изучен в работах Н.П. Корнейчука [6]. Случай $a = 1$ и $r = 2$ в пространствах $C(\mathbb{T}) = L_\infty(\mathbb{T})$ с $\lambda_n = 4n$ был получен в работе В.В. Жука и В.А. Шалаева [7]. Для случая $a \in \mathbb{N}$ нечётно, $a \geqslant 3$ и $p = 2$ оценка на наилучшую константу $C = C(a, r, 2, \lambda_n)$ в неравенстве Джексона-Стечкина для $\lambda_n = \frac{n}{\gamma\pi}$, $\gamma \geqslant 1$ получена в работе [8].

Литература

1. Козко А. И. Оценки приближений функций тригонометрическими полиномами в пространствах с несимметричной нормой и знакочувствительным весом / А.И. Козко // Чебышевский сборник. — 2024. — Т. 25, № 3. — С. 177–186.

2. Козко А.И. Многомерные неравенства разных метрик в пространствах с несимметричной нормой / А.И. Козко // Матем. сб. — 1998. — Т. 189, № 9. — С. 85–106.

3. Козко А.И. Аналоги неравенств Джексона–Никольского для тригонометрических полиномов в пространствах с несимметричной нормой / А.И. Козко // Матем. заметки. — 1997. — Т. 61, № 5. — С. 687–699.

4. Козко А.И. Полнота ортогональных систем в несимметричных пространствах со знакочувствительным весом / А.И. Козко // Современная математика и ее приложения — 2005. — Т. 24. — С. 135–147.

5. Козко А.И. О порядке наилучшего приближения в пространствах с несимметричной нормой и знакочувствительным весом на классах дифференцируемых функций / А.И. Козко // Изв. РАН. Сер. матем. — 2002. — Т. 66. — С. 103–132.

6. Корнейчук Н.П. Точные константы в теории приближения / Н.П. Корнейчук. — М. : Наука, 1987. — 424 с.

7. Жук В.В. Аппроксимация периодических функций / В.В. Жук. — Л. : ЛГУ, 1982. — 366 с.

8. Козко А. И., Рождественский А. В. О неравенстве Джексона в L_2 с обобщенным модулем непрерывности / А.И. Козко, А.В. Рождественский // Матем. сб. — 2004. — Т. 195, № 8. — С. 3–46.

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ М.М.ЛАВРЕНТЬЕВА[1]

М.Ю. Кокурин, Д.А. Пахмутов (Йошкар-Ола, МарГУ)
kokurinm@yandex.ru, dmitryaric@mail.ru

Рассмотрим волновое уравнение

$$\frac{1}{c^2(x)}u_{tt}(x,t)-\Delta u(x,t)=\delta(x-z)\delta(t),\ \ (x,t)\in\mathbb{R}^3;\ \ u(x,t)|_{t<0}\equiv 0. \quad (1)$$

Задача (1) возникает при моделировании акустических и электромагнитных колебаний в трехмерной среде $\mathbb{R}^3=\{(x,x_3)\}$, свойства которой не меняются по направлению x_3. Исследуемая обратная задача (ОЗ) заключается в определении коэффициента $c(x)$ по результатам наблюдения полей $u(x,t)$, отвечающих различным положениям источника $z\in Z$. Среда однородна вне априори заданной области

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 24-21-00031).
© Кокурин М.Ю., Пахмутов Д.А., 2025

$D \subset \mathbb{R}^2$, так что $c(x) \equiv c_0$ при $x \in \mathbb{R}^2 \setminus D$, где константа $c_0 > 0$ известна, а функция $c = c(x)$ при $x \in D$ подлежит определению. Наблюдение поля проводится в точках кривой Y, $Y \cap \overline{D} = \varnothing$. Обозначим $\xi(x) = 1/c^2(x) - 1/c_0^2$, $x \in D$. Тогда ОЗ сводится к решению интегрального уравнения М.М.Лаврентьева [1]

$$\int\limits_D \xi(x) \ln|x-y| \ln|x-z| dx = F(y,z), \ (y,z) \in Y \times Z. \qquad (2)$$

Говорим, что $M \subset \Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$ является множеством единственности для гармонических функций вне $\overline{D}$, если для любой $u(x)$, гармонической в Ω, и такой, что $|u(x)| \leqslant C(1 + \ln|x|)$, $x \in \Omega$, $|x| \geqslant R$ для некоторых C, R, условие $u(x) = 0$, $x \in M$ влечет $u(x) = 0$, $x \in \Omega$.

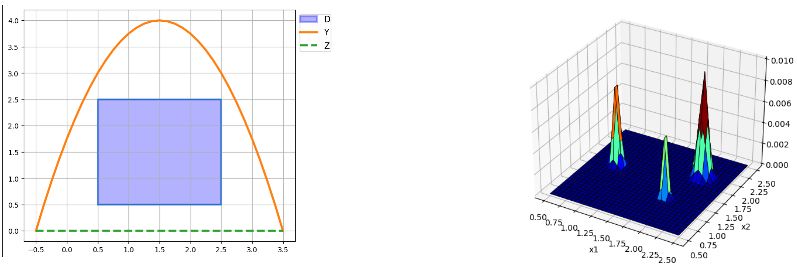


Рис. 1. Кривые Y, Z и область D (слева). Точное решение (справа).

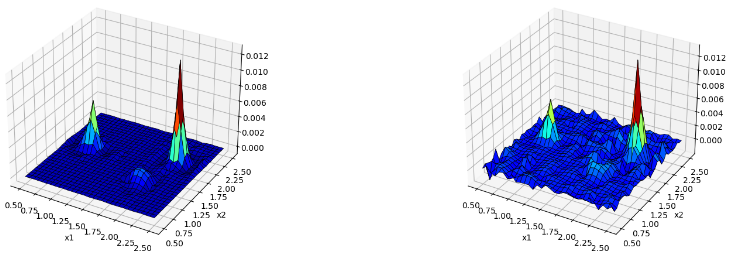


Рис. 2. Приближенное решение при $\delta = 0.0$ (слева) и $\delta = 0.1$ (справа).

Теорема 1. *Пусть кривая M делит $\mathbb{R}^2$ на две неограниченные области, одна из которых содержит $\overline{D}$. Тогда M — множество единственности.*

Если в Теореме 1 M — аналитическая кривая, то и любой ее открытый сегмент есть множество единственности.

Теорема 2. *Пусть Y, Z есть множества единственности для гармонических функций в Ω. Тогда уравнение (2) имеет не более одного решения.*

Теорема 3. *Пусть Y, Z — замкнутые кривые класса C^2, охватывающие множество $\overline{D}$, либо одна из них есть множество единственности, а другая — замкнутая кривая класса C^2, охватывающая $\overline{D}$. Тогда (2) имеет не более одного решения.*

В условиях теорем 2,3 ОЗ имеет единственное решение. На Рис.1,2 представлены результаты численного эксперимента по решению уравнения (2). В правую часть (2) вносилась случайная абсолютная погрешность уровня δ.

Литература

1. Кокурин М.Ю. О редукции нелинейной обратной задачи для гиперболического уравнения на плоскости к линейному интегральному уравнению // Выч. мет. программирование. — 2009. — Т.10, № 3. — С.300–305.

ТРЕХМОДОВЫЕ БИФУРКАЦИИ СЕГНЕТОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ФАЗ КРИСТАЛЛА

И.В. Колесникова (Воронеж, ВГУ)
kolinna@inbox.ru

В теории Л.Д. Ландау [1], [2] модулированные сегнетоэлектрические фазы неоднородных кристаллов определяются нелинейными дифференциальными уравнениями (уравнениями Эйлера – Лагранжа экстремалей функционалов энергии). Нелинейность уравнений задается термодинамическими потенциалами, алгебраическая структура которых определяется как на основе опытных данных, так и на основе общих теоретических соображений.

Общематематический аспект задачи о фазовых переходах в кристаллах заключен в бифуркационном анализе экстремалей гладкого фредгольмова функционала (с параметрами) вблизи точки минимума с многомерным вырождением [3]. Решение этой задачи можно получить посредством редукции Ляпунова–Шмидта, то есть сведением к анализу ключевых функций, представленных в виде многопараметрических семейств полиномов от нескольких переменных. Вычисление главной части ключевой функции осуществляется через

© Колесникова И.В., 2025

ритцевскую аппроксимацию (вообще говоря, нелинейную) функционала по конечной совокупности мод бифуркации.

Основной полученный результат — описание допустимых 3-модовых раскладов экстремалей вблизи симметричной min–особенности 6–го порядка посредством сведения к задаче о поведении симметричного полинома третьей степени в симметричной треугольной области.

В случае трехкомпонентного параметра порядка при описании модулированных (несоизмеримых) по одному направлению сегнетоэлектрических структур кристаллов используется [1] потенциал

$$\Pi = |w|^6 + \beta\,|w|^4 + \alpha\,|w|^2 + q\,(w_1^2 w_2^2 + w_1^2 w_3^2 + w_2^2 w_3^2)\,|w|^2 + \\ + \varkappa\,(w_1^2 w_2^2 + w_1^2 w_3^2 + w_2^2 w_3^2),$$

$$w := (w_1, w_2, w_3)^\top\,,$$

входящий в лагранжиан

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\,\left(\left|\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right|^2 - \mu\left|\frac{\partial w}{\partial z}\right|^2\right) + \Pi(w)$$

функционала энергии

$$V = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \mathcal{L}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}, \frac{\partial w}{\partial z}, w\right) dz.$$

Сегнетоэлектрические фазы, соответствующие экстремалям этого функционала при условии периодичности $w(z+2\pi) = w(z)$, определяются уравнением $f(w) = 0, \quad w \in E, \quad f(w) \in F$, где

$$f(w) := \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} + \mu\,\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \operatorname{grad}\Pi(w)\,.$$

Нелинейный оператор f, действующий из банахова пространства

$$E := \Pi^4_{2\pi} = \{w \in C^4(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)\,\big|\,w(z+2\pi) = w(z)\}$$

(пространства четырежды дифференцируемых $2\pi-$периодических функций со значениями в $\mathbb{R}^3$) в банахово пространство $F := \Pi^0_{2\pi}$ (пространство непрерывных периодических функций со значениями в $\mathbb{R}^3$), является фредгольмовым (аналитического) индекса нуль. Исследование уравнения можно провести, перейдя к ключевой функции.

Группа G симметрий исходного уравнения порождена преобразованиями

$$g_1 : \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}, \quad g_2 : \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} w_1 \\ -w_2 \\ w_3 \end{pmatrix},$$

$$g_3 : \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ -w_3 \end{pmatrix},$$

$$g_\omega : \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} w_\omega(1) \\ w_\omega(2) \\ w_\omega(3) \end{pmatrix}, \quad \forall \omega \in S_3,$$

$$g_4 : \begin{pmatrix} w_1(z) \\ w_2(z) \\ w_3(z) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} w_1(-z) \\ w_2(-z) \\ w_3(-z) \end{pmatrix},$$

$$J_\varphi : \begin{pmatrix} w_1(z) \\ w_2(z) \\ w_3(z) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} w_1(z+\varphi) \\ w_2(z+\varphi) \\ w_3(z+\varphi) \end{pmatrix}, \qquad \forall \varphi \in \mathbb{R},$$

S_3 — группа перестановок третьего порядка.

При некоторой локализации параметров получим в нуле 6−мерное вырождение со следующими модами бифуркации:

$$e_1 = \begin{pmatrix} c(z) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} s(z) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ c(z) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ s(z) \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$e_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c(z) \end{pmatrix}, \quad e_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ s(z) \end{pmatrix},$$

где

$$c(z) = \sqrt{2}\cos(z), \qquad s(z) = \sqrt{2}\sin(z).$$

В линейной оболочке $\mathcal{N} = Span(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6)$, естестственно отождествляемой с $\mathbb{R}^6$ (пространством ключевых параметров), индуцируется действие группы G. Полученный сужением образ этой группы в $SO(6)$ (в специальной группе ортогональных матриц шестого порядка) также обозначим G. Нетрудно убедиться в том, что действие группы G в $\mathbb{R}^6$ порождено матрицами

$$U_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$U_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad U_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

U_ω — матрица оператора

$$(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2, \xi_3, \eta_3)^\top \longmapsto (\xi_{\omega(1)}, \eta_{\omega(1)}, \xi_{\omega(2)}, \eta_{\omega(2)}, \xi_{\omega(3)}, \eta_{\omega(3)})^\top,$$

$$U_\varphi = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Теорема. *Ключевая функция* $W(\xi) := \inf_{x:g(x)=\xi} V(x), \qquad \xi \in \mathbb{R}^6$, *где*

$$g(x) = (g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6)^\top, \qquad g_j(w) := \langle w,\ e_j \rangle$$

($\langle w,\ e_j \rangle = \int\limits_0^{2\pi} w e_j dx$*), наследует симметрию функционала* V *: функция* W *инвариантна относительно действия* G *на* $\mathbb{R}^6$.

Если воспользоваться алгоритмом вычисления тейлоровских разложений ключевых функций [3] и указанной выше симметрией, то можно получить следующее утверждение.

Теорема. *Ключевая функция* $W(\xi)$ *имеет (с точностью до масштабирующих преобразований аргумента и общего множителя,* *зависящего от констант термодинамического потенциала) следующий вид:*

$$(I_1+I_2+I_3)^3+\varepsilon(I_1+I_2+I_3)^2+\delta(I_1+I_2+I_3)+$$
$$+\gamma_1\left(I_4^2+I_5^2+I_6^2\right)+\gamma_2\left(I_7^2+I_8^2+I_9^2\right)+$$
$$+\left(p_1\left(I_4^2+I_5^2+I_6^2\right)+p_2\left(I_7^2+I_8^2+I_9^2\right)\right)(I_1+I_2+I_3)+$$
$$+q_1I_4I_5I_6+q_2I_7I_8I_9+$$
$$+O((I_1+I_2+I_3)^4),$$

где $I_1, \dots I_9$ — образующие инварианты действия окружности $z\longrightarrow\exp(i\varphi)z$ (вектор $\xi\in\mathbb{R}^6$ отождествлен с комплексным вектором $z=(z_1,z_2,z_3)^\top\in\mathbb{C}^3$, $z_1=\xi_1+i\xi_2$, $z_2=\xi_3+i\xi_4$, $z_3=\xi_5+i\xi_6$):

$$I_1=\xi_1^2+\xi_2^2,\quad I_2=\xi_3^2+\xi_4^2,\quad I_3=\xi_5^2+\xi_6^2,$$

$$I_4=\xi_1\xi_3+\xi_2\xi_4,\quad I_5=\xi_3\xi_5+\xi_4\xi_6,\quad I_6=\xi_5\xi_1+\xi_6\xi_2,$$
$$I_7=-\xi_1\xi_4+\xi_2\xi_3,\quad I_8=-\xi_3\xi_6+\xi_4\xi_5,\quad I_9=-\xi_5\xi_2+\xi_6\xi_1.$$

Коэффициенты $\varepsilon,\delta,\gamma_k,q_k$ допускают явные выражения через коэффициенты термодинамического потенциала $\beta,\alpha,q,\varkappa$. При этом $\varepsilon,\delta,\gamma_k=O(\beta,\alpha,\varkappa)$.

Образующей системой инвариантов действия группы G (используемой в формулировке теоремы) является следующий набор многочленов:

$$J_1=I_1+I_2+I_3,\quad J_2=I_4^2+I_5^2+I_6^2,\quad J_3=I_7^2+I_8^2+I_9^2,$$

$$J_4=I_4I_5I_6,\quad J_5=I_7I_8I_9.$$

После введения полярных координат $z_1=r_1\exp(i\psi_1)$, $z_2=r_2\exp(i\psi_2)$, $z_3=r_3\exp(i\psi_3)$ получим функцию в форме

$$U=J_1^3+\varepsilon\ J_1^2+\delta\ J_1+\gamma_1\ J_2+\gamma_2\ J_3+(p_1\ J_2+p_2\ J_3)J_1+q_1J_4+q_2J_5+O(|\xi|^8)=$$
$$=\sigma_1^3+\varepsilon\ \sigma_1^2+\delta\ \sigma_1+(\gamma_1\ (\cos^2(\psi_1-\psi_2)+\cos^2(\psi_2-\psi_3)+\cos^2(\psi_3-\psi_1))+$$
$$+\gamma_2\ (\sin^2(\psi_1-\psi_2)+\sin^2(\psi_2-\psi_3)+\sin^2(\psi_3-\psi_1))\sigma_2+$$
$$+(p_1\ (\cos^2(\psi_1-\psi_2)+\cos^2(\psi_2-\psi_3)+\cos^2(\psi_3-\psi_1))+$$
$$p_2\ (\sin^2(\psi_1-\psi_2)+\sin^2(\psi_2-\psi_3)+\sin^2(\psi_3-\psi_1)))\sigma_1\sigma_2+$$
$$+(q_1\cos(\psi_1-\psi_2)\cos(\psi_2-\psi_3)\cos(\psi_3-\psi_1)+$$

$$q_2 \sin(\psi_1-\psi_2)\sin(\psi_2-\psi_3)\sin(\psi_3-\psi_1))\sigma_3 + O(|r|^8),$$

$$\sigma_1 = r_1^2+r_2^2+r_3^2, \qquad \sigma_2 = r_1^2r_2^2+r_2^2r_3^2+r_1^2r_3^2, \qquad \sigma_3 = r_1^2r_2^2r_3^2.$$

Точки, стационарные по ψ_j, находятся из уравнения $\frac{\partial U}{\partial \psi_j}=0$. Ясно, что стационарные по ψ_j точки определяются нулями функции $\sin(2(\psi_j-\psi_k)$. Нетрудно при этом заметить, что следующие подмножества (и их пересечения) являются квазиинвариантными подмногообразиями для этой функции:

$$\mathcal{M}_{m,n} := \{\varphi_1 - \ \varphi_2 \ = m\pi/2, \ \ \varphi_2 - \ \varphi_3 = n\pi/2\}.$$

Сузив $\widetilde{U}$ на $\mathcal{M}_{m,n}$, получим набор (редуцированных) функций вида

$$W = \sigma_1^3 + \varepsilon\, \sigma_1^2 + \delta\, \sigma_1 + p\, \sigma_1\sigma_2 + \gamma\, \sigma_2 + q\, \sigma_3,$$

анализ которых можно осуществить посредством вторичных редукций

Главная часть $\widetilde{U}$ ключевой функции после вторичной редукции принимает следующий вид:

$$\sigma_1^3 + \varepsilon\, \sigma_1^2 + \delta\, \sigma_1 + p\, \sigma_1\sigma_2 + \gamma\, \sigma_2 + q\, \sigma_3,$$

$$\sigma_1 = r_1^2+r_2^2+r_3^2, \quad \sigma_2 = r_1^2r_2^2+r_1^2r_3^2+r_2^2r_3^2, \quad \sigma_3 = r_1^2r_2^2r_3^2.$$

В полярных координатах $r_1 = r\cos(\varphi_1),\ r_2 = r\cos(\varphi_2),\ r_2 = r\cos(\varphi_3)$ получим $\sigma_1 = r^2$,

$$\sigma_2 = r^4\left(\cos^2(\varphi_1)+\cos^2(\varphi_2)-\cos^4(\varphi_1)-\cos^4(\varphi_2)-\cos^2(\varphi_1)\cos^2(\varphi_2)\right),$$

$$\sigma_3 = r^6\left(\cos^2(\varphi_1)\cos^2(\varphi_2)-\cos^2(\varphi_1)\cos^2(\varphi_2)\left(\cos^2(\varphi_1)+\cos^2(\varphi_2)\right)\right).$$

Множество критических точек функции W является (при фиксированных значениях параметров) пересечением поверхностей M_0, M_1 и M_2, определяемых уравнениями $\frac{\partial V}{\partial r}=0$ (поверхность радиально стацинарных точек) и $\frac{\partial V}{\partial \varphi_1}=0, \quad \frac{\partial V}{\partial \varphi_2}=0$ (поверхности стацинарных точек по тангенциальным переменным $\varphi_1,\ \varphi_2$).

M_0 задается уравнением

$$\begin{gathered}6r^5+4\varepsilon\, r^3+2\delta\, r \ + \ 2r^3(3p\, r^2+\gamma)(\cos^2(\varphi_1)+\cos^2(\varphi_2)-\cos^4(\varphi_1)- \\ -\cos^4(\varphi_2)-\cos^2(\varphi_1)\cos^2(\varphi_2))+6q\, r^5(\cos^2(\varphi_1)\cos^2(\varphi_2)- \\ -\cos^2(\varphi_1)\cos^2(\varphi_2)(\cos^2(\varphi_1)+\cos^2(\varphi_2)))=0.\end{gathered}$$

Поверхность M_k задается уравнением

$$(p\,r^2+\gamma)\frac{\partial\sigma_2}{\partial\varphi_k}+q\,\frac{\partial\sigma_3}{\partial\varphi_k}=0.$$

Множество всех критических точек совпадает с пересечением $M_0\cap M_1\cap M_2$. Пересечение $M_1\cap M_2$ определяется уравнением

$$(p\,r^2+\gamma)\,\mathrm{grad}_\varphi\,\sigma_2+q\,\mathrm{grad}_\varphi\,\sigma_3=0.$$

Часть этого множества определяется соотношениями

$$(p\,r^2+\gamma)=0,\quad \mathrm{grad}_\varphi\,\sigma_3=0.$$

Остальные точки данного множества определяются (при различных значениях параметров) уравнением $[\sigma_2,\sigma_3]=0$, где $[\sigma_2,\sigma_3]$ — якобиан (скобка Пуассона) функций σ_2,σ_3 (по φ_1,φ_2).

Количество клеточных комплексов, изображающих bif–расклады критических точек (в случае трех мод), весьма обширно и в полном объеме пока не известно. Среди максимальных комплексов (состоящих из 125 элементов)

Литература

1. Изюмов Ю.А. Фазовые переходы и симметрия кристаллов. / Изюмов Ю.А., Сыромятников В.И. // — Москва, Наука. — 1984. — 247 с.

2. Широков В.Б. Феноменологическое описание фазовых переходов в тонких пленках В.Н. $BaTiO_3$ / В.Б.Широков , Ю.И.Юзюк , B.Dkhil, В.В.Леманов // Физика твердого тела. — Том 50, вып. 5 — (2008) — С. 889–892.

3. Даринский Б.М. Бифуркации экстремалей фредгольмовых функционалов / Б.М.Даринский , Ю.И.Сапронов , С.Л.Царев // Современная математика. Фундаментальные направления. — М.: МАИ. — Т.12. — 2004. — С.3–140.

ПОЛУГРУППЫ ДЛЯ ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ МЕР

В.Н. Колокольцов, Э.Л. Шишкина
(Москва, ВШЭ; Воронеж, ВГУ)
ilina_ dico@mail.ru

Мы предлагаем теорему, которая дает точную форму полугруппы для интеграла Римана-Стилтьеса с мерой, имеющей счетное число экстремумов.

Рассмотрим интеграл $If(t) = \int\limits_a^t f(y)dF(y)$, $a \in \mathbb{R}$. Предположим, что функция F непрерывна, имеет конечную вариацию и такая, что для дискретного набора $a_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$, $|k| < K$ с $K \in \mathbb{N}$ или $K = \infty$, F строго возрастает на $[a_{2k}, a_{2k+1}]$ и строго убывает на $[a_{2k-1}, a_{2k}]$ для всех k. Пусть S — некоторая подходящая функция. Тогда обратный дифференциальный оператор, решающий уравнение $IG = S$, задается формулой

$$G(x) = (LS)(x) = \frac{dS(x)}{dF(x)} = \lim_{\delta\to 0} \frac{S(x+\delta) - S(x)}{F(x+\delta) - F(x)}, \tag{1}$$

которая справедлива для любого непрерывного G и всех точек x. В силу условий, наложенных на F, производная $F'(x)$ существует и не обращается в нуль почти для всех точек x. Для этих точек

$$G(x) = LS(x) = \frac{S'(x)}{F'(x)}.$$

Теорема 1. *При выполнении наложенных выше условиях на F, оператор L порождает сильно непрерывную полугруппу на множестве функций, непрерывных вне множества $\{a_{2k}\}$ с левыми и правыми пределами в этих точках. Полугруппа имеет инвариантные пространства $C([a_{2k}, a_{2k+2}])$, где она действует по формуле*

$$T_tS(x)=\begin{cases} S[(F - F(a_{2k}))^{-1}(t + F(x) - F(a_{2k}))], \\ \textit{при } x \in [a_{2k}, a_{2k+1}], t\leqslant F(a_{2k+1})-F(x), \\ S[(F - F(a_{2k+2}))^{-1}(t + F(x) - F(a_{2k+2}))], \\ \textit{при } x \in [a_{2k+1}, a_{2k+2}], t\leqslant F(a_{2k+1})-F(x), \\ S(a_{2k+1}), x \in [a_{2k}, a_{2k+2}], \textit{при } t\geqslant F(a_{2k+1})-F(x). \end{cases}$$

© Колокольцов В.Н., Шишкина Э.Л., 2025

Приведем пример. Пусть

$$F(x)=\left\{\begin{array}{ll} x & \text{если } 0\leqslant x\leqslant 1; \\ 2-x & \text{если } 1<x\leqslant 2 \end{array}\right. \tag{2}$$

и $f \in C[0,2]$, такая что $f(1)=0$. Тогда $a_0=0$, $a_1=1$, $a_2=2$ и полугруппа, построенная по Теореме 1, имеет вид

$$T_t f(x)=\begin{cases} f\left(x+t\right), & x\in[0,1), \quad t\leqslant 1-x, \\ f\left(x-t\right), & x\in[1,2], \quad t\leqslant x-1, \\ 0,\ x\in[0,2], & t>1-F(x). \end{cases}$$

Построенную полугруппу можно использовать, например, для построения дробных степеней операторов. А именно, известно [1], что дробная степень $(-A)^{\alpha}$, $0<\alpha<1$ задается формулой

$$(-A)^{\alpha} f=\frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\int\limits_0^{\infty} t^{-\alpha-1}(T_t-I)f(x)dt, \qquad f\in D(A). \tag{3}$$

Рассмотрим оператор $D_F f(x)=\frac{d}{dF(x)}f(x)$, где $F(x)$ задается формулой (1). Пусть $f(1)=0$, тогда, по формуле (2), получим при $0<\alpha<1$

$$\left(-\frac{d}{dF(x)}\right)^{\alpha} f(x)=\frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\Bigg[I_{[0,1]}(x)\int\limits_0^{1-x} t^{-\alpha-1}(f(x+t)-f(x))dt+$$

$$+\,I_{[1,2]}(x)\int\limits_0^{x-1} t^{-\alpha-1}(f(x-t))-f(x))dt+\Bigg]=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\Bigg[I_{[0,1]}(x)\int\limits_x^{1}(t-x)^{-\alpha-1}(f(t)-f(x))dt-$$

$$-\,I_{[1,2]}(x)\int\limits_1^{x}(x-t)^{-\alpha-1}(f(t)-f(x))dt\Bigg].$$

Литература

1. Balakrishnan A.V. An operational calculus for infinitesimal generators of semigroups / A.V. Balakrishnan. // Transactions of the American Mathematical Society. — 1959. — V. 91, № 2. —Pp. 330–353.

О НЕКОТОРЫХ СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ОПЕРАТОРА ДИРАКА

А.В. Кондаурова (Воронеж, ВГУ)
kiseleva@math.vsu.ru

В работе рассматривается оператор Дирака:

$$(Ly)(x) = By'(x) + Q(x)y(x),$$

$$y_1(0) = y_1(1), \quad y_2(0) = y_2(1).$$

Здесь $y(x) = (y_1(x), y_2(x))^T$ (T — знак транспонирования), $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $Q(x) = \begin{pmatrix} 0 & q_2(x) \\ -q_1(x) & 0 \end{pmatrix}$, $q_j(x) \in C[0,1]$, все функции комплекснозначные. Считаем, что оператор действует в пространстве непрерывно-дифференцируемых вектор-функций, удовлетворяющих заданному краевому условию.

Пусть функции $z_{ij}(x)$, $i,j = 1,2$ определены формулами типа операторов преобразования из [1, Леммы 4–6]), $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$ — резольвента оператора L (E — единичный оператор, λ — спектральный параметр). Справедливо утверждение:

Теорема. *Пусть* $y_{1j}(x) = e^{\lambda x} z_{1j}(x)$, $y_{2j}(x) = e^{-\lambda x} z_{2j}(x)$, $j = 1,2$. *Имеет место формула:*

$$R_\lambda f(x) = (M_\lambda f)(x) + \Omega_\lambda(x, f), \quad f = (f_1, f_2)^T.$$

Здесь $(M_\lambda f)(x) = \int\limits_0^x M(x,t,\lambda) f(t)dt$, $M(x,t,\lambda) = (M_{ij})_{i,j=1,2}$,
$M_{i1} = \begin{vmatrix} y_{i1}(x) & y_{i2}(x) \\ y_{21}(t) & y_{22}(t) \end{vmatrix}$, $M_{i2} = \begin{vmatrix} y_{i1}(x) & y_{i2}(x) \\ y_{11}(t) & y_{12}(t) \end{vmatrix}$,
$\Omega_\lambda(x,f) = (\Omega_1(x,\lambda,f), \Omega_2(x,\lambda,f))^T$,

$$\Omega_k(x,\lambda,f) = \upsilon_{k1}(x)[(y_{22}, f_1) + (y_{12}, f_2)] + \upsilon_{k2}(x)[(y_{21}, f_1) + (y_{11}, f_2)],$$

где

$$\upsilon_{11}(x) = \frac{y_{11}(x)}{\Delta}[y_{11}(1) - y_{11}(1)y_{22}(1) + y_{21}(1)y_{12}(1)] + \frac{y_{12}(x)}{\Delta} y_{21}(1),$$

$$\upsilon_{12}(x) = -\frac{y_{11}(x)}{\Delta} y_{12}(1) - \frac{y_{12}(x)}{\Delta}[y_{22}(1) - y_{11}(1)y_{22}(1) + y_{12}(1)y_{21}(1)],$$

© Кондаурова А.В., 2025

$$\upsilon_{21}(x)=\frac{y_{21}(x)}{\Delta}[y_{11}(1)-y_{11}(1)y_{22}(1)+y_{21}(1)y_{12}(1)]+\frac{y_{22}(x)}{\Delta}y_{21}(1),$$

$$\upsilon_{22}(x)=-\frac{y_{21}(x)}{\Delta}y_{12}(1)-\frac{y_{22}(x)}{\Delta}[y_{22}(1)-y_{11}(1)y_{22}(1)+y_{12}(1)y_{21}(1)],$$

$\Delta=(1-y_{11}(1))(1-y_{22}(1))-y_{12}(1)y_{21}(1)$, $(f,g)=\int\limits_0^1 f(x)g(x)dx.$
Вектор-функция $(M_\lambda f)(x)$ является целой по λ.

В докладе приводятся оценки для компонент $R_\lambda f$, которые позволяют, в частности, установить равномерную сходимость ряда по с.п.ф. для функций из области определения оператора L. Кроме того, данное представление используется в смешанной задаче, приводящей к спектральной задаче для оператора L, с применением резольвентного подхода в методе Фурье.

Литература

1. Бурлуцкая М. Ш. Система Дирака с недифференцируемым потенциалом и периодическими краевыми условиями / М.Ш. Бурлуцкая, В.В. Корнев, А.П. Хромов // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2012. — Т. 52, № 9. — С. 1621–1632.

ФУНКЦИЯ ГРИНА ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В КОНУСЕ

А.Н. Коненков (Рязань, РГУ)
an.konenkov@gmail.com

Краевые задачи для уравнения теплопроводности в областях, вырождающихся при $t=0$, исследовались во многих работах, см., например, [1-3] и цитированную там литературу.

Обозначим через $L=\partial_t-\Delta u$ оператор теплопроводности и через

$$Z(x,t)=(4\pi t)^{-n/2}e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\theta(t),$$

где θ – функция Хевисайда, его фундаментальное решение.

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, а ее граница $\partial\Omega\in C^\infty$. В конусе

$$K=\{(tx,t)\,|\,x\in\Omega,\ 0<t<T\},\quad 0<T<\infty,$$

© Коненков А.Н., 2025

с боковой границей $\Sigma_K = \{(tx,t)\,|\,x \in \partial Q,\ 0 < t \leqslant T\}$, рассматривается первая краевая задача с нулевой граничной функцией

$$\left\{\begin{array}{rcl} Lu & = & f \text{ в } K, \\ u|_{\Sigma_K} & = & 0. \end{array}\right. \tag{1}$$

Мы устанавливаем некоторые свойства функции Грина $G_K(x,t,\xi,\tau)$ этой задачи.

Обозначим через $Q = \Omega \times (0,\infty)$ цилиндр с боковой границей $\Sigma_Q = \partial\Omega \times (0,\infty)$, а через $G_Q(x,\xi,t-\tau)$ функцию Грина первой краевой задачи для уравнения теплопроводности в Q.

Теорема 1. *Для* (x,t), $(\xi,\tau) \in \bar{K}\backslash\{0\}$, $0 < \tau < t \leqslant T$, *имеет место равенство*

$$G_K(x,t,\xi,\tau) = \tau^{-n} Z(x,t) Z^{-1}(\xi,\tau) G_Q(t^{-1}x, \tau^{-1}\xi, \tau^{-1} - t^{-1}).$$

Пусть $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_m \leqslant \ldots$ – собственные значения, а $\{\varphi_m\}$ – ортонормированный базис в $L_2(\Omega)$ из собственных функций задачи Дирихле для уравнения Лапласа в области Ω. Из теоремы 1, используя известную формулу для функции Грина первой краевой задачи в цилиндре, получаем представление функции Грина в конусе в виде ряда:

$$G_K(x,t,\xi,\tau) =$$
$$= (\tau t)^{-n/2} e^{\frac{\xi^2}{4\tau} - \frac{x^2}{4t}} \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m(t^{-1}x)\varphi_m(\tau^{-1}\xi) e^{-\lambda_m(\tau^{-1}-t^{-1})}.$$

Теорема 2. *При* $(x,t),(\xi,\tau) \in \bar{K}\backslash\{0\}$ *и* $\tau^{-1}-t^{-1} \geqslant 1$ *для функции Грина задачи (1) имеет место оценка*

$$G_K(x,t,\xi,\tau) \leqslant C(\tau t)^{-n/2} e^{-\lambda_1(\tau^{-1}-t^{-1})}.$$

С помощью установленных свойств функции Грина мы получаем утверждение о однозначной разрешимости первой краевой задачи в некотором классе функций, допускающем рост при $t \to 0+$.

Теорема 3. *Если правая часть* f *измерима и удовлетворяет неравенству*

$$|f(x,t)| \leqslant C t^{-n/2} e^{\lambda_1 t^{-1}}, \quad (x,t) \in K,$$

то существует единственное решение задачи (1) в классе непрерывных в $\bar{K}\backslash\{0\}$ *функций, удовлетворяющих условию*

$$\lim_{(x,t)\to 0\, \frac{x}{t} \in K} t^{n/2} e^{-\lambda_1 t^{-1}} u(x,t) = 0.$$

Это решение удовлетворяет в K оценке

$$|u(x,t)| \leqslant Ct^{-n/2}e^{\lambda_1 t^{-1}} \int_0^t \tau^{n/2}e^{-\lambda_1 \tau^{-1}} \|f(\cdot,\tau)\|_{L_\infty(\tau\Omega)}\, d\tau.$$

Литература

1. Ramazanov M. On the Solvability of Heat Boundary Value Problems in Sobolev Spaces / Ramazanov M., Jenaliyev M., Gulmanov N. // Opuscula Math. — 2022. — V. 42, № 8. — P. 75–91.

2. Jenaliyev M.T. On the solution to a two-dimensional heat conduction problem in a degenerate domain / M.T. Jenaliyev, M.I. Ramazanov, M.T. Kosmakova, Zh.M. Tuleutaeva // Eurasian mathematical journal. — 2020. — V. 11, № 3. — P. 89–94.

3. Jenaliyev M.T. On the Solvability of Heat Boundary Value Problems in Sobolev Spaces / M.T. Jenaliyev, M.T. Kosmakova, Zh.M. Tuleutaeva // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2022. — V. 43, № 8. — P. 2133–2144.

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ—СТОКСА С КОНЕЧНЫМ ВРЕМЕНЕМ ЖИЗНИ

А.В. Коптев (Санкт-Петербург, государственный университет морского и речного флота имени адмирала С.О. Макарова)

Alex.koptev@mail.ru

Рассматриваются *3D* уравнения Навье — Стокса для движения несжимаемой среды в поле силы тяжести

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right), \qquad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right), \qquad (2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} - g + \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right), \qquad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \qquad (4)$$

Где u,v,w,p основные неизвестные; Re неотрицательный параметр, называемый числом Рейнольдса.

© Коптев А.В., 2025

Уравнения (1-4) обладают интересными и не до конца изученными свойствами. Одно из них состоит в том, что в некоторых случаях решения существуют лишь в интервале времени $0 < t < t_*$ [1-2]. В этом случае решение имеет конечное время жизни t_*. В докладе предлагается пример построения таких решений.

Предлагается рассмотреть движение несжимаемой среды в большом резервуаре, когда влиянием ограничивающих поверхностей можно пренебречь. Считаем, что существует потенциал скорости φ и потребуем выполнимости следующих условий

$$u(x_0, y_0, z_0, t) = v(x_0, y_0, z_0, t) = w(x_0, y_0, z_0, t) = 0, \tag{5}$$

$$u \to u_0, \;\; v \to v_0, \;\; w \to w_0, \tag{6}$$

когда $x = \frac{c_x}{\varepsilon} + o(\frac{1}{\varepsilon}),\; y = \frac{c_y}{\varepsilon} + o(\frac{1}{\varepsilon}),\; z = \frac{c_z}{\varepsilon} + o(\frac{1}{\varepsilon})$ при $\varepsilon \to 0$.

Условия (5) соответствуют тому, что каждая из компонент вектора скорости в заданной точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ обращается в нуль. Условия (6) требуют асимптотического приближения на бесконечности для каждой из компонент вектора скорости к наперед заданным значениям u_0, v_0, w_0. При этом c_x, c_y, c_z, представляют ненулевые параметры. Можно показать, что решения уравнений (1-4) при условиях (5) определяется выражениями [3-4]

$$u = -\frac{A_1(t)sh(\frac{Re\theta_1}{2}) - B_1(t)sin(\frac{Re\lambda_1}{2})}{2(cos^2(\frac{Re\lambda_1}{4}) + sh^2(\frac{Re\theta_1}{4}))} + \frac{B_3(t)sh(\frac{Re\theta_3}{2}) + A_3(t)sin(\frac{Re\lambda_3}{2})}{2(cos^2(\frac{Re\lambda_3}{4}) + sh^2(\frac{Re\theta_3}{4}))},$$

$$v = -\frac{A_2(t)sh(\frac{Re\theta_2}{2}) - B_2(t)sin(\frac{Re\lambda_2}{2})}{2(cos^2(\frac{Re\lambda_2}{4}) + sh^2(\frac{Re\theta_2}{4}))} + \frac{B_1(t)sh(\frac{Re\theta_1}{2}) + A_1(t)sin(\frac{Re\lambda_1}{2})}{2(cos^2(\frac{Re\lambda_1}{4}) + sh^2(\frac{Re\theta_1}{4}))},$$

$$w = -\frac{A_3(t)sh(\frac{Re\theta_3}{2}) - B_3(t)sin(\frac{Re\theta_3}{2})}{2(cos^2(\frac{Re\lambda_3}{4}) + sh^2(\frac{Re\theta_3}{4}))} + \frac{B_2(t)sh(\frac{Re\theta_2}{2}) + A_2(t)sin(\frac{Re\lambda_2}{2})}{2(cos^2(\frac{Re\lambda_2}{4}) + sh^2(\frac{Re\theta_2}{4}))},$$

$$p - p_0 = -gz - \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} - \frac{\partial\varphi}{\partial t}.$$

Где для потенциала скорости φ справедливо представление

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3,$$

$$\varphi_k = \frac{2}{Re} ln(cos^2\frac{Re\lambda_k}{4} + sh^2\frac{Re\theta_k}{4}), \;\; k = 1, 2, 3,$$

$$\theta_1 = A_1(t)(x - x_0) - B_1(t)(y - y_0), \;\; \lambda_1 = B_1(t)(x - x_0) + A_1(t)(y - y_0).$$

$$\theta_2 = A_2(t)(y-y_0) - B_2(t)(z-z_0),\;\; \lambda_2 = B_2(t)(y-y_0) + A_2(t)(z-z_0),$$

$$\theta_3 = A_3(t)(z-z_0) - B_3(t)(x-x_0),\;\; \lambda_3 = B_3(t)(z-z_0) + A_3(t)(x-x_0).$$

При этом $A_k(t)$, $B_k(t)$ при $k = 1,2,3$ представляют функции времени удовлетворяющие условию

$$A_1(t)^2 + A_2(t)^2 + A_3(t)^2 = B_1(t)^2 + B_2(t)^2 + B_3(t)^2.$$

Имеют место следующие закономерности. Функции $A_1(t)$ и $B_1(t)$ могут быть выбраны произвольно, тогда как остальные четыре однозначно выражаются через них. Решения, удовлетворяющие условиям (6), существуют только в случае, когда точка $(A_1(t), B_1(t))$ находится внутри некоторой области на плоскости, где A_1 откладывается вдоль оси абсцисс, а B_1 вдоль оси ординат. В частности, если положить $c_x = 1$, $c_y = 2$, $c_z = -3$, $u_0 = 0$, $v_0 = 0$, $w_0 = 4$, то область, внутри которой можно удовлетворить условиям (6), представляет прямоугольник с вершинами в точках $(-6,-3), (-6,3)$, $(6,3), (6,-3)$. Диагональ, соединяющая точки $(-6,-3), (6,3)$, разбивает указанный прямоугольник на две треугольные области. Если точка $(A_1(t), B_1(t))$ располагается в нижней треугольной области, то выполнено $\theta_1 > 0$, $\theta_2 < 0$, $\theta_3 < 0$. Если эта точка располагается в верхней треугольной области, то выполнено $\theta_1 < 0$, $\theta_2 < 0$, $\theta_3 > 0$. и решение при условии (6) изменяет свой вид. Если точка располагается вне указанного прямоугольника, то решения удовлетворяющего условиям (6), не существует. Пусть функции $A_1(t)$ и $B_1(t)$ выбраны как

$$A_1(t) = t^2,\;\; B_1(t) = t,$$

тогда при $0 < t < 2$ точка $(A_1(t), B_1(t))$ находится внутри верхнего треугольника. При $2 < t < \sqrt{6}$ точка $(A_1(t), B_1(t))$ находится внутри нижнего треугольника. Если $t > \sqrt{6}$ то точка $(A_1(t), B_1(t))$ находится вне указанного прямоугольника.

Таким образом, для рассматриваемого случая при $0 < t < 2$ решение уравнений (1-4) при условиях (5-6)представляется в одном виде, при $2 < t < \sqrt{6}$ в другом, и суммарное время жизни решения равно $\sqrt{6}$. То есть $t_* = \sqrt{6}$.

Литература

1. Fefferman C.L. Existence and smoothness of the Navier-Stokes equation / C.L. Fefferman. —Princeton : Princeton univ., 2000. — P. 1–5.

2. Ладыженская О.А. Шестая проблема тысячелетия: Уравнения Навье-Стокса, существование и гладкость /О.А. Ладыженская //Успехи мат. наук. — 2003. — 58:2 (350). — С. 45–78.

3. Koptev A.V. Constructive method to solving 3D Navier – Stokes equations /A.V. Koptev //8-th European Congress of Mathematics. Book of Abstracts. — Portorozh : univ. of Primorska Press, 2021. — P. 638–639.

4. Коптев А.В. Точное решение 3D уравнений Навье-Стокса для случая потенциального движения несжимаемой жидкости /А.В. Коптев //Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. ВИНИТИ РАН. — 2023. — Т. 227. — С. 41–50.

КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ГЛАДКОСТИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ

В.И. Корзюк, И.С. Козловская (Минск, БГУ)
korzyuk@bsu.by, kozlovskaja@bsu.by

Постановка задачи. В замыкании $\bar{Q} = [0, \infty) \times [0, \infty)$ области $Q = (0, \infty) \times (0, \infty)$ переменных $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ найти решение уравнения

$$\left(\partial_{x_1}^2 u - a^2 \partial_{x_2}^2 u\right)(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \in \bar{Q}, \tag{1}$$

удовлетворяющее условиям Коши

$$u(0, x_2) = \varphi(x_2),\ \partial_{x_1} u(0, x_2) = \psi(x_2),\ x_2 \in [0, \infty), \tag{2}$$

и интегральному условию

$$\int\limits_0^{ax_1} u(x_1, x_2) dx_2 = \mu(x_1), x_1 \in [0, \infty) \tag{3}$$

где $f \in C^{k-1}(\bar{Q})$ $k \in N$, $k \geqslant 2$, $\mu \in C^{k-1}([0, \infty))$, $\varphi \in C^k([0, \infty))$, $\psi \in C^{k-1}([0, \infty))$.

Таким образом, рассматриваем задачу (1), (2), (3) с целью построения ее классичского решения из класса $C^k(\bar{Q})$, $k \geqslant 2$.

Решение уравнения (1) представляется в виде

$$u(\boldsymbol{x}) = g^{(1)}(x_2 - ax_1) + g^{(2)}(x_2 + ax_1) + V_p(\boldsymbol{x}),$$

© Корзюк В.И., Козловская И.С., 2025

где произвольные функции $g^{(j)}$, $j = 1, 2$, из класса C^k и области определения $D\left(g^{(1)}\right) = C^k(\mathbb{R})$, $D\left(g^{(2)}\right) = C^k\left([0,\infty)\right)$ для любого $\boldsymbol{x} \in \bar{Q}$, V_p – частное решение уравнения (1) из класса $C^k\left(\bar{Q}\right)$. Для определения V_p характеристикой $x_2 - ax_1 = 0$ область Q разбивается на две подобласти $Q^{(1)} = \{\boldsymbol{x} \in Q |\, x_2 - ax_1 > 0\}$, $Q^{(2)} = \{\boldsymbol{x} \in Q |\, x_2 - ax_1 < 0\}$ Тогда частное решение определяется в ввиде:

$$V_p(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} v_p^{(1)}(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x} \in \overline{Q^{(1)}}, \\ V_p^{(2)}(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x} \in \overline{Q^{(2)}}, \end{cases}$$

Теорема 1. *Пусть заданная функция f уравнения (1) принадлежит множеству $C^{k-1}\left(\bar{Q}\right)$. Тогда функции V_p принадлежит классу $C^k\left(\bar{Q}\right)$ тогда и только тогда, когда выполняются определенные условия согласования, удовлетворяет однородным условиям Коши (2), является решением уравнения (1). Кроме этого функция $V_p^{(2)}$ удовлетворяет однородному интегральному условию (3).*

Теорема 2. *Пусть заданные функции задачи (1), (2), (3) удовлетворяют следующим условиям гладкости: $f \in C^{k-1}\left(\bar{Q}\right)$. $\varphi \in C^k([0,\infty))$, $\psi \in C^{k-1}([0,\infty))$, $\mu \in C^{k+1}([0,\infty))$. Функция и принадлежит классу $C^k(\bar{Q})$ тогда и только тогда, когда выполняются условия согласования:*

$$\varphi(0) - \frac{1}{a} d\mu(0) \quad m = 0,$$

$$d^m\varphi(0) - 2^m d^m\varphi(0) - \left(\frac{1}{2a} - 2^m\right) d^{m-1}\psi(0) +$$

$$+\frac{1}{a^{m+1}} d^{m+1}\mu(0) + b^{(m)} = 0, \quad m = 1, 3, \ldots, k,$$

$$2^m d^m\varphi(0) + 2^m d^{m-1}\varphi(0) - \frac{1}{a^{m+1}} d^{m+1}\mu(0) + b^{(m)} = 0, \quad m = 2, \ldots, k,$$

является решением на Q уравнения (1), удовлетворяет условиям Коши (2) и интегральному условию (3). Такое классическое решение задачи (1), (2), (3) из класса $C^k\left(\bar{Q}\right)$ является единственным.

Числа $b^{(m)}$ определены через значения функции f и ее производных.

СЛАБАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ОДНОЙ α–МОДЕЛИ ФОЙГТА С БЕСКОНЕЧНОЙ ПАМЯТЬЮ

Е.И. Костенко, А.В. Звягин (Воронеж, ВГУ)
ekaterinalarshina@mail.ru, zvyagin.a@mail.ru

В ограниченной области $Q = (-\infty, T] \times \Omega$, где $T > 0$ и $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$ с достаточно гладкой границей $\partial\Omega \subset C^2$ рассматривается следующая краевая задача:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \mu_0 \triangle v -$$

$$-\frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} \mathrm{Div} \int_{-\infty}^{t} e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v)(s, z(s;t,x))ds + \nabla p = f; \quad (1)$$

$$u = (I - \alpha^2 \Delta)^{-1} v, \qquad (t,x) \in Q. \quad (2)$$

$$\mathrm{div}\ v(t,x) = 0, \qquad (t,x) \in Q; \quad (3)$$

$$z(\tau; t, x) = x + \int_{t}^{\tau} v(s, z(s;t,x))ds, \qquad t, \tau \in (-\infty, T], x \in \bar{\Omega}; \quad (4)$$

$$v(t,x)\ |_{(t,x)\in(-\infty,T]\times\partial\Omega} = 0; \quad (5)$$

Здесь $v(t,x) = (v_1(t,x), ..., v_n(t,x))$ и $p(t,x)$ — вектор - функция скорости, функция давления среды соответственно, $\mathcal{E}(v) = \{\mathcal{E}_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ — тензор скоростей деформации с компонентами $\mathcal{E}_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i})$, f — плотность внешних сил, $\mu_0 > 0, \mu_1 \geqslant 0$, $0 < \alpha < 1$, $\lambda > 0$ — константы, $z(\tau; t, x)$ — траектория движения частиц среды. Знак Div обозначает дивергенцию матрицы, то есть вектор, координатами которого являются дивергенции векторов - столбцов матрицы.

Рассматриваемая задача является продолжением цикла работ, посвященных исследованию моделей вязкоупругих сред (см., например, [1]–[3] и имеющуюся там библиографию). В данной работе рассмотрена альфа–модель (см., например, [4]–[5] и имеющуюся там библиографию) для исследуемой задачи.

Слабое решение будет находиться в следующем функциональном пространстве

$$W_1 = \{v \in L_2(-\infty, T; V^1) \cap L_\infty(-\infty, T; V^0), v' \in L_{4/3,loc}(-\infty, T; V^{-1})\}.$$

© Костенко Е.И., Звягин А.В., 2025

Определение 1. *Пусть $f \in L_2(-\infty, T; V^{-1})$. Слабым решением задачи (1)–(5) называется функция $v \in W_1$, удовлетворяющая для любой $\varphi \in V^1$ и п.в. $t \in (-\infty, T]$ тождеству*

$$\langle v', \varphi \rangle - \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} (\Delta_\alpha^{-1} v)_i v_j \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx + \mu_0 \int_\Omega \nabla v : \nabla \varphi \, dx +$$

$$+ \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_\Omega \int_{-\infty}^{t} e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v)(s, z(s;t,x)) ds, \mathcal{E}(\varphi) dx = \langle f, \varphi \rangle,$$

здесь z — РЛП, порожденный v.

Основным результатом работы является следующая теорема.
Теорема 1. *Пусть $f \in L_2(-\infty, T; V^{-1})$. Тогда задача (1)–(5) имеет по крайней мере одно слабое решение $v \in W_1$.*

Литература

1. Zvyagin A. Investigation of the weak solvability of one viscoelastic fractional Voigt model / A. Zvyagin, E. Kostenko // Mathematics. — 2023. — V. 11. — Article 4472.

2. Звягин А.В. О существовании управления с обратной связью для одной дробной модели Фойгта / А.В. Звягин, Е.И. Костенко // Дифференциальные уравнения. — 2023. — Т. 59, Н. 12. — С. 1710–1714.

3. Звягин А.В. Задача существования управления с обратной связью для одной дробной модели Фойгта / А.В. Звягин, Е.И. Костенко // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2023. — Т. 69, Н. 4. — С. 621–642.

4. Звягин А.В. Разрешимость альфа–моделей гидродинамики / А.В. Звягин, В.Г. Звягин, Д.М. Поляков // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. — 2016. — Н. 2. — С. 72–93.

5. Звягин А.В. О разрешимости альфа–модели Джеффриса–Олдройда / А.В. Звягин, Д.М. Поляков // Дифференциальные уравнения. — 2016. — Т. 52, Н. 6. — С. 782–787.

О ПОВЕДЕНИИ ГАММА-ФУНКЦИИ НА МНИМОЙ ОСИ

А.Б. Костин, В.Б. Шерстюков (Москва, МГУ)
abkostin@yandex.ru, shervb73@gmail.com

Некоторое время назад, в связи с приложениями к задачам математической физики (см., например, [1]), авторов заинтересовал вопрос о свойствах комплекснозначной функции $\Gamma(iy)$ переменной $y \in \mathbb{R}$. Ввиду того, что величины $\Gamma(iy)$ и $\Gamma(-iy)$ комплексно сопряжены, ограничиваемся положительными значениями переменной.

Из разложения целой функции $1/\Gamma(z)$ в бесконечное произведение Вейерштрасса

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z\, e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 + \frac{z}{n}\Big)\, e^{-z/n}\,, \qquad z = x + iy \in \mathbb{C}\,,$$

где γ — константа Эйлера–Маскерони, следует представление

$$|\Gamma(iy)|^2 = \frac{1}{y^2} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^2 + y^2} = \frac{\pi}{y\,\mathrm{sh}(\pi y)}\,, \qquad y > 0,$$

с известной асимптотикой $|\Gamma(iy)| \sim \sqrt{\dfrac{2\pi}{y}}\, \exp\Big(-\dfrac{\pi y}{2}\Big), \quad y \to +\infty.$

Как доказано в работе [2], при каждом $y > 0$ одно из счётного числа значений $\operatorname{Arg}\Gamma(iy)$ совпадает с выражением

$$\Phi(y) = y \ln\frac{y}{e} - \frac{\pi}{4} - \int\limits_0^{+\infty} g(t) \sin yt\, dt \equiv y \ln\frac{y}{e} - \frac{\pi}{2} + \int\limits_0^{+\infty} h(t) \sin yt\, dt, \quad (1)$$

где $\qquad g(t) = \Big(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{e^t - 1}\Big)\dfrac{1}{t}\,, \qquad h(t) = \dfrac{1}{2t} - g(t) = \dfrac{e^t - 1 - t}{(e^t - 1)t^2}\,.$

Для аргумента Arg ветвь со значениями в промежутке $(-\pi, \pi]$ считаем главной и обозначаем $\arg$. Детальный анализ формулы (1) показывает, что функция $\Gamma(iy)$ принимает при $y > 0$ невещественные значения всюду за исключением точек некоторой последовательности $\{\eta_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, $\eta_m \to +\infty$ при $m \to \infty$, в которых $\Gamma(i\eta_m) \in \mathbb{R}$.

© Костин А.Б., Шерстюков В.Б., 2025

Теорема 1. *Для функции* (1) *при всех* $y > 0$ *верна двусторонняя оценка*

$$\underline{\Phi}(y) < \Phi(y) < \overline{\Phi}(y)\,,$$

в которой миноранта $\underline{\Phi}$ *и мажоранта* $\overline{\Phi}$ *задаются формулами*

$$\underline{\Phi}(y) = \begin{cases} y \ln \frac{y}{e} - \frac{\pi}{2}\,, & 0 < y < \frac{2}{3\pi}\,, \\ y \ln \frac{y}{e} - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{6y}\,, & y \geqslant \frac{2}{3\pi}\,, \end{cases}$$

$$\overline{\Phi}(y) = \begin{cases} y \ln \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\,, & 0 < y < y_0\,, \\ y \ln \frac{y}{e} - \frac{\pi}{4}\,, & y \geqslant y_0\,. \end{cases}$$

Здесь $\dfrac{2}{3\pi} = 0.21\ldots,\ y_0 = -\dfrac{\pi}{4W_{-1}(-\frac{1}{2e})} = 0.29\ldots,$ *а символ* W_{-1} *использован для соответствующей ветви W-функции Ламберта.*

При каждом $m \in \mathbb{N}$ положим $y_m = \dfrac{(8m-3)\pi}{4W_0\big(\frac{(8m-3)\pi}{4e}\big)}\,,$

$$\underline{y}_m = \frac{3(8m-3)\pi y_m + 2}{12 y_m W_0\big(\frac{3(8m-3)\pi y_m + 2}{12 e y_m}\big)}\,, \qquad \overline{y}_m = \frac{(8m+5)\pi}{4W_0\big(\frac{(8m+5)\pi}{4e}\big)}\,,$$

где W_0 обозначает основную ветвь W-функции Ламберта (см. [3]).

Благодаря теореме 1 соотношение $\quad \Phi(y) \in \operatorname{Arg}\Gamma(iy), \quad y > 0,$

допускает следующую детализацию.

Теорема 2. *Пусть функция* $\Phi(y)$ *определена формулой* (1). *Тогда главное значение аргумента величины* $\Gamma(iy)$ *при*

$$y \in \left(0,\ \frac{5\pi}{4W_0(\frac{5\pi}{4e})}\right) = (\,0,\ 5.52\ldots)$$

вычисляется по правилу $\arg\Gamma(iy) = \Phi(y)$, *а при* $y \in (\,\underline{y}_m, \overline{y}_m\,)$ *с заданным* $m \in \mathbb{N}$ — *по правилу* $\arg\Gamma(iy) = \Phi(y) - 2\pi m$.

Например, взяв $y = 1$, получим

$$\arg\Gamma(i) = \Phi(1) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^t - 1 - t}{(e^t - 1)t^2}\,\sin t\,dt - 1 - \frac{\pi}{2} = -1.87\ldots \qquad (2)$$

с приемлемыми для практических вычислений границами

$$-1.95\ldots = -\frac{7}{6} - \frac{\pi}{4} = \underline{\Phi}(1) < \arg\Gamma(i) < \overline{\Phi}(1) = -1 - \frac{\pi}{4} = -1.78\ldots$$

из теоремы 1. В дополнение к (2) приведём любопытную формулу

$$\arg\Gamma(i) = \int\limits_0^{\pi/2} \{\operatorname{tg} t\}\,dt - 1 - \frac{\pi}{2}\,, \qquad \{\cdot\} \text{ — дробная часть,}$$

связанную с одной задачей, опубликованной в 2017 году в «La Gaceta de la RSME» (vol. 20, num. 2, probl. 327).

При выборе $y = 3e \in (\,\underline{y}_1,\, \overline{y}_1\,) = (\,5.54\ldots,\, 8.74\ldots)$ получим

$$\arg\Gamma(3ei) = \Phi(3e) - 2\pi = \\ = 3e\ln 3 - \frac{5\pi}{2} + \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^t - 1 - t}{(e^t - 1)t^2}\,\sin(3et)\,dt = 1.88\ldots\,;$$

согласно же теоремам 1, 2 имеем

$$1.86\ldots = 3e\ln 3 - \frac{9\pi}{4} - \frac{1}{18e} = \underline{\Phi}(3e) - 2\pi < \arg\Gamma(3ei) < \overline{\Phi}(3e) - 2\pi \\ = 3e\ln 3 - \frac{9\pi}{4} = 1.89\ldots,$$

что даёт весьма неплохое приближение.

Литература

1. Сулейманов Б.И. Влияние малой дисперсии на самофокусировку в пространственно одномерном случае / Б.И. Сулейманов // Письма в ЖЭТФ — 2017. — Т. 106, № 6. — С. 375–380.

2. Костин А.Б. Об интегральных представлениях величин, связанных с гамма-функцией / А.Б. Костин, В.Б. Шерстюков // Уфимск. матем. журн. — 2021. — Т. 13, № 4. — С. 51–64.

3. Дубинов А.Е. W-функция Ламберта и её применение в математических задачах физики / А.Е. Дубинов, И.Д. Дубинова, С.К. Сайков — Саров : РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2006. — 159 с.

ОЦЕНКА ВЕРОЯТНОСТИ ЛОЖНОЙ ТРЕВОГИ В КОГНИТИВНЫХ РАДИОСЕТЯХ

А.В. Костин, М.И. Паршин
(Воронеж, ВГУ, АО Концерн Созвездие)
leshakostin@mail.ru, parshin_ maksim@mail.ru

Рассматривается централизованная когнитивная радиосеть с L активными вторичными пользователями. Предполагается, что совместное решение принимается центром слияния. Вторичные пользователи, $\{CR_i\}_{i=1}^{L}$, обозначают системные ретрансляторы и используют ту же полосу спектра, которая первоначально выделена основным пользователям. Параметры замирания канала i–го измерительного канала и i–го ретрансляционного канала обозначаются h_{s_i} и h_{r_i} соответственно. Мы также обозначаем через h_{s_i} и h_{r_i} аддитивный гауссовский шум зондирующего и ретрансляционного каналов соответственно, которые, как предполагается, являются независимыми идентифицируемо распределенными с нулевым средним значением и дисперсией N_0.

Предполагается, что информация о состоянии канала доступна для всех ретрансляторов, а также, что центр слияния обладает полным знанием информации о состоянии канала, т.е. он может получить глобальные знания о обнаружении и ретрансляции усиления канала. Информация о состоянии канала является одним из основных условий успешной реализации протоколов динамической когнитивной радиосвязи. На практике легко получить локальную информацию о коэффициентах усиления канала с помощью механизма обратной связи, используя пилотные сигналы, периодически передаваемые центром слияния. Чтобы получить информацию о состоянии канала удаленной линии связи (т.е. чувствительной линии связи), когнитивное радио усиливает пилотный сигнал, полученный от первичной базовой станции, и пересылает его в центр слияния.

Пусть x_p обозначает сигнал, передаваемый основным радиоприемником, тогда принятый сигнал i–м приемником, y_{s_i}, может быть выражен как

$$y_{s_i} = \theta h_{s_i} x_p + n_{s_i} \tag{1}$$

где $\theta = 0$ или 1 обозначает состояние основного пользователя при двух гипотезах: H_0 для отсутствия основного пользователя и H_1 для присутствия основного пользователя. Если Y_i обозначает мощность y_{s_i}, то среднее значение Y_i может быть выражено как

© Костин А.В., Паршин М.И., 2025

$$E\{Y_{s_i}\} = \begin{cases} \sigma Y_{s_{i_0}} = N_0 & H_0 \\ \sigma_{s_{i_1}} = E_i + N_0 = N_0(1+\overline{\gamma}_{s_i}) & H_1 \end{cases} \tag{2}$$

где $E_i = E\{|h_{s_i} x_p|^2\}$— среднее значение мощности сигнала, принятого на радиочастотном интерфейсе i–го когнитивного радиоприемника, и $\overline{\gamma}_{s_i}$— среднее отношение сигнал/шум, связанное с i–м каналом обнаружения. Для локального определения спектра Y_{s_i} сравнивается с заданным пороговым значением λ_i для определения первичного состояния θ. Следовательно, вероятность ложной тревоги, P_{f_i}, и вероятность обнаружения, P_{d_i} , могут быть выражены как

$$P_{f_i} = P\{Y_{s_i} > \lambda_i | H_0\} = \int_{\lambda_i}^{\infty} \left(\frac{m_i}{\sigma\gamma_{s_{i_0}}}\right)^{m_i} \frac{y^{m_i-1}}{\Gamma(m_i)} \exp\left(-\frac{m_i}{\sigma\gamma_{s_{i_0}}}\right) y dy =$$

$$= \frac{\Gamma\left(m_i, \frac{m_i\lambda_i}{\sigma\gamma_{s_{i_0}}}\right)}{\Gamma(m_i)} = \frac{\Gamma\left(m_i, \frac{m_i\lambda_i}{N_0}\right)}{\Gamma(m_i)} \tag{3}$$

и

$$P_{d_i} = P\{Y_{s_i} > \lambda_i | H_1\} = \int_{\lambda_i}^{\infty} \left(\frac{m_i}{\sigma\gamma_{s_{i_1}}}\right)^{m_i} \frac{y^{m_i-1}}{\Gamma(m_i)} \exp\left(-\frac{m_i}{\sigma\gamma_{s_{i_1}}}\right) y dy =$$

$$= \frac{\Gamma\left(m_i, \frac{m_i\lambda_i}{\sigma\gamma_{s_{i_1}}}\right)}{\Gamma(m_i)} = \frac{\Gamma\left(m_i, \frac{m_i\lambda_i}{N_0(1+\gamma_{s_i}}\right)}{\Gamma(m_i)}. \tag{4}$$

где приведенные выше интегралы вычисляются с помощью [1, уравнение 3.381.3], m_i— параметр затухания Накагами-м, $\Gamma(\cdot)$— гамма–функция, а $\Gamma(\cdot,\cdot)$— неполная гамма функция.

Литература

1. Hussain S. Performance analysis of relay-based cooperative spectrum sensing in cognitive radio networks over non-identical Nakagami-m channels /S. Hussain, X. Fernando. — IEEE Trans. Commun. 62(8), 2733–2746 (2014)

2. Mitola J. Cognitive radio: an integrated agent architecture for software defined radio/ J. Mitola Ph.D. thesis, KTH Royal Institute of Technology, Stockholm — 2000

ПОЛУГРУППОВОЙ ОПЕРАТОР МАСЛОВА И ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ $0 \leqslant x \leqslant l < \infty$

В.А. Костин, А.В. Костин, М.Н. Силаева (Воронеж, ВГУ)
vlkostin@mail.ru, leshakostin@mail.ru, marinanebolsina@yandex.ru

В монографии В.П. Маслова [2], стр. 18 для полугруппы сдвигов $(e^{xD}f)(t) = f(x+t)$, с производящим оператором $D = \frac{d}{dx}$ $(x \geqslant 0, t \geqslant 0)$ определяется обратный оператор к оператору $(I - e^{hD})$ как степенной ряд

$$\left(I - e^{hD}\right)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{khD}. \tag{1}$$

Операторы $\mathbb{M}_{\pm}(h)$ применим для представления решений граничных задач для дифференциального уравнения

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} = Au(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant l < \infty; \tag{2}$$

с краевыми условиями

$$1. \quad u(0) = \varphi_1,\ u(l) = \psi_1, \text{ (Задача Дирихле)} \tag{3}$$

$$2. \quad u'(0) = \varphi_2,\ u'(l) = \psi_2, \text{ (Задача Неймана)} \tag{4}$$

$$3. \quad u'(0) = \varphi_3,\ u(l) = \psi_3, \tag{5}$$

$$4. \quad u(0) = \varphi_4,\ u'(l) = \psi_4. \tag{6}$$

При этом будем предполагать, что оператор A такой, что оператор $-A$, является генератором C_0-полугруппы, удовлетворяющей оценке

$$\|U(x)\| \leqslant Me^{-\omega x}, \qquad \omega > 0, \tag{7}$$

Это обеспечивает существование $\sqrt{A}$, причем оператор $-\sqrt{A}$ также является генератором полугруппы $U_{\frac{1}{2}}(x)$ класс C_0 с оценкой

$$\|U_{\frac{1}{2}}(x)\| \leqslant Me^{-\sqrt{\omega}x}.$$

Исходя из этого, в соответствии с [1], гл. III, §2 дадим следующие определения:

© Костин В.А., Костин А.В., Силаева М.Н., 2025

Определение 1. *Функция $u(x)$ называется обобщенным решением уравнения (2), если 1) она непрерывна на $[0, l]$, 2) значения функции $u(x)$ $(0 < x < l)$ принадлежит $\mathbb{D}(A)$, 3) она удовлетворяет уравнению (2) в интервале $(0, l)$.*

Определение 2. *Соответствующая краевая задача для уравнения (2) называется равномерно корректной, если для всяких φ_i, ψ_i из E существует единственное обобщенное решение этой задачи, непрерывно зависящее в норме $C(E)$ от φ_i, ψ_i $(i = 1, 2, 3, 4)$.*

Используя этот подход, введем полугрупповой оператор Маслова $\mathbb{M}_\alpha(h)$ для производящего оператора B полугруппы $U(x)$ класса C_0, действующей в банаховом пространстве E и удовлетворяющей оценке (7) с помощью равенства

$$\mathbb{M}_\alpha(h) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^n U(kh). \tag{8}$$

Нетрудно видеть, что при выполнении условия

$$|\alpha| < e^{\omega h}$$

из (8) следует оценка

$$\|\mathbb{M}_\alpha\| \leqslant M \sum_{k=0}^{\infty} |\alpha|^k e^{-\omega kh} = \frac{M}{1 - |\alpha| e^{-\omega h}}.$$

Таким образом, при сделанных предположениях на параметры α, ω, h, операторы $\mathbb{M}_\alpha(h)$ являются ограниченными в пространстве E. Мы будем их называть *полугрупповыми операторами Маслова.*

Далее обозначим

$$\mathbb{M}_+(h) = \sum_{k=0}^{\infty} U(kh), \qquad \mathbb{M}_-(h) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k U(kh).$$

Далее введем операторы

$$\begin{aligned} Sh(x) &= \mathbb{M}_+(2l)[U(l-x) - U(l+x)], \\ Ch(x) &= \mathbb{M}_-(2l)[U(l-x) + U(l+x)], \\ Th(x) &= \mathbb{M}_-(2l)[U(l-x) - U(l+x)], \\ Cth(x) &= \mathbb{M}_+(2l)[U(l-x) + U(l+x)]. \end{aligned}$$

Справедлива следующая

Теорема. *Задачи (2)—(6) равномерно корректны и их решение представимо в виде*

$$
\begin{aligned}
&1.\, u_1(x) = Sh(l-x)\varphi_1 + Sh(x)\psi_1 - \textit{задача}\,(2)-(3),\\
&2.\, u_2(x) = A^{-\frac{1}{2}}[Cth(l-x)\varphi_2 + Cth(x)\psi_2] - \textit{задача}\,(2)-(4),\\
&3.\, u_3(x) = A^{-\frac{1}{2}}Th(l-x)\varphi_3 + Ch(x)\psi_3 - \textit{задача}\,(2)-(5),\\
&3.\, u_4(x) = Ch(l-x)\varphi_4 + A^{-\frac{1}{2}}Th(x)\psi_4 - \textit{задача}\,(2)-(6).
\end{aligned}
$$

Литература

1. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / С.Г. Крейн. – М. : Наука, 1967. —464 с.

2. Маслов В.П. Операторные методы / В.П. Маслов. М. : Наука, глав. ред. физ.-мат. лит., 1973. — 543 с.

3. Костин В.А. Операторные косинус функции и граничные задачи / В. А. Костин, Д. В. Костин, А. В. Костин // ДАН. — 2019. — Т. 486. —№ 5. — С. 531–536.

4. Небольсина М.Н. О корректной разрешимости краевых задач для уравнения второго порядка / М.Н. Небольсина, В.А. Костин // ДАН. — 2009. —Т. 426. —№ 1. —С. 20–22.

НЕЛОКАЛЬНАЯ ВАРИАЦИОННАЯ ВЕРСИЯ МЕТОДА ЛЯПУНОВА-ШМИДТА

Т.И. Костина (Воронеж, ВГТУ)

tata_sti@rambler.ru

Рассматривается нелокальная вариационная версия метода Ляпунова-Шмидта на примере изучения уравнения Белецкого, описывающего периодические колебания спутника вблизи эллиптической орбиты :

$$(1+e\cos(\nu))\frac{d^2\delta}{d\nu^2} - 2e\sin(\nu)\frac{d\delta}{d\nu} + \mu\sin(\delta) - 4e\sin(\nu) = 0.$$

Здесь e — эксцентриситет орбиты, μ — параметр, характеризующий распределение массы спутника, δ — угол между фокальным радиусом и осью симметрии спутника, ν — угловая (полярная) координата центра масс спутника.

© Костина Т.И., 2025

Умножая уравнение на $(1+e\cos(\nu))$ получается уравнение, являющееся уравнением Эйлера-Лагранжа для экстремалей функционала $V(q) = \int\limits_0^{2\pi} L(\dot{q},q)dt$, с лагранжианом $L(\dot{q},q)$: $\frac{\dot{q}^2}{2}(1+e\cos(\nu))^2 + (1+e\cos(\nu))4eq\sin(\nu) + (1+e\cos(\nu))\mu\cos(q)$.

Если в уравнении Белецкого положить $e = 0$, то получается уравнение колебаний маятника $\ddot{\nu} + \mu\sin(\nu) = 0$ (без внешнего воздействия).

Применяя метод Ляпунова-Шмидта, получаем гладкое отображение $\Phi(\xi)$, для которого $V(u(\xi)+\Phi(\xi)) = \inf\limits_{v\in N^{\perp}} V(u+v)$. Ключевая функция представима в виде обобщенной (нелинейной) ритцевской аппроксимации по первым трем модам: $W(\xi) = V(u(\xi) + \Phi(\xi)), \quad u(\xi) := \xi_0 e_0 + \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2$.

Построение приближений $\Phi_k(\xi)$ к функции $\Phi(\xi)$ основан на методе кратчайшего (градиентного) спуска. Последовательность приближений $\Phi_k(\xi)$ приводит к последовательности приближений ключевой функции $W_{(k)}(\xi) = V(u(\xi) + \Phi_k(\xi))$.

Как и в случае маятника можно воспользоваться модами колебаний: $e_0 = 1$, $e_1 = \sqrt{2}cos(t)$; $e_2 = \sqrt{2}sin(t)$, $e_3 = \sqrt{2}cos(2t)$, $e_4 = \sqrt{2}sin(2t)\ldots$. При $x = \sum_{k=0}^{2n}\xi_k e_k$, получаем систему уравнений $\left\langle f\left(\sum_{k=0}^{2n}\xi_k e_k\right), e_j\right\rangle = 0$, где f — левая часть уравнения Белецкого. В итоге применения данной вычислительной схемы получим сходящийся итерационный процесс, позволяющий осуществить построение ключевой функции с любой точностью. Что позволяет осуществить построение соответствующего приближенного дискриминантного множества (*каустики*) — множества значений параметров (q_0, q_1, q_2), при которых существуют вырожденные критические точки.

Литература

1. Белецкий В.В Движение искусственного спутника относительно центра масс / В.В. Белецкий. — М. : Наука, 1965. — 416 с.

2. Костина Т.И. О ветвлении периодических решений уравнения колебаний маятника и уравнения Белецкого/ Т.И. Костина, Ю.И. Сапронов // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. 2018. №1. — С. 99–114.

О МАСШТАБИРУЮЩИХ ФУНКЦИЯХ В ГРУППЕ ВИЛЕНКИНА

Ю.С. Крусс, С.Ф. Лукомский (Саратов, СГУ)
LukomskiiSF@info.sgu.ru

Рассмотрим задачу построения ступенчатой масштабирующей функции в группе Виленкина. Пусть $G = \{x = (...0, x_n, x_{n+1}, ...) : x_k = \overline{0, p-1},\ n \in \mathbb{Z}\}$ – локально-компактная группа Виленкина, $G_n = \{x = (...0, x_n, x_{n+1}, ...) : x_k = \overline{0, p-1}\}$, $n \in \mathbb{Z}$ –подгруппы, образующие базу топологии, $g_n = (..., 0_{n-1}, 1_n, 0_{n+1}, 0, ...)$ – базисная последовательность т.е. $g = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n g_n$, $\quad a_n = \overline{0, p-1}$. Пусть X – совокупность характеров, $G_n^{\perp} = \{\chi \in X : \forall\, x \in G_n\ , \chi(x) = 1\}$ аннулятор подгруппы G_n. $G_n^{\perp}$ образуют возрастающую последовательность и базу топологии в X. Для произвольного $n \in \mathbb{Z}$ выберем характер $r_n \in G_{n+1}^{\perp} \backslash G_n^{\perp}$ и зафиксируем его. Совокупность функций $(r_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ называется системой Радемахера. Любой характер χ может быть записан в виде произведения $\chi = \prod_{j=-m}^{+\infty} r_j^{\alpha_j}$, $\alpha_j = \overline{0, p-1}$. Пусть m_0– маска, λ_ν– значения маски m_0. $\mathcal{D}_{G_{-N}^{\perp}}(G_M^{\perp})$ есть совокупность функций, постоянных на смежных классах по $G_{-N}^{\perp}$ и равных нулю вне $(G_M^{\perp})$. Мы хотим построить масштабирующую функцию φ так, чтобы $\hat{\varphi} \in \mathcal{D}_{G_{-N}^{\perp}}(G_M^{\perp}) \quad (N, M \geqslant 1)$. Для этого строим ориентированное дерево с корнем $\lambda_0 = 1 = m_0(G_{-N}^{\perp})$ высоты $H = M + N + 2$ (см.Рис.1). Нумерацию уровней начинаем с нуля, т.е. корень образует нулевой уровень. Корень λ_0 связан с узлами $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{p-1}$ первого уровня где $\lambda_j = m_0(G_{-N}^{\perp} r_{-N}^j), (j = 1, 2, ..., p-1)$ Из каждого узла λ_n, начиная с первого уровня, выходит ровно p ребер в узлы $\lambda_{np}, \lambda_{np+1}, ..., \lambda_{np+p-1}$ следующего уровня. Узел и числовое значение, которое помещаем в узел, будем обозначать одинаковым символом λ_n. Т.е. в узлы дерева помещаем значения маски m_0.

Теорема 1. *Дерево T определяет масштабирующую функцию $\hat{\varphi} \in \mathcal{D}_{G_{-N}^{\perp}}(G_M^{\perp}) \quad (M \geqslant 1)$ тогда и только тогда, когда 1)на каждой ветви с листом в $G_{M+1}^{\perp} \setminus G_M^{\perp}$ есть по крайней мере один ноль, 2)существует по крайней мере один путь из корня в лист $\lambda_{p^{N+M-1}+l} = \lambda_n$ на уровне $G_M^{\perp} \setminus G_{M-1}^{\perp}$, на котором все $\lambda_j \neq 0$.*

Из этой теоремы получаем следующий алгоритм построения масштабирующей функции. Выбираем узел λ_n в дереве T на уровне $M + N$ такой, что 1)на пути

$$\lambda_n \to \lambda_{n \text{ div } p} \to \lambda_{(n \text{ div}^2\ p)} \to ... \to \lambda_0. \tag{1}$$

© Крусс Ю.С., Лукомский С.Ф., 2025

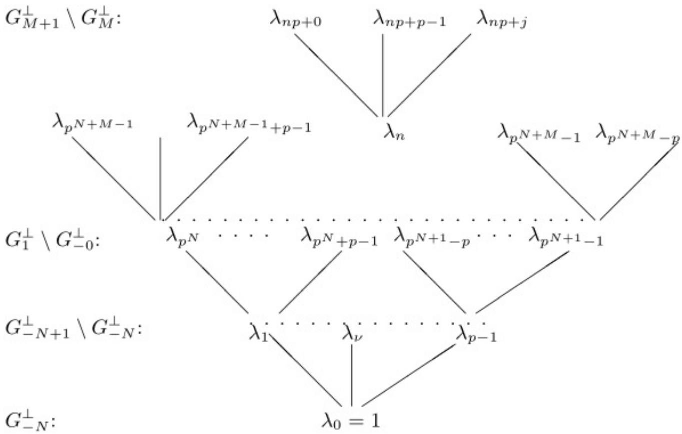


Рис 1. Граф дерева $T = T(m_0)$

во всех узлах стоят единицы, 2)значения $\lambda_{np+j} = 0$ при всех $j = 0, 1, ...p-1$. 3)Остальные значения в узлах $\lambda_j, (j < p^{N+1})$ выбираем так, чтобы выполнялись условия теоремы 1. Каждый такой выбор $\lambda_j, (j < p^{N+1})$ определяет маску.

Пример. Пусть $M = 1, p > 2$. Выбираем

$$\lambda_n = m_0(G^{\perp}_{-N} r_{-N}^{\alpha_{-N}} r_{-N+1}^{\alpha_{-N+1}} \dots r_{-1}^{\alpha_{-1}} r_0^{\alpha_0})$$

так, что $\alpha_0 > 0, \alpha_{-1} > 0, \alpha_0 \neq \alpha_{-1}$ и строим путь (1) который удовлетворяет условиям теоремы.

При p=3 такой путь единственный, при $p = 5$ таких путей 4. В общем случае задача решается перебором значений n из отрезка $[p^{N+M-1}, p^{N+M}]$.

Литература

1.Farkov Yu, Step wavelets on Vilenkin groups / Yu. Farkov, M. Skopina // Journal of Mathematical Sciences. —2022. —V. —266. — p.696-709.

2. Farkov, Yu. A., Wavelet frames on Vilenkin groups and their approximation properties / Yu.A. Farkov, E.A. Lebedeva, M.A. Skopina // Intern. J. Wavelets Multiresolut. Inf. Process. —2015. —V.13 —N. —5, 1550036 (19 pages).

«НАИВНАЯ» ФИЛЬТРАЦИЯ СИГНАЛА НА ОСНОВЕ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО ФРЕЙМУ ГАБОРА, ПОРОЖДЁННОМУ ФУНКЦИЕЙ ГАУССА.

А.Н. Кузнецов (Воронеж, ВГУ)
kuzne.kuznetsov123@yandex.ru

Определение 1. Набор функций $g_k \in L_2(\mathbb{R})$, $k \in \mathbb{Z}$ называется фреймом, если $\forall f \in L_2(\mathbb{R})$ выполняются неравенства

$$A||f||^2 \leqslant \sum_k |(f, g_k)|^2 \leqslant B||f||^2,$$

где $0 < A$, $B < \infty$ - некоторые конечные положительные постоянные.

Определение 2. Пусть $g(x) \in L_2(\mathbb{R})$, а α_1, α_2 - заданные положительные параметры. Фреймом Габора называется фрейм, состоящий из функций

$$g_{k,m}(x, \alpha_1, \alpha_2) = g(x - \alpha_1 k)e^{i\alpha_2 mx}, k, m \in \mathbb{Z}$$

Определение 3. Двойственный фрейм [1,2] к фрейму g_k в пространстве $L_2(\mathbb{R})$ — это набор функций $\tilde{g}_k$, такой что для любой функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ выполняется равенство

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \tilde{g}_k \rangle g_k = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, g_k \rangle \tilde{g}_k,$$

где $\langle f, g \rangle$ обозначает скалярное произведение функций f и g в $L_2(\mathbb{R})$.

В работе рассматривается фрейм Габора с $g(x) = \exp(-x^2/2)$. При помощи известного двойственного фрейма [2, 3] получено разложение функции $f(x) = e^{i\eta x}$ в виде:

$$e^{i\eta x} = \sum_{k,m=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sqrt{2}(-1)^{mk} e^{i\alpha_1 k\eta}}{2 \cdot \vartheta_3(\alpha_1 \eta, \exp(-\alpha_1^2))} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \sum_{m'=-\infty}^{+\infty} \left(c_{m'}(2\alpha_2) \exp - \frac{(\alpha_2(2m + m') - \eta)^2}{2} \right) \exp - \frac{(x - \alpha_1 k)^2}{2} e^{im\alpha_2 x} \right),$$

где

$$\vartheta_3(x, q) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} q^{k^2} e^{2ikx}, \ |q| < 1$$

© Кузнецов А.Н., 2025

$$c_k(\omega) = \frac{1}{K(\omega)} \exp\left(\frac{k^2\omega^2}{4}\right) \sum_{r=|k|}^{\infty} (-1)^r \exp\left(-\frac{(r+0.5)^2\omega^2}{4}\right),$$

$$K(\omega) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} (4r+1) \exp\left(-\frac{(2r+0.5)^2\omega^2}{4}\right).$$

Это разложение демонстрирует, как отдельная частота может быть представлена в виде суммы функций фрейма Габора. Фильтрация в контексте такого разложения означает, что мы можем выбирать компоненты сигнала, соответствующие определенным значениям m и k, для достижения желаемого эффекта фильтрации. Наличие явной формулы для отдельной частоты позволяет оценить, какую ошибку она оставляет в исходном сигнале при обнулении части коэффициентов.

Запишем разложение выше как

$$e^{i\eta x} = \sum_{k,m} a_{km} e^{-\frac{(x-k\alpha_1)^2}{2}} e^{im\alpha_2 x}$$

В этом разложении для фильтрации возьмём все $a_{km} = 0$ при $|m| \geqslant \frac{1}{2}\left|\frac{\eta}{\alpha_2}\right|$, где η из $e^{i\eta x}$ и $\alpha_1 = \alpha_2 = \sqrt{\pi}$. Используя явную формулу для разложения $e^{i\eta x}$ по фрейму Габора, численно найдём максимум сглаженного сигнала отдельно $\sin(\eta x)$ и $\cos(\eta x)$ с шагом графика 0.001 на отрезке от $[-5\pi, 5\pi]$.

η	20	40	60	80	100
$\sin(\eta x)$	$6.40 \cdot 10^{-5}$	$3.97 \cdot 10^{-9}$	$4.69 \cdot 10^{-13}$	$1.42 \cdot 10^{-16}$	$1.66 \cdot 10^{-45}$
$\cos(\eta x)$	$6.40 \cdot 10^{-5}$	$3.97 \cdot 10^{-9}$	$4.69 \cdot 10^{-13}$	$1.42 \cdot 10^{-16}$	$1.66 \cdot 10^{-45}$

Численные эксперименты и формулы показывают пригодность фреймов Габора для фильтрации высокочастотного сигнала.

Литература

1. Janssen A.J.E.M. Duality and Biorthogonality for Weyl-Heisenberg Frames / A.J.E.M. Janssen // J. Fourier Anal. Appl. — 1995. — V. 1, № 4. — P. 403–436.

2. Janssen A.J.E.M. Some Weyl-Heisenberg frame bound calculations / A.J.E.M. Janssen // Indag. Math., New Ser. — 1996. — V. 7, № 2. — P. 165–183. —

3. Киселев Е. А. Локализация оконных функций двойственных и жестких фреймов Габора, порожденных функцией Гаусса / Е.А. Киселев, Л.А. Минин, И. Я. Новиков, С.Н. Ушаков // Матем. сб., 215:3 (2024), 80–99

ВЛИЯНИЕ ФАКТОРА ЗАПАЗДЫВАНИЯ И КОНКУРЕНЦИИ НА ДИНАМИКУ В МОДЕЛИ «СПРОС-ПРЕДЛОЖЕНИЕ»

А.Н. Куликов, Д.А. Куликов, Д.Г. Фролов
(Ярославль, ЯрГУ им. П.Г. Демидова)
kulikov_d_a@mail.ru

Одной из первых математических моделей макроэкономики можно считать ту, которая носит название «спрос-предложение» («рынка одного товара»). В классическом варианте она имеет вид

$$\dot{p} = D(p) - S(p), \tag{1}$$

где неотрицательная функция $p = p(t)$ – это цена товара, $D(p), S(p)$ – функции спроса и предложения соответственно [1]. Функции $D(p)$, $S(p)$ обладают следующими свойствами:

1) при $D(p), S(p) \in C^k(\mathbb{R}_+)$, где $k \in \mathbb{N}$ и достаточно велико;

2) справедливы предельные равенства $\lim\limits_{p\to 0+} D(p) = \infty$, $\lim\limits_{p\to\infty} D(p) = 0$, $\lim\limits_{p\to 0+} S(p) = 0$, $\lim\limits_{p\to\infty} S(p) = \infty$,

3) $D'(p) < 0, S'(p) > 0$.

Дифференциальное уравнение (1) имеет единственное положительное состояние равновесия $p(t) = p_0$, которое асимптотически устойчиво в целом и, в частности, уравнение (1) не имеет иных аттракторов (например, циклов). Такая простая динамика находится в явном противоречии с экономической практикой.

В работах [2-4] было рассмотрено уравнение аналогичное дифференциальному уравнению (1), в котором был учтен фактор запаздывания и было предложено изучить вместо уравнения (1) следующее дифференциальное уравнение с отклоняющимся аргументом

$$\dot{p} = D(q) - S(q), \tag{2}$$

где $q(t) = p(t-h), h > 0$.

Анализ уравнения (2) показал, что динамика решений дифференциального уравнения (2) существенно сложнее и богаче, чем динамика решений уравнения (1). В частности, у дифференциального уравнения (2) могут быть циклы и в том числе устойчивые. Последнее характерно для рыночной (капиталистической) экономики.

© Куликов А.Н., Куликов Д.А., Фролов Д.Г., 2025

Учет конкуренции еще один шаг в приближении модели к возможности описания реальных экономических процессов. Рассмотрим следующую систему дифференциальных уравнений

$$\dot{p}_1 = D(q_1) - S(q_1) + c\varepsilon(q_2 - q_1),\ \dot{p}_2 = D(q_2) - S(q_2) + c\varepsilon(q_1 - q_2), \quad (3)$$

где $p_j(t)$ цена товара, $q_j = p_j(t-h), j = 1, 2$, ε – малый параметр, $c \in \mathbb{R}$ и, как правило, этот коэффициент положителен.

Система дифференциальных уравнений (3) имеет положительное состояние равновесия $p_1 = p_2 = p_0 > 0$. При соответствующем выборе параметров у системы (3) могут существовать предельные циклы: однородный, противофазный и асимметричные [5]. Рассмотрен вопрос об устойчивости циклов.

Обоснование результатов использует такие методы теории динамических систем как метод инвариантных многообразий, нормальных форм, асимптотические методы анализа динамических систем. В частности, использован алгоритм Крылова-Боголюбова адаптированный к возможности его применения для дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.

Литература

1. Zhang W. B. Synergetic Economics: Time and Change in Nonlinear Economics / W.B. Zhang. — Berlin. : Springer-Verlag, 1991. — 261 p.

2. Radin M. A. Synchronization of fluctuations in the interaction of economies within the framework of the Keynes business cycle model / M. A.Radin , A. N.Kulikov , D. A.Kulikov // Nonlin. Dynam. Psychol. Life Sci. — 2021. — V. 5, № 1. — P. 93–111.

3. Куликов А.Н., Куликов Д.А. Математические модели рынка и эффект запаздывания / А.Н.Куликов , Д.А.Куликов // в кн.: Математика в Ярославском университете. — Ярославль. : ЯрГУ им. П.Г. Демидова, 2016. С. 132–151.

4. Куликов Д.А. Эффект запаздывания и экономические циклы / Д.А.Куликов // Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — Т. 217. — С. 41–50.

5. Куликов Д.А. Автомодельные циклы и их локальные бифуркации в задаче о двух слабосвязанных осцилляторах / Д.А.Куликов //Прикл. матем. и мех. — 2010. — Т. 74, № 4. —С. 543–559.

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ДВУХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В.А. Кыров, И.В. Скопинцев (Горно-Алтайск, ГАГУ)
kyrovVA@yandex.ru

Дана система двух функциональных уравнений

$$\bar{x}\bar{\xi} + \bar{\mu} = \chi^1(x+\xi, y+\eta, \mu, \nu), \ \ \bar{x}\bar{\eta} + \bar{y} + \bar{\nu} = \chi^2(x+\xi, y+\eta, \mu, \nu),$$

где $\bar{x} = \bar{x}(x,y)$, $\bar{y} = \bar{y}(x,y)$, $\bar{\xi} = \bar{\xi}(\xi,\eta,\mu,\nu)$, $\bar{\eta} = \bar{\eta}(\xi,\eta,\mu,\nu)$, $\bar{\mu} = \bar{\mu}(\xi,\eta,\mu,\nu)$, $\bar{\nu} = \bar{\nu}(\xi,\eta,\mu,\nu)$ — дифференцируемые функции.

Введём матричные обозначения: $\bar{\Xi} = \begin{pmatrix} \bar{\xi} & 0 \\ \bar{\eta} & 1 \end{pmatrix}$, $\Xi = \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ \eta & 1 \end{pmatrix}$, $\bar{R} = \begin{pmatrix} \bar{\mu} \\ \bar{\nu} \end{pmatrix}$, $\Lambda = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, $A_1 = \begin{pmatrix} a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}$, $B_1 = \begin{pmatrix} b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\bar{X} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$, $\chi = \begin{pmatrix} \chi^1 \\ \chi^2 \end{pmatrix}$, $\widehat{\Xi} = \begin{pmatrix} \widehat{\xi} & 0 \\ \widehat{\eta} & 1 \end{pmatrix}$, $\widehat{R} = \begin{pmatrix} \widehat{\mu} \\ \widehat{\nu} \end{pmatrix}$, $\Xi_1 = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$, $\widehat{\xi} = \widehat{\xi}(\mu,\nu), \widehat{\eta} = \widehat{\eta}(\mu,\nu), \widehat{\mu} = \widehat{\mu}(\mu,\nu), \widehat{\nu} = \widehat{\nu}(\mu,\nu), \widehat{p} = \widehat{p}(\mu,\nu), \widehat{q} = \widehat{q}(\mu,\nu)$ — дифференцируемые функции.

Тогда, исходная система функциональных уравнений принимает матричный вид:

$$\bar{\Xi}\bar{X} + \bar{R} = \chi. \tag{1}$$

Решения исходной системы (1) удовлетворяют следующим двум условиям:

$$\Delta = \frac{\partial(\bar{x},\bar{y})}{\partial(x,y)} \neq 0, \ \ \Box = \frac{\partial(\bar{\xi},\bar{\eta},\bar{\mu},\bar{\nu})}{\partial(\xi,\eta,\mu,\nu)} \neq 0. \tag{2}$$

Далее находим невырожденные решения системы (1). Отметим, что матрица $\bar{\Xi}$ невырождена, поскольку иначе $\bar{\xi} = 0$, что противоречит неравенству $\Box \neq 0$ в (2).

Теорема. *Общее невырожденное решение функционального уравнения (1), с точностью до подходящей замены координат, может быть представлено в следующем виде:*

$$\bar{X} = \Lambda X + A_1, \, \bar{\Xi} = \widehat{\Xi}, \, \bar{R} = \widehat{R} + \widehat{\Xi}\Lambda\Xi_1, \, \chi = \widehat{\Xi}\Lambda(X + \Xi_1) + \widehat{R},$$

© Кыров В.А., Скопинцев И.В., 2025

причем $\Lambda = const$, $A_1 = const$;

$$\left\{\begin{array}{c} \bar{x} = \beta y + a_3,\ \bar{y} = \gamma x + b_2\beta y^2/2 + (b_2a_3 + \delta)y + b_3, \\ \bar{\xi} = \widehat{\xi},\ \bar{\eta} = b_2\eta + \widehat{\eta}, \\ \bar{\mu} = \beta\eta\widehat{\xi} + \widehat{\mu},\ \bar{\nu} = \gamma\xi + \beta b_2\eta^2/2 + \beta\eta\widehat{\eta} + \delta\eta + \widehat{\nu}, \\ \chi^1 = \beta v\widehat{\xi} + \widehat{\mu} + a_3\widehat{\xi}, \\ \chi^2 = \gamma u + \beta b_2 v^2/2 + \beta v\widehat{\eta} + (b_2a_3 + \delta)v + \widehat{\nu} + a_3\widehat{\eta} + b_3; \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{c} \bar{x} = (a_3e^{a_1x+a_2y} - \beta)/a_2,\ \bar{y} = \gamma x + \delta y + b_3, \\ \bar{\xi} = \widehat{\xi}e^{a_1\xi+a_2\eta},\ \bar{\eta} = \widehat{\eta}e^{a_1\xi+a_2\eta}, \\ \bar{\mu} = \widehat{\xi}e^{a_1\xi+a_2\eta}\beta/a_2 + \widehat{\mu},\ \bar{\nu} = \widehat{\eta}e^{a_1\xi+a_2\eta}\beta/a_2 + \gamma\xi + \delta\eta + \widehat{\nu}, \\ \chi^1 = \widehat{\xi}e^{a_1u+a_2v}a_3/a_2 + \widehat{\mu},\ \chi^2 = \widehat{\eta}e^{a_1u+a_2v}a_3/a_2 + \gamma u + \delta v + b_3 + \widehat{\nu}, \end{array}\right.$$

$a_2 \neq 0$, $a_1\beta = a_2\alpha$, $a_3 = const$, $b_3 = const$.

Заметим, что метод, применяемый при доказательстве выше сформулированной теоремы, апробирован в статьях [1, 2].

Литература

1. Кыров В.А. Невырожденные канонические решения одной системы функциональных уравнений / В.А. Кыров, Г.Г. Михайличенко // Изв. вузов. Матем. — 2021. — № 8. — С. 46–55. DOI: https://doi.org/10.26907/0021-3446-2021-6-46-55

2. Кыров В.А. Решение трех систем функциональных уравнений, связанных с комплексными, двойными и дуальными числами / В.А. Кыров, Г.Г. Михайличенко // Изв. вузов. Матем. — 2023. — № 7. — С. 42–51. DOI: https://doi.org/10.26907/0021-3446-2023-7-42-51

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА О РАВНОВЕСИИ ПЛАСТИНЫ ТИМОШЕНКО С ОТСЛОИВШИМСЯ ТОНКИМ ЖЕСТКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ[1]

Н.П. Лазарев (Якутск, СВФУ)

nyurgunlazarev@yandex.ru

Предлагается новая модель, описывающая контакт пластины модели Тимошенко с недеформируемым наклонным препятствием, ограничивающим пластину с боковой части. При этом, считается, что пластина содержит тонкое жесткое включение, которое описывается цилиндрической поверхностью. Предполагается, что включение частично отслаивается, при этом та часть, которая отслаивается,

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания (проект № FSRG-2023-0025).

© Лазарев Н.П., 2025

может контактировать с препятствием. Условия непроникания записываются в виде граничных условий как на части внешней границы, так и в виде неравенства, выполненного в одной точке — это соответствует условию для крайнего волокна включения. Сформулирована задача минимизации. Доказано, что задача имеет решение в подходящем классе функций Соболева. Относительно моделей пластин без отслоившегося включения вариационные задачи с условием непроникания для наклонного препятствия изучены, например, в [1,2].

Литература

1. Kovtunenko V.A. Variational inequality for a Timoshenko plate contacting at the boundary with an inclined obstacle / V.A. Kovtunenko, N.P. Lazarev // Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. — 2024. — V. 382, № 2277. — P. 20230298.

2. Lazarev N.P. Equilibrium problem for a Kirchhoff—Love plate contacting with an inclined and lateral obstacles / N.P. Lazarev, G.M. Semenova, A.S. Nikulin // Mathematical Notes of NEFU. — 2024. — V. 31, № 2. — P. 14–30.

О НАИЛУЧШЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В L_2

М.Р. Лангаршоев, С.С. Хоразмшоев

(Москва, МГТУ-МАСИ; Душанбе, ТТУ им. М. Осими)

mukhtor77@mail.ru, skhorazmshoev@mail.ru

Пусть $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел; $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Через $L_2 = L_2[0, 2\pi]$ обозначим пространство 2π-периодических измеримых по Лебегу функций, норма которых $\|f\| = \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}|f(x)|^2dx\right)^{1/2} < \infty$.

Под $L_2^{(r)}$ $\left(r \in \mathbb{Z}_+, L_2^{(0)} \equiv L_2\right)$ понимаем множество 2π-периодических функций $f \in L_2$, у которых производные $(r-1)$-го порядка абсолютно непрерывны, а производные $f^{(r)} \in L_2$. Символом $\mathcal{F}_{2n-1}$ обозначим подпространство тригонометрических полиномов порядка $2n-1$.

Величина $E_{n-1}(f)_2 = \inf\left\{\|f - T_{n-1}\|_2 : T_{n-1}(x) \in \mathcal{F}_{2n-1}\right\}$ называется наилучшее приближение функции $f \in L_2$ подпространством $\mathcal{F}_{2n-1}$. Пусть $S_h(f,x) = \frac{1}{2h}\int\limits_{-h}^{h} f(x+h)dx$, $h > 0$ — функция Стеклова

© Лангаршоев М.Р., Хоразмшоев С.С., 2025

элемента $f \in L_2$. Следуя работы [1], равенствами

$$\Delta_h^1(f,x) = S_h(f,x) - f(x),\ \Delta_h^m(f,x) = \Delta_h^1(\Delta_h^{m-1}(f,x),x)$$

определим соответственно конечные разности первого и высших порядков.

Величина $\Omega_m(f,t) = \sup\{\|\Delta_h^m(f,\cdot)\| : 0 < h \leqslant t\}$ называется специальным модулем непрерывности m-го порядка функции f.

Через $b_n(\mathfrak{N}, L_2)$, $d^n(\mathfrak{N}, L_2)$, $d_n(\mathfrak{N}, L_2)$, $\delta_n(\mathfrak{N}, L_2)$ и $\Pi_n(\mathfrak{N}, L_2)$ обозначим соответственно бернштейновский, гельфандовский, колмогоровский, линейный и проекционный n-поперечников (см. [2]), где $\mathfrak{N}$ — центрально-симметричное множества из L_2.

Также полагаем $\mathcal{E}_{n-1}(\mathfrak{N})_2 := \sup\{E_{n-1}(f)_2 : f \in \mathfrak{N}\}$.

Пусть $\Phi(u)$, $0 \leqslant u < \infty$, непрерывная неубывающая функция такая, что $\Phi(0) = 0$. Для любых чисел $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ и $u > 0$ через $W_m^{(r)}(u)$ и $W_m^{(r)}(u,\Phi)$ обозначим класс функций $f \in L_2^{(r)}$, которые соответственно удовлетворяют неравенствам

$$\frac{6}{u^3}\int\limits_0^u t(u-t)\Omega_m^{1/m}(f^{(r)},t)dt \leqslant 1,$$

$$\left(\int\limits_0^u t(u-t)\Omega_m^{1/m}\left(f^{(r)},t\right)dt\right)^m \leqslant \Phi(u).$$

Для произвольных $m, n \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{Z}_+$ и $u > 0$ введем в рассмотрение следующую экстремальную аппроксимационную характеристику

$$\mathcal{K}_{m,n,r}(u) = \sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{E_{n-1}(f)_2}{\left(\int\limits_0^u t(u-t)\Omega_m^{1/m}(f^{(r)},t)_2 dt\right)^m}.$$

Теорема 1. *Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ и $0 < u \leqslant 3\pi/(4n)$. Тогда*

$$\mathcal{K}_{m,n,r}(u) = \frac{6^m n^{3m-r}}{(n^3u^3 - 6nu + 6\sin nu)^m}.$$

Теорема 2. *Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ и $u > 0$. Тогда имеют место равенства*

$$\sigma_{2n}\left(W_m^{(r)}(u), L_2\right) = \sigma_{2n-1}\left(W_m^{(r)}(u), L_2\right) = \mathcal{E}_{2n-1}\left(W_m^{(r)}(u)\right)_2 =$$

$$= \frac{1}{n^{r-3m}} \left(\frac{u^3}{n^3u^3 - 6nu + 6\sin nu} \right)^m,$$

где $\sigma_n(\cdot)$ *— любой из вышеперечисленных* n*-поперечников.*

Теорема 3. *Пусть* $m, n, r \in \mathbb{N}$ *и* $u \in (0; 3\pi/(4n)]$. *Тогда имеет место следующее равенство*

$$\mathcal{E}_{n-1}(W_m^{(r)}(u, \Phi))_2 = \frac{1}{n^{r-3m}} \left(\frac{6}{n^3u^3 - 6nu + 6\sin nu} \right)^m \Phi(u).$$

Литература

1. Абилов В.А. Некоторые вопросы приближения 2π периодических функций суммами Фурье в пространстве $L_2(2\pi)$ / В.А. Абилов, Ф.В. Абилова // Матем. заметки. — 2004. — Т. 76, вып. 6. — С. 803-811.

2. Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений /В.М. Тихомиров. — М. : МГУ. 1976. — 304 с.

ОБ УСПОКОЕНИИ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ НА ВРЕМЕННОМ ГРАФЕ-ЗВЕЗДЕ С ГЛОБАЛЬНЫМ СЖАТИЕМ[1]

А.П. Леднов (Саратов, СГУ)

lednovalexsandr@gmail.com

Рассмотрим систему управления на временно́м графе-звезде

$$\ell_1 y(t) := y_1'(t) + b_1 y_1(t) + c_1 y_1(q^{-1}t) = u_1(t), \quad 0 < t < T_1, \tag{1}$$

$$\ell_j y(t) := y_j'(t) + b_j y_j(t) + c_j y_j(q^{-1}(t - (q-1)T_1)) = u_j(t), \quad t > 0, \;\; j = \overline{2, m}, \tag{2}$$

$$y_j(t) = y_1(t + T_1), \quad t \in ((q^{-1} - 1)T_1, 0), \quad j = \overline{2, m}, \tag{3}$$

$$y_1(0) = y_0 \in \mathbb{R}, \quad y_j(0) = y_1(T_1), \quad j = \overline{2, m}, \tag{4}$$

где $q > 1$, $b_j, c_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1, m}$.

Зафиксируем $T_j > (q-1)T_1$, $j = \overline{2, m}$. Требуется выбором управлений $u_j(t)$ привести систему (1)–(4) в состояние равновесия. Для этого достаточно найти $u_j(t) \in L_2(0, T_j)$, $j = \overline{1, m}$, обеспечивающие

$$y_j(t) = 0, \quad t \in [q^{-1}(T_j - (q-1)T_1), T_j], \quad j = \overline{2, m}. \tag{5}$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 24-71-10003).

© Леднов А.П., 2025

Выполнение условий (5) гарантирует последующее спокойствие системы при $u_j(t) = 0$ для $t > T_j$ и $j = \overline{2,m}$. Минимизируя требуемые усилия $\|u_j\|_{L_2(0,T_j)}$, $j = \overline{1,m}$, приходим к вариационной задаче

$$\textstyle\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \int_0^{T_j} (\ell_j y(t))^2\, dt \to \min \tag{6}$$

при условиях (3)–(5), где $\alpha_j > 0$ – фиксированные веса.

Для выбора весов α_j, $j = \overline{1,m}$, можно использовать вероятностный подход [1]. А именно, положить $\alpha_1 = 1$, а в качестве α_j, $j = \overline{2,m}$, взять вероятности сценариев, задаваемых соответствующими уравнениями в (2).

Понятие временнóго графа предложено в [1,2], где на графы была перенесена задача об успокоении системы управления с постоянным запаздыванием [3,4]. В настоящей работе рассматривается случай, когда запаздывание не постоянно, а является пропорциональным времени сжатием. На интервале этот случай был изучен в [5] для уравнения нейтрального типа.

Обозначим через $\mathcal{B}$ краевую задачу

$$\mathcal{L}_j y(t) := -\alpha_j (\ell_j y)'(t) + \alpha_j b_j \ell_j y(t) + \tilde{\ell}_j y(t) = 0,\ 0 < t < l_j,\ j = \overline{1,m},$$

при условиях (3)–(5) и условии типа Кирхгофа

$$\alpha_1 y_1'(T_1) - \textstyle\sum_{k=2}^{m} \alpha_k y_k'(0) + \beta y_1(T_1) + \gamma y_1(q^{-1}T_1) = 0,$$

$$\beta := \alpha_1 b_1 - \textstyle\sum_{k=2}^{m} \alpha_k b_k, \quad \gamma := \alpha_1 c_1 - \textstyle\sum_{k=2}^{m} \alpha_k c_k,$$

где $l_1 := T_1$, $l_j := q^{-1}(T_j - (q-1)T_1)$, $j = \overline{2,m}$, и

$$\tilde{\ell}_1 y(t) = \begin{cases} q\alpha_1 c_1 \ell_1 y(qt), & 0 < t < q^{-1}T_1, \\ q\sum_{k=2}^{m} \alpha_k c_k \ell_k y(qt - T_1), & q^{-1}T_1 < t < l_1, \end{cases}$$

$$\tilde{\ell}_j y(t) = \begin{cases} q\alpha_j c_j \ell_j y(qt + (q-1)T_1), & 0 < t < l_j, \\ 0, & l_j < t < T_j, \end{cases} \qquad j = \overline{2,m}.$$

Теорема 1. *Кортеж $y = [y_1, \ldots, y_m] \in W_2^1(\Gamma) := \bigoplus_{j=1}^{m} W_2^1[0,T_j]$ является решением вариационной задачи (3)–(6) тогда и только тогда, когда $y \in W_2^2(\tilde{\Gamma}) := \bigoplus_{j=1}^{m} W_2^2[0,l_j]$ и является решением $\mathcal{B}$.*

Теорема 2. *Краевая задача $\mathcal{B}$ имеет единственное решение $y = [y_1, \ldots, y_m] \in W_2^1(\Gamma) \cap W_2^2(\tilde{\Gamma})$. Кроме того, существует $C > 0$ такое, что $\|y\|_{W_2^1(\Gamma)} \leqslant C|y_0|$.*

Литература

1. Buterin S. On damping a control system with global aftereffect on quantum graphs: Stochastic interpretation / S. Buterin // Math. Meth. Appl. Sci. — (2024), 1–22, DOI 10.1002/mma.10549.

2. Бутерин С.А. Об успокоении системы управления произвольного порядка с глобальным последействием на дереве / С.А. Бутерин // Матем. заметки. — 2024. — Т. 115, № 6. — С. 825–848.

3. Красовский Н.Н. Теория управления движением / Н.Н. Красовский. — М. : Наука, 1968. — 476 с.

4. Skubachevskii A.L. Elliptic Functional Differential Equations and Applications / A.L. Skubachevskii. — Birkhäuser, Basel, 1997.

5. Россовский Л.Е. Эллиптические функционально-дифференциальные уравнения со сжатием и растяжением аргументов неизвестной функции / Л.Е. Россовский. — СМФН, 2014. — Т. 54 — С. 3–138.

АТОМАРНЫЕ ФУНКЦИИ В ТЕОРИИ АППРОКСИМАЦИИ И ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЯХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

О.Ю. Лисина, Д.А. Лисин (Курск, КГУ / Краснодар, ИМСИТ)
lisina_korovina@mail.ru

Построение приближенных решений краевых задач представляется актуальным направлением вычислительной математики. В последние десятилетия получили свое развитие методы аппроксимации с использованием радиально-базисных функций (РБФ) [4]. Так как такие функции обладают рядом свойств, полезных с точки зрения численного приближения, их применение расширилось до использования в качестве базисных при построении приближенных решений краевых задач, а именно – в реализации бессеточных методов [1, 3]. Преимущество бессеточных методов по сравнению с сеточными состоит в формировании приближенного решения в виде линейной комбинации базисных функций и дискретизации области решения набором базисных функций, что значительно упрощает процедуру реализации вычислительного алгоритма. К тому же, для реализации алгоритма приближенного решения задачи бессеточными методами нет необходимости привязываться к узлам сетки, с помощью которой обычно дискредитируется область решения с использованием сеточных методов.

© Лисина О.Ю., Лисин Д.А., 2025

Наряду с РБФ в практике решения задач аппроксимации и математической физики используются атомарные радиальные базисные функции (АРБФ) [2, 5]. В отличии от РБФ эти функции являются финитными и бесконечно дифференцируемыми. Локальность функций приводит к формированию разреженной матрицы при реализации проекционного метода построения приближенного решения, а гладкость функций улучшает качество аппроксимации. Успешное использование атомарных функций для решения задач аппроксимации обусловило необходимость построения многомерных обобщений АРБФ. В практике численного анализа АРБФ получили значительные преимущества по сравнению, например, с интерполяционными сплайнами, при построении которых необходимо решать систему алгебраических уравнений, размерность которых определяется условиями интерполяции. Атомарные функции позволяют рассматривать задачи интерполяции сложных функций, а также использовать их при решении краевых задач с сложным геометрическим описанием области решения.

В результате решения функционально-дифференциального уравнения (ФДУ) вида

$$Lu(x_1,\ldots,x_n) = \oint\limits_{\partial\Omega} \varphi(\xi_1,\ldots,\xi_n)u(ax_1-\xi_1,\ldots,ax_n-\xi_n)d\omega +$$

$$+\mu u(ax_1,\ldots,ax_n)$$

где L – линейный дифференциальный оператор, $\partial\Omega$ - граница выпуклой замкнутой области, были получены финитные решения, которые и получили название АРБФ. Преимуществом этих функций является тот факт, что можно построить функции как от двух переменных, так и больше, используя один и тот же алгоритм построения. Так, для решения двумерной задачи теплопроводности по бессеточной схеме можно использовать атомарные функции, являющиеся решениями ФДУ вида:

$$\Delta u(x_1,x_2) - \delta^2 u(x_1,x_2) = \lambda \oint\limits_{\partial\Omega} u(a(x_1-\xi_1),a(x_2-\xi_2))d\omega +$$

$$+\mu u(ax_1,ax_2),$$

где существование финитного решения обеспечивается соответствующими коэффициентами λ и μ. Носителем такой функции является круг.

Построить АРБФ трех независимых переменных можно, решив ФДУ вида:

$$Lu(x_1, x_2, x_3) = \lambda \oint\limits_{\partial\Omega} u(a(x_1 - \xi_1), a(x_2 - \xi_2), a(x_3 - \xi_3))d\omega +$$

$$+\mu u(ax_1, ax_2, ax_3)$$

Носителями таких функций является шар, радиус которого также можно варьировать. При этом использование различных дифференциальных операторов дает возможность получить различные финитные функции, что дополняет преимущества использования таких функций при построении приближенных решений задач математической физики.

Литература

1. Ali, I. Approximate Solution of Second Order Singular Perturbed and Obstacle Boundary Value Problems Using Meshless Method Based on Radial Basis Functions / I. Ali, S. Haq, R. Ullah et al. // J Nonlinear Math Phys — 2023. — № 30 — C. 215-234.

2. Kolodyazhny V. Multidimensional generalizations of atomic radial basis functions / V. Kolodyazhny, D. Lisin, O. Lisina //Вестник Харьковского национального университета имени В.Н.Каразина, серия «Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления» — 2023. — Выпуск 58 — С. 28-36.

3. Li D. M. On tracking arbitrary crack path with complex variable meshless methods / D. M. Li, J.-H. Liu, F.-H. Nie, C.A. Featherston, Z. Wu//Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering — 2022. — № 399 — Article 115402.

4. Majdisova Z. Radial basis function approximation: comparison and applications / Z. Majdisova, V. Scala//Applied Mathematical Modelling — 2017. — № 51 — C. 728-743.

5. Protektor D.O. A Meshless Method of Solving Three-Dimensional Nonstationary Heat Conduction Problems in Anisotropic Materials / D.O. Protektor, V.M. Kolodyazhny, D.A. Lisin, O.Yu. Lisina//Cybernetics and Systems Analysis — 2021. — Vol.57 — C. 470-480.

О 7-МЕРНЫХ АЛГЕБРАХ ЛИ, ИМЕЮЩИХ 5-МЕРНЫЕ НИЛЬРАДИКАЛЫ[1]

А.В. Лобода (Воронеж, ВГУ)

lobvgasu@yandex.ru

В задаче описания голоморфно однородных вещественных гиперповерхностей пространства $\mathbb{C}^4$ представляют естественный интерес 7-мерные алгебры Ли голоморфных векторных полей в этом пространстве. Классификация 7-мерных разрешимых неразложимых алгебр Ли [1] содержит 939 типов абстрактных алгебр. При этом изученные алгебры (149 типов нильпотентных алгебр Ли и 594 типа алгебр Ли, содержащих 6-мерные нильрадикалы) достаточно редко допускают голоморфные реализации в $\mathbb{C}^4$ с невырожденными по Леви не сводимыми к трубкам орбитами.

Ниже обсуждаются 99 типов 7-мерных алгебр Ли из [1], имеющих 5-мерные нильрадикалы со структурой $g_1^2 \oplus g_3$ и единственным нетривиальным коммутационным соотношением $[e_1, e_2] = e_3$. Семейство этих алгебр разбито в работе [1] на 9 подсемейств:

$$L_1(33), L_2(11), R_3(4), L_4(11), L_5(2), R_6(6), R_7(16), R_8(9), R_9(7),$$

где числа в скобках показывают количества типов алгебр в каждом из подсемейств.

Семейство L_1, самое обширное из них, исследовал Крутских В.В. (оформление результатов завершается и готовится к печати). В связи с этим исследованием возникла гипотеза об отсутствии невырожденных по Леви не сводимых к трубкам орбит в пространстве $\mathbb{C}^4$ у этих 99 типов алгебр Ли.

Теорема 1. Никакие алгебры Ли из семейств L_2, L_4, L_5, R_6, R_7, R_8 не допускают Леви-невырожденных нетрубчатых 7-мерных орбит в пространстве $\mathbb{C}^4$.

В то же время для алгебр семейств R_3 и R_9 имеются голоморфные реализации в $\mathbb{C}^4$ с невырожденными нетрубчатыми орбитами.

Пример 1. Алгебры Ли голоморфных векторных полей в $\mathbb{C}^4$ с базисами ($\varepsilon = \pm 1$)

$$e_1 = (0, i, -z_2, 0),\ e_2 = (0, 1, 0, 0),\ e_3 = (0, 0, 1, 0),\ e_4 = (0, 0, z_1^2, i\varepsilon),$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 23-21-00109).

© Лобода А.В., 2025

$$e_5 = (0,0,0,1),\ e_6 = (-\frac{i}{2}z_1, i\varepsilon z_1, -z_1^2 z_4, -i\varepsilon z_4),\ e_7 = (z_1, z_2, 2z_3, 0).$$

являются реализациями при $m = n = 0, p = 1$ алгебры из трехпараметрического семейства $R_{3.3}$ с таблицей нетривиальных коммутационных соотношений

$R_{3.3}$	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1		e_3					e_1
e_2	$*$					me_2	pe_2
e_3						me_3	$(1+p)e_3$
e_4						$ne_4 + e_5$	
e_5						$-e_4 + e_5$	
e_6		$*$	$*$	$*$	$*$		
e_7	$*$	$*$	$*$				

.

Орбитами таких алгебр являются (с точностью до голоморфной эквивалентности) нетрубчатые Леви-невырожденные гиперповерхности пространства $\mathbb{C}^{\not\geq}$ с уравнениями

$$y_4 = \pm(x_1^2 + y_1^2) \pm y_2^2 + \varepsilon x_1 y_1 y_3.$$

Замечание. В отличие от приведенного примера алгебры остальных трех типов $R_{3.1}, R_{3.2}$ и $R_{3.4}$ из семейства R_3 не имеют Леви-невырожденных не сводимых к трубкам орбит.

Пример 2. Семейство алгебр $R_{9.1}$, зависящее от параметра $m \in$, имеет голоморфные реализации с базисами:

$$e_1 = (0, i, -z_1 z_2, i z_1 z_2),\ e_2 = (0,1,0,0),\ e_3 = (0,0,z_1,-iz_1),$$

$$e_4 = (0,0,1,0),\ e_5 = (0,0,0,1),$$

$$e_6 = (mz_1, -iz_2, \frac{1}{2}z_2^2 z_1 + mz_3, -\frac{i}{2}z_2^2 z_1 + mz_4),\ e_7 = (iz_1, 0, -z_4, z_3).$$

Эти алгебры не содержат «явных» признаков вырождения орбит или сводимости этих орбит к трубкам.

Литература

1. Vu A.L. Classification of 7-dimensional solvable Lie algebras having 5-dimensional nilradicals /A.L. Vu, T.A. Nguyen, T.T.C. Nguyen, T.T.M. Nguyen, T.N. Vo // Communications in Algebra. — 2023. — V. 51, № 5. — P. 1866–1885.

РАЗЛОЖЕНИЕ НА АТОМЫ ДЛЯ КЛАССОВ $\mathcal{H}^{p,q}(\mathbf{X})$

М.М. Логиновская (Минск, БГУ)
LoginovskayaMM@bsu.by

Пусть (X, d, μ) — множество с σ-конечной борелевской мерой μ и квазиметрикой d (неравенство треугольника заменено условием

$$\exists\, K_d \geqslant 1 \quad \forall\, x, y, z \in X \quad d(x, z) \leqslant K_d[d(x, y) + d(y, z)]).$$

Квазиметрика порождает шары

$$B = B(x, t) := \{y \in X : d(x, y) < t\}, \quad x \in X,\ t > 0.$$

Рассмотрим произведение

$$\mathbf{X} := X \times I, \text{ где } I = (0, t_0),\ 0 < t_0 \leqslant +\infty,$$

с мерой-произведением $\mu \times \lambda$ (λ — мера Лебега на I), см. [1, § 3.3], и «некасательные» области подхода к точкам $x \in X$ «границы» множества $\mathbf{X}$

$$D(x) := \{(y, t) \in \mathbf{X} : d(x, y) < t\},\ x \in X.$$

Для функции $u : \mathbf{X} \to \mathbb{C}$ определим максимальный оператор

$$\mathcal{N}u(x) := \sup\{|u(y, t)| : (y, t) \in D(x)\}, \quad x \in X.$$

Пусть $\mathcal{H}^0(\mathbf{X})$ — множество всех измеримых функций $u : \mathbf{X} \to \mathbb{C}$ (эквивалентные функции не отождествляются), для которых $\mathcal{N}u$ почти всюду конечна. Для $0 < p, q \leqslant \infty$ введем классы

$$\mathcal{H}^{p,q}(\mathbf{X}) := \{u \in \mathcal{H}^0(\mathbf{X}) : \mathcal{N}u \in L^{p,q}(X)\},$$

где $L^{p,q}(X)$ — стандартные пространства Лоренца [2, п. 1.4].

Для $0 < p \leqslant 1$ назовем p-атомом любую функцию $a \in \mathcal{H}^0(\mathbf{X})$ со свойствами: 1) существует шар $B \subset X$, для которого $\operatorname{supp} a \subset \mathcal{T}(B)$, 2) $|a(y, t)| \leqslant [\mu(B)]^{-1/p}$ для всех $(y, t) \in \mathbf{X}$.

Здесь множество $\mathcal{T}(B)$ определяется равенством

$$\mathcal{T}(B) := \mathbf{X} \setminus \left(\bigcup_{x \notin B} D(x) \right).$$

© Логиновская М.М., 2025

Говорят, что мера μ удовлетворяет условию удвоения, если существует такое число $K_\mu > 0$, что

$$\mu(B(x,2r)) \leqslant K_\mu \mu(B(x,r)), \quad x \in X, \ r > 0.$$

Теорема. *Пусть X удовлетворяет условию удвоения, $0 < p \leqslant 1$, $0 < q \leqslant \infty$. Тогда для любой функции $u \in \mathcal{H}^{p,q}(\mathbf{X})$ существует последовательность $\{u_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \subset \mathcal{H}^0(\mathbf{X})$ со свойствами:*

1) $u(x,t) = \sum\limits_k u_k(x,t)$ при всех $(x,t) \in \mathbf{X}$;

2) $|u_k(x,t)| \leqslant 2^{k+1}$ при всех $(x,t) \in \mathbf{X}$;

3) $\operatorname{supp}\left(u - \sum\limits_{k=-N}^{N} u_k\right) \subset \{|u| \leqslant 2^{-N}\} \cup \mathcal{T}(\{\mathcal{N}u > 2^{N+1}\})$;

4) для каждого $k \in \mathbb{Z}$ функция u_k представима в виде

$$u_k = \sum_j \lambda_k^j a_k^j, \quad \lambda_k^j = 2^{k+1}[\mu(B_k^j)]^{1/p},$$

где a_k^j — p-атом с носителем $\operatorname{supp} a_k^j \subset \mathcal{T}(B_k^j)$ для некоторого шара B_k^j, а λ_k^j удовлетворяют неравенству

$$\left(\sum_k \left[\sum_j |\lambda_k^j|^p\right]^{q/p}\right)^{1/q} \leqslant C\|u\|_{\mathcal{H}^{p,q}(\mathbf{X})} \text{ при } q < \infty$$

и

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\sum_j |\lambda_k^j|^p\right)^{1/p} \leqslant C\|u\|_{\mathcal{H}^{p,\infty}(\mathbf{X})} \text{ при } q = \infty$$

(постоянная C не зависит от u).

Эта теорема является естественным обобщением предложения 2 из [3] (случай $p = q = 1$).

Литература

1. Богачев В. И. Основы теории меры / В.И. Богачев. — М. — Ижевск: Регулярная и хаотич. динамика, 2003. — Т. 1. — 584 с.

2. Grafakos L. Classical Fourier Analysis / L. Grafakos. — New York: Springer, 2014. — Graduate Texts in Math. № 249. — 655 p.

3. Coifman R. Some new function spaces and their applications in harmonic analysis / R. Coifman, Y. Meyer, E. Stein // J. Funct. Analysis. — 1985. — V. 62, № 2. — P. 304–335.

ОБРАЩЕНИЕ B-ПОТЕНЦИАЛОВ РИССА И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РАДОНА — КИПРИЯНОВА[1]

Л.Н. Ляхов, В.А. Калитвин, М.Г. Лапшина

(Воронеж, ВГУ, Елец, ЕГУ им. И.А. Бунина, Липецк, ЛГПУ имени П.П. Семенова-Тян-Шанского, РАНХиГС)

levnlya@mail.ru, kalitvin@gmail.com, marina.lapsh@ya.ru

Пусть положительное число γ фиксировано и пусть $\mathbb{R}_n^+$ — часть евклидова пространства точек $x = (x_1, \ldots, x_n)$, определенная неравенством $x_1 > 0$. Через $\mathcal{P}_{x_1}^{\gamma}$ будем обозначать оператор Пуассона [1], действие которого на интегрируемую функцию f по переменной x_1 определено следующим выражением:

$$\mathcal{P}_{x_1}^{\gamma} f(x) = C(\gamma) \int_0^{\pi} f(x_1 \cos\alpha,\ x')\ \sin^{\gamma-1}\alpha\ d\alpha, \quad C(\gamma) = \frac{\Gamma(\frac{\gamma+1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{\gamma}{2})},$$

где, для удобства, ввели обозначение $x = (x_1, x'),\ x' = (x_2, \ldots, x_n)$.

Через $S_{ev}(\mathbb{R}_n^+)$ обозначим класс пробных функций Л.Шварца $\{\varphi\}$, состоящий из функций четных по переменной x_1. Соответствующий класс регулярных весовых распределений S'_{ev} определяется весовой билинейной формой

$$(f,\, \varphi)_\gamma = \int\limits_{\mathbb{R}_n^+} f(x)\ \varphi(x)\ x_1^{\gamma} dx.$$

На основе оператора Пуассона введем в пространстве распределений S'_{ev} весовую обобщенную δ-функцию, сосредоточенную на поверхности $P(x) = 0,\ x \in \overline{\mathbb{R}_n^+}$ (как правило, размерности $n-1$) следующим определением:

$$(\mathcal{P}_{x_1} \delta(P(x))\,, \varphi)_\gamma = C(\gamma) \int\limits_{\Gamma = \{z:\ P(z)=0\}} \widetilde{\varphi}(z)\ z_2^{\gamma-1}\ d\Gamma(z), \tag{1}$$

где $z = (z_1, z_2, x'),\ \widetilde{\varphi}(z) = \varphi\left(\sqrt{z_1^2 + z_2^2}, x'\right)$ и введены обозначения $\left\{ \begin{array}{l} z_1 = x_1 \cos\alpha, \\ z_2 = x_1 \sin\alpha, \end{array} \right|$, $0 < \alpha < \pi$. При этом $-\infty < z_1 < \infty,\ 0 < z_2 < \infty$.

Отметим, что если бы первоначально поверхность $P(x) = 0$ была бы сферой $|x| - R = 0$, то отображенная поверхность интегрирования в

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 24-21-00387).

© Ляхов Л.Н., Калитвин В.А., Лапшина М.Г., 2025

(1) — тоже сфера $|z|=R$, но уже в евклидовом пространстве большей размерности: $\mathbb{R}^+_{n+1}=\{z:\ z_2>0\}$. Далее рассматривается ситуация, когда поверхностью интегрирования является гиперплоскость $p=\langle x,\theta\rangle$ в $\mathbb{R}_n$, где $\langle x,\theta\rangle=\sum\limits_i x_i\theta_i$. Тогда трансформация (1) приведет к следующей трансформации плоскости интегрирования:

$$\{x\in\mathbb{R}^+_n:\langle x,\theta\rangle=p\}\overset{def(1)}{\longrightarrow}\{z\in\mathbb{R}^+_{n+1}:\langle z,\Theta\rangle=p\},\Theta=(\theta_1,0,\theta_2,\ldots,\theta_n). \quad (2)$$

Преобразование Радона—Киприянова (введено в работах [2,3]; см. также книги [4], с.211 – 225; [5], с. 483 –495) определено следующей конструкцией:

$$K_\gamma[f](\theta;p)=\int\limits_{\mathbb{R}^+_n} f(x)\mathcal{P}^\gamma_{x_1}\delta(p-\langle x;\theta\rangle)\ x_1^\gamma dx, \quad (3)$$

где $x=(x_1,x')\in\left\{\mathbb{R}+_n:\ x_1\in\mathbb{R}^+_1,\ x'\in\mathbb{R}_{n-1}\right\}$. Согласно определению (1), имеем

$$K_\gamma[f](\Theta;p)=C(\gamma)\int\limits_{\Gamma=\{z:\ p=\langle z\ ,\ \Theta\rangle\}^+}\widetilde{f}(z)\ z_2^{\gamma-1}\ d\Gamma(z), \quad (4)$$

где $\{z:p=\langle z,\ \Theta\rangle\}^+=\{z:\langle z,\ \widetilde{\theta}\rangle=p,\ z_2>0\}$, и $\widetilde{f}(z)=f\left(\sqrt{z_1^2+z_2^2},x'\right)$. Здесь в правой и левой частях равенства (4) интегрирование происходит по $n+1$ переменным; в связи с чем определения преобразований (3) и (4) совпадают: $K_\gamma[f](\theta;p)=K_\gamma[f](\Theta;p)$. Правая часть этого равенства представляет собой *специальное весовое преобразование Радона* в $\mathbb{R}^+_{n+1}$ (см. [2,3]), которое можно записать в классическом виде $K_\gamma[f](\Theta;p)=C(\gamma)\int\limits_{\mathbb{R}^+_{n+1}}\widetilde{f}(z)\ \delta(p-\langle z,\Theta\rangle)z_2^{\gamma-1}dz$.

При фиксированном векторе θ примем обозначение $K_\gamma[f](\theta;p)=K_{\gamma,\theta}[f](p)\iff K_\gamma[f](\Theta;p)=K_{\gamma,\Theta}[f](p)$. Полуплоскость интегрирования в (4) обозначим $\Theta^+_\perp$, т.е. $\Theta^+_\perp=\{z:\langle\Theta,z\rangle=p,\quad z_2\geqslant0\}\in\overline{\mathbb{R}^+_{n+1}}$.

Следуя [6] (с. 17), запишем преобразование Радона—Киприянова в виде интеграла по полуплоскости $\Theta^+_\perp$ в евклидовом пространстве точек $\in\mathbb{R}^+_{n+1}:K_{\gamma,\Theta}[f](p)=C(\gamma)\int_{\Theta^+_\perp}\widetilde{f}(p\Theta+z)z_2^{\gamma-1}\ d\Gamma(z)$.

Оператор, двойственный к преобразованию Радона-Киприянова [7] в R_n определим интегрированием по весовой сфере: пусть $\mathbb{Z}^+_\gamma=S^+(n+1)\times\mathbb{R}_1$. $g\in S_{ev}(\mathbb{Z}^+_\gamma)$, Тогда

$$K_\gamma^{\#} g(x) = \int\limits_{S_1^+(n+1)} g(\Theta, \langle \Theta, x \rangle)\ \Theta^\gamma\ dS.$$

В-потенциалами Рисса порядка α называются интегральные операторы вида

$$(\mathbf{U}^\gamma f)(x) = \int\limits_{E_n^+} f(y)\ T^y \left(\frac{1}{|x|^\lambda}\right)\ y^\gamma\, dy\,, \quad -\infty < \lambda < n + |\gamma|\,,$$

где T^y — смешанный обобщенный сдвиг, в котором собственно обобщенный сдвиг Пуассона действует только по первой переменной x_1.

Имеет место равенство $F_B[\mathbf{U}_\gamma^\alpha \varphi](\xi) = \widehat{k_\alpha^\gamma}(\xi)\widehat{\varphi}(\xi)\,, \quad \varphi{\in}S_{ev}(\mathbb{R}_n^+)\,,$ где $k_\alpha^\gamma(x){=}A^{-1}|x|^{\alpha-n-|\gamma|}$ — ядро В-потенциала Рисса, а константа A выбирается так, чтобы $F_B[k_\alpha^\gamma](\xi) = \widehat{k_\alpha^\gamma}(\xi) = |\xi|^{-\alpha}$ [8].

Действие оператора $\Delta_B^{\frac{n+|\gamma|-1}{2}}$ на В-потенциал Рисса определено в рамках преобразования Фурье—Бесселя, в результате получаем формулу обращения В-потенциала Рисса; если $\varphi{\in}S_{ev}$, то

$$\Delta_B^{\frac{n+|\gamma|-1}{2}} U_\gamma^\alpha = F_B^{-1}{}_{\xi\to x}\left[\xi^{n+|\gamma|-1}\widehat{U_\gamma^\alpha}[f]\right] = f(x).$$

Теорема 1. *Пусть $f \in S_{ev}^+(R^n)$. Тогда для любого $\alpha < n{+}\gamma$*

$$f(x) = \frac{1}{C(\gamma)} U_\gamma^{-\alpha} K_\gamma^{\#} U_\gamma^{\alpha-n-\gamma+1} K_\gamma[f].$$

Доказательство основано на связи преобразования Радона, преобразования Фурье-Бесселя и преобразования Фурье, открытой в работе [2]: $2\pi F_{p\to\alpha}[K_\gamma[f]](\xi) = [F_B[f]](\alpha\theta), \quad \alpha\theta = \xi.$

Литература

1. Левитан Б.М. Разложение в ряды и интегралы Фурье по функциям Бесселя / Б.М. Левитан //Успехи мат. наук. —1951. — Т. 6, № 2. — С. 102–143.

2. Киприянов И.А. О преобразованиях Фурье, Фурье—Бесселя и Радона / И.А. Киприянов, Л.Н. Ляхов // Докл. АН СССР. —1998. — 360. № 2. —С. 157–160.

3. Ляхов Л.Н. Преобразование Киприянова—Радона /Л.Н. Ляхов //Тр. МИАН. —2005. — Т.248. — С.153–163.

4. Ляхов Л.Н. В–гиперсингулярные интегралы и их применение к описанию функциональных классов Киприянова и к интегральным уравнениям с В–потенциальными ядрами /Л.Н. Ляхов. — Липецк : ЛГПУ, 2007. — 232 с.

5. Катрахов В.В. Сингулярные краевые задачи /В.В. Катрахов, А.А. Катрахова, Л.Н. Ляхов, А.Б. Муравник, С.М. Ситник, Хе Кан Чер. — Воронеж : ООО ИПЦ «Научная книга», 2024. — 528 с.

6. Наттерер Ф. Математические основы компьютерной томографии /Ф. Наттерер. — М. : Мир, 1990. — 288 с.

7. Ляхов Л.Н. О преобразовании, двойственном к преобразованию Радона—Киприянова /Л.Н. Ляхов, В.А. Калитвин, М.Г. Лапшина // Итоги науки и техн. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. — 2024. — Т.Ё232. — С. 70–77.

8. Киприянов И.А. Сингулярные эллиптические краевые задачи /И.А. Киприянов. —М. : Наука, 1997. — 208 с.

СОБОЛЕВСКИЕ УСРЕДНЕНИЯ ФУНКЦИЙ, ПОРОЖДЕННЫЕ ОБОБЩЕННЫМ $\mathbb{T}$-ПСЕВДОСДВИГОМ[1]

Л.Н. Ляхов, С.А. Рощупкин, Е.Л. Санина (Воронеж, ВГУ, Елец, ЕГУ им. И.А. Бунина, Липецк, ЛГПУ им. П.П. Семенова-Тян-Шанского

levnlya@mail.ru, roshupkinsa@mail.ru, sanina08@mail.ru

Хорошо известна функция

$$\omega(x)=\left\{\begin{array}{cc} C_h\, e^{-\frac{h^2}{h^2-|x|^2}}, & |x|<h, \\ 0, & |x|\geqslant h, \end{array}\right\}, \quad x\in\mathbb{R}_n, \quad n\geqslant 1, \tag{1}$$

введенная С.Л. Соболевым в [1] в качестве усредняющего ядра (например, см. книги [2, с. 23], [3, с. 34]). В классических математических задачах свертка $(f*\,\omega_h)=\int f(y)\,\omega_h(|x-y|)\,d\mu(y)$ (где в качестве интегральной меры обычно рассматривается мера интегрирования Лебега $d\mu(y)=dy$) называется *средним функции* f.

В 70-х годах прошлого века И.А. Киприяновым было инициировано изучение *весовых средних функций* (см. [4]) на основе обобщенного сдвига

$$T^{y_i}_{x_i} f(x_i,x^i)=\frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma_i}{2}\right)}\int\limits_0^\pi f\left(\sqrt{x_i^2+y_i^2-2x_iy_i\cos\alpha}\; x^i\right)\,\sin^{\gamma-1}\alpha\, d\alpha \tag{2}$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 24-21-00387).

© Ляхов Л.Н., Рощупкин С.А., Санина Е.Л., 2025

и меры интегрирования

$$d\mu(x) = x^\gamma dx,\; x^\gamma = \prod_{i=1}^{n} |x_i|^{\gamma_i},\;\; \gamma_i \geqslant 0,\; n \geqslant 1, \tag{3}$$

которая приспособлена для исследования задач уравнений с сингулярным дифференциальным оператором Бесселя $B_{\gamma_i}{=}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}{+}\frac{\gamma_i}{x_i}\,\frac{\partial}{\partial x_i}$, при условии $\gamma_i \geqslant 0$. Свертки функций на основе сдвига (2) и меры (3) обеспечили успешное применение полученных *обобщенных средних значений* функций в задачах теории сингулярных дифференциальных уравнений (см. [5], [6]).

Замечание 1. *В [4] отмечен следующий факт, имеющий принципиальное значение: выражение (2) симметрично относительно относительно аргумента x и шага y.*

В этой работе исследуется новый класс весового усреднения функций на основе введенных в [8] и [9] операторов обобщенного $\mathbb{T}$-псевдосдвига и обобщенного $\mathbb{T}$-сдвига.

Через $\mathbb{R}_n^+$ обозначим область в евклидовом пространстве точек $\mathbb{R}_n$, определенную неравенствами $x_i{>}0$, $i{=}\overline{1,n}$. Пусть $\overline{\mathbb{R}_n^+}{=}\{x\,:\,x_i \geqslant 0\}$.

Пусть x и $y\,{\in}\mathbb{R}_n$ и $\gamma{=}(\gamma_i,\dots,\gamma_n), 0 > -\gamma_i{>}-1$. $\mathbb{T}$-Псевдосдвигом в $\mathbb{R}_n$ будем называть интегральный оператор
$\mathbb{T}_x^y\, f(x){=}\prod_{i=1}^n \mathbb{T}_{x_i}^{y_i}\, f(x)$, где

$$\mathbb{T}_{x_i}^{y_i} f(x){=}C\int\limits_0^\pi [x_i^2 y_i^2]^{\frac{\gamma_i+1}{2}}\frac{f\left(\sqrt{(x_i^2{+}y_i^2{-}2x_iy_i\,\cos\alpha_i)},\,x^i\right)}{(x_i^2{+}y_i^2{-}2x_iy_i\,\cos\alpha_i\,)^{\frac{\gamma_i+1}{2}}}$$

$$\sin^{\gamma_i+1}\alpha_i\,d\alpha_i.$$

Здесь и ниже применено обозначение аргумента функции
$x{=}(x_i,x^i)$, $x^i=(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n)$. Свойства обобщенного $\mathbb{T}_x^y$-псевдосдвига приведены в [8] и [9].

Обобщённый $\mathbb{T}$-сдвиг в $\mathbb{R}_n$ имеет вид

$$\overset{*}{\mathbb{T}}{}_x^y\, f(x) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{T}_{x_i}^{y_i}\, f(x), \tag{3}$$

где

$$\overset{*}{\mathbb{T}}{}_{x_i}^{y_i} f(x) = (y_i^2)^{-\frac{\gamma_i+1}{2}}\,\mathbb{T}_{x_i}^{y_i} f(x) =$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_i+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma_i+2}{2}\right)}\int\limits_0^{\pi}(x_i^2)^{\frac{\gamma_i+1}{2}}\frac{f\left(\sqrt{(x_i^2+y_i^2-2x_iy_i\,\cos\alpha_i,x^i)}\right)}{\left(\sqrt{(x_i^2+y_i^2-2x_iy_i\,\cos\alpha_i)}\right)^{\gamma_i+1}}$$

$$\sin^{\gamma_i+1}\alpha_i d\alpha_i. \qquad (4)$$

Весовая билинейная форма в $\mathbb{R}_n^+$, отвечающая параметру $-\gamma$ задана следующим выражением:

$$(u,v)_{-\gamma}=\int\limits_{\mathbb{R}_n^+}u(x)\ v(x)\ x^{-\gamma}dx\,,\quad x^{-\gamma}dx=\prod_{i=1}^{n}x_i^{-\gamma_i}dx_i\,,\quad 0<\gamma_i<1. \qquad (5)$$

Определение (1) порождает весовое функциональное пространство

$$L_2^{-\gamma}=L_2^{-\gamma}(\mathbb{R}_n^+)=\left\{u:\ \|u\|_{L_2^{-\gamma}}=\sqrt{(u,u)_{-\gamma}}<\infty\right\},\quad -\gamma_i>-1.$$

Замечание 2. *В отличие от замечания 1, применяемый в этой работе $\mathbb{T}$-псевдосдвиг (8) не симметричен по отношению к аргументу функции и шагу сдвига, Тоже самое справедливо и для $\mathbb{T}$-сдвига (9) :* $\overset{*}{\mathbb{T}}{}_x^y f(x)\neq\overset{*}{\mathbb{T}}{}_y^x f(y)$.

В нашей работе использовались следующие

Свойства оператора $\overset{*}{\mathbb{T}}$.

1. Нулевой шаг не меняет функцию: $\overset{*}{\mathbb{T}}{}^y f(x)\Big|_{y=0}=f(x)$.

2. Пусть f суммируемая функция. Тогда функция $\overset{*}{\mathbb{T}}{}^y f(x)$ — четная и по аргументу функции x и по шагу сдвига y.

3. Пусть f ограниченная суммируемая по мере $d\mu_{-\gamma}(x)$ функция в $\overline{\mathbb{R}_n^+}$ и пусть $\sup_x f=M$. *Тогда* $\sup_x\overset{*}{\mathbb{T}}{}_x^y f(x)=M$.

Дополнительно отметим также формулу

$$(\mathbb{T}_y^x u\,,\,v)_{-\gamma}=\int\limits_{\Omega^+}\mathbb{T}^y u(x)\,v(x)\,x^{-\gamma}dx=\int\limits_{\Omega^+}\overset{*}{\mathbb{T}}{}^y\,u(x)\,v(x)\,x^1dx=$$

$$=\left(\overset{*}{\mathbb{T}}{}_x^y u\,,\,v\right)_1,$$

где $y^1dy=\prod\limits_{i=1}^{n}y_idy$.

Определим $\mathbb{T}$-среднюю функции $u_h(x)$ в виде обобщенной $\mathbb{T}$-свертки с усредняющим ядром ω_h (равенство(1)):

$$u_h(x)=\int_{\Omega^+}u(y)\mathbb{T}^x\,\omega_h(y)\,y^{-\gamma}dy=\int_{\Omega^+}u(y)\,\overset{*}{\mathbb{T}}{}^x\,\omega_h(y)\,y^1dy,$$

где Ω^+ ограниченная область, которая, вообще говоря как правило, прилегает к координатным гиперплоскостям $x_i=0,\, i=\overline{1,n}$. Области, полученные зеркальным отражением области Ω^+ от координатных плоскостей $x_i=0$. обозначим Ω^-. Границу $\Omega^+{\in}\mathbb{R}^+$ будем обозначать Γ^+, а через Γ_0 — те части границ, которые принадлежат координатным гиперплоскостям $x_i{=}0$. Объединение этих областей обозначим $\Omega=\Omega^+\cup\Omega^-$.

Таким образом граница Γ^o — это граница симметрии, поэтому под областью Ω^+ будем понимать частично замкнутую область $\Omega^+=\Omega^+\cup\Gamma^o$. Подобласти таких областей, как правило, включают соответствующие части границ Γ^o и мы их называем s-внутренней подобластью области Ω^+ с соответствующей частью границы Γ^o.

Введем пространство

$$L_p^{-\gamma}(\Omega^+)=\left\{f\,:\,x^{-\frac{\gamma}{p}}f(x)\in L_p(\Omega^+),\;1{\leqslant}p{<}\infty,\right.$$

$$\left.\|f\|_{L_p^{-\gamma}(\Omega^+)}{=}\left(\int\limits_{\Omega^+}f(x)\,x^{-\gamma}dx\right)^{1/p}\right\}$$

Теорема 1. Пусть x и $y\in\Omega^+$. Если $u\in C^\infty(\Omega^+)$, то $\mathbb{T}_h$-средняя $u_h(x)$ при $h\to 0$ стремится к функции $u(x)$ равномерно во всякой замкнутой s-подобласти Ω'^+ области Ω^+.

Теорема 2. $\|u_h\|_{L_p^{-\gamma}(\Omega^+)}\leqslant 2^{n+|\gamma|}\,\|u\|_{L_p^{-\gamma}(\Omega^+)},\quad 1{\leqslant}p{<}\infty.$

Литература

1. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике / С.Л. Соболев. — М. : Наука, 1988. — 256 с.

2. Никольский С.М. Приближения функций многих переменных и теоремы вложения / С.М. Никольский. – М.: Наука, 1971.

3. Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных / С.Г. Михлин. – М.: Высшая школа, 1977.

4. Левитан Б. М. Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье / Б.М. Левитан // Успехи мат. наук. — 1951. — Т. 6, № 2(42). —С. 102–143.

5. Киприянов И.А. Об операторе осреднения, связанном с обобщенным сдвигом / И.А. Киприянов, Н.А. Кащенко // Докл. АН СССР. — 1974. — Т. 218, № 1. —С. 21–23.

6. Киприянов И.А. Сингулярные эллиптические краевые задачи / И.А. Киприянов. — М. : Наука, 1997. — 200 с.

7. Катрахов В.В. Сингудярные краевые задачи. Воронеж, Научная книга. 2024. С.528.

8. Ляхов Л. Н. Псевдосдвиг и фундаментальное решение Δ_B-оператора Киприянова / Л.Н. Ляхов, Ю.Н. Булатов, С.А. Рощупкин, Е.Л. Санина // Дифференциальные уравнения. — 2022. — Т. 58, № 12. —С. 1654–1665.

9. Ляхов Л.Н. Единственность решения задач Дирихле для уравнения Пуассона с сингулярным Δ_B-оператором Киприянова / Л.Н. Ляхов, Ю.Н. Булатов, С.А. Рощупкин, Е.Л. Санина // Дифференциальные уравнения. – 2023. — Т. 59, № 4. — С. 483–493.

10. Ляхов Л. Н. Оператор Киприянова–Бельтрами с отрицательной размерностью операторов Бесселя и сингулярная задача Дирихле для B-гармонического уравнения / Л.Н. Ляхов, Е.Л. Санина // Дифференциальные уравнения. — 2020. — Т. 56, № 12. —С. 1610–1620.

13. Ляхов Л. Н. Дифференциальные и интегральные операции в скрытой сферической симметрии и размерность кривой Коха / Л. Н. Ляхов, Е. Л. Санина // Математические заметки. – 2023. – Т. 113, № 4. – С. 517–528.

О МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОСОБЕННОСТЯХ РАЗДЕЛЕНИЯ ДВУХ РАДИО СИГНАЛОВ НА ЭКВИДИСТАНТНОЙ МОЛОБАЗОВОЙ АНТЕННОЙ РЕШЕТКЕ

А.Р. Малютин (Воронеж, ВГУ)
malyutinaleks181003@gmail.com

В работе изучается возможность определения наличия двух источников радиолучей на малобазовой (число датчиков 4, 5) антенной кольцевой эквидистантной решетке по значениям модулей амплитуд сигналов в идеальном случае без помех.

Электромагнитное поле, создаваемое монохроматическим точечным источником, расстояние от которого до датчиков много больше

© Малютин А.Р., 2025

размеров антенной решетки, можно считать плоской волной

$$E(\vec{k},\vec{r},t) = Ae^{i(-\omega\cdot t+\varphi)}e^{i\cdot\vec{k}\cdot\vec{r}},$$

где $\vec{k}$ - волновой вектор, $\vec{r}$ - радиус-вектор точки пространства, t - время. Кроме того, E зависит от амплитуды A, круговой частоты ω, начальной фазы φ_0, но эти параметры предполагаются одинаковыми для всех датчиков решетки.

Волновой вектор $\vec{k}$ определяется частотой регистрируемого сигнала λ, углом возвышения β и азимутом θ

$$\vec{k} = \frac{2\cdot\pi}{\lambda}(\cos\beta\cos\theta, \cos\beta\sin\theta, \sin\beta).$$

Педполагается, что кольцевая фазированная антенная решетка радиуса R расположена горизонтально, а начало координат находится в центре круга.

В случае прихода сигнала на датчик о двух источников введем нижний индекс:

$$E_m(\vec{k},\vec{r},t) = A_m\cdot e^{i(-\omega\cdot t+\varphi_m)}\cdot e^{i\rho\cdot\cos\beta_m\cos(\theta_m-\gamma_n)}, \rho = \frac{2\cdot\pi}{\lambda}\cdot R, m = 1,2.$$

На датчиках регистрируются комплекснозначные значения U_n, определяемые формулами:

$$U_n = E_1(\vec{k},\vec{r},t) + E_2(\vec{k},\vec{r},t),$$

где n - число датчиков.

Проблема обнаружения сигналов заключается в возможности существования таких A_3, φ_3, β_3 и θ_3, что:

$$U_k = E_1(\vec{k},\vec{r},t) + E_2(\vec{k},\vec{r},t) = E_3(\vec{k},\vec{r},t), \tag{1}$$

для всех $k = 1, 2, ..., n$.
Тогда для квадратов модулей U_k справедливы равенства:

$$|U_1|^2 = |U_2|^2 = ... = |U_n|^2 = A_3^2 \tag{2}$$

При условии, что $\rho < \frac{\pi}{2}$, а θ_1 и θ_2 не кратны π.

В работе рассматривается $n = 4$ и $n = 5$. При $n = 4$ сигналы разделить невозможно в случае синфазности волн. В случае, когда $n = 5$ равенства (2) не выполняются при наложенных условиях, это

означает, что по значениям модулей амплитуды можно обнаружить два источника.
Система уравнений (1) в общем случае не разрешается для $n = 4$. Если $n = 5$, получается система из десяти уравнений (пять на вещественную часть U и пять на мнимую) с восемью неизвестными (A_1, φ_1, β_1, θ_1 и A_2, φ_2, β_2, θ_2), в этом случае можно определить один или два источника сигнала. Вопрос об эффективных методах решения системы открыт.

В работе для $n = 4$ разбирался только случай синфазных сигналов, пример решения задачи в случае не синфазных сигналов описан в статье [1].

Литература

1. Виноградов А.Д. Алгоритм аналитического разделения радиолучей двухлучевого электромагнитного поля малобазовым радиопеленгатором с четырехэлементной эквидистантной кольцевой антенной решеткой / А.Д. Виноградов. — М. : Антенны. 2022. № 5. С. 49–55. DOI: https://doi.org/10.18127/j03209601-202205-03.

2. Мезин В.К. Автоматические радиопеленгаторы / В.К. Мезин. — М. : Сов. Радио, 1969. — 604 с.

3. Кукес И.С., Старик М.Е. Основы радиопеленгации / И.С. Кукес, М.Е. Старик. — М. : Сов. Радио, 1969. — 604 с

DisplacementMLP+: МОДЕЛЬ НЕЙРОННОЙ СЕТИ НА ОСНОВЕ МНОГОСЛОЙНОГО ПЕРСЕПТРОНА (MLP) ДЛЯ АНАЛИЗА ДИНАМИЧЕСКИХ СЦЕН

Д.В. Мангилева (Екатеринбург, УрФУ)
daria.mangileva@urfu.ru

Многослойный персептрон (MLP) является одной из первых моделей нейронных сетей. На его вход поступает входная сетка координат, а на выходе — тензор значений, каждый из которых соответствует определённой координате. Активное применение MLP началось недавно, в частности для анализа динамических сцен [1]. Глобально, данная модель состоит из двух MLP. Один выполняет функцию генератора изображений $\ddot{I}$, а второй — функцию генератора сетки $\ddot{G}$. Такая схема позволяет получить поле смещения с двух последовательных кадров без предварительного обучения. В недавней работе

© Мангилева Д.В., 2025

автора текущего исследования было продемонстрировано, что данная схема модели с оптимально подобранными параметрами имеет хорошие перспективы [2]. На основании ее результатов была предложена схема для обучения генератора изображений, смысл которой заключается в следующем:

Пусть $I^{(m)}$ — изображение, которое необходимо сгенерировать, тогда $\widetilde{I} = \{I_1^{(m)}, \ldots, I_n^{(m)}\}$ — набор частей изображения $I^{(m)}$. Генератор изображений $\ddot{I}$ стремится получить $I^{(m)}$, тогда как аналогичные модели $\Upsilon = \{\ddot{I}_0, \ddot{I}_1, \ldots, \ddot{I}_n\}$ стремятся вывести соответствующее им значение в наборе $\widetilde{I}$. На основании предыдущего исследования [2], модели Υ в совокупности должны обучаться лучше и быстрее, однако к каждому из них на вход поступают сетки xy со значениями от -1 до 1. Для дальнейшего определения поля смещения необходимо, чтобы на входе и выходе у генератора сеток $\ddot{G}$ поступало единственное поле xy со значениями от -1 до 1. Таким образом, было предложено обучать генератор $\ddot{I}$ «постепенно» с помощью набора Υ. Другими словами, Υ выдает значения — $\widetilde{I'} = \{I_0'^{(m)}, I_1'^{(m)}, \ldots, I_n'^{(m)}\}$, совокупность которых стремится к эталону $I^{(m)}$ (1).

$$\min \left\| \widetilde{I'} - I^{(m)} \right\| \tag{1}$$

Пусть I' — выход генератора $\ddot{I}$ и он сравнивается с $\widetilde{I'}$. Для того чтобы скорости обучения моделей $\ddot{I}$ и $\widetilde{I}$ были примерно одинаковыми, I' также сравнивается с эталоном $I^{(m)}$ (2).

$$\min \left\| I' - \widetilde{I'} \right\| + \min \left\| I' - I^{(m)} \right\| \tag{2}$$

Модель на основе MLP с применением данной схемы обучения генератора изображений назовём DisplacementMLP+. Она тестировалась на выборке из 485 пар кадров. По результатам вычислений предложенный подход улучшает качетсво получаемых полей смещения на 16%. В таблице 1 приведены численные значения среднеквадратичной ошибки MSE и ее максимальное значение в пространстве (MaxSpace MSE) для DisplacementMLP+ и единственной на сегодняшний день неконтролируемой нейронной сетью для получения полей смещения — DICNet [3]. Как видно из таблицы, предложенная модель работает на уровне с DICNet по средним значениям MSE и лучше при обработке локальных областей, как показывает максимальная MSE в пространстве. Таким образом, предложенный подход для анализа динамических сцен имеет перспективу для дальнейшего развития.

Таблица 2: Среднеквадратичное отклонение для разных моделей нейронных сетей

Метод	**MSE**	**MaxSpace MSE**
DisplacementMLP+	0.051 ± 0.020	**0.561 ± 0.213**
DICNet	**0.050 ± 0.019**	1.257 ± 11.616

Литература

1.Nam S., Brubaker M. A., Brown M. S. Neural image representations for multi-image fusion and layer separation / S.Nam , M. A.Brubaker , M. S.Brown //European conference on computer vision. – Cham : Springer Nature Switzerland, 2022. – С. 216-232.

2. Mangileva D. The Optimal MLP-based Model for Displacement Field Measurement in 2D Images and Its Application Perspective //Proceedings of the 2024 2nd Asia Conference on Computer Vision, Image Processing and Pattern Recognition. – 2024. – С. 1-8.

3. Wang Y. Unsupervised CNN-based DIC method for 2D displacement measurement / Y.Wang , C.Zhou //Optics and Lasers in Engineering. – 2024. – Т. 174. – С. 107981.

РАВНОМЕРНАЯ РАЦИОНАЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ЧЕТНОГО И НЕЧЕТНОГО ПРОДОЛЖЕНИЙ ФУНКЦИЙ С ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ[1]

Т.С. Мардвилко (Минск, БГУ)
mardvilko@mail.ru

Рассмотрим следующие функции с логарифмической особенностью

$$h_{\nu\beta}(x) = \left(\ln_{(\nu)} \frac{a}{x}\right)^{-\beta}, x \in (0,1], \quad h_{\nu\beta}(0) = 0,$$

Здесь $\nu \in \mathbb{N}$ означает порядок логарифма, т.е. $\ln_{(1)}(\cdot) = \ln(\cdot)$, $\ln_{(\nu)}(\cdot) = \ln\left(\ln_{(\nu-1)}(\cdot)\right), \nu \geqslant 2$. Число $\beta > 0$, а $a > 1$ — достаточно большое, чтобы функция $\ln_{(\nu)} \frac{a}{x}$ была положительная при $x \in (0,1]$.

А.А. Пекарским [1, 2] найдена слабая асимптотика наилучших рациональных приближений функций $h_{n\beta}$, а именно показано

[1] Работа выполнена при поддержке Национальной академии наук Беларуси в рамках ГПНИ «Конвергенция – 2025» (проект № 20211888).

© Мардвилко Т.С., 2025

$$R_n\left(h_{1\beta};[0,1]\right) \asymp \frac{1}{n^{1+\beta}}, \quad n \geqslant 1,$$

$$R_n\left(h_{\nu\beta};[0,1]\right) \asymp \frac{1}{n\left(\ln_{(\nu-1)} n\right)^{\beta}}, \quad \nu \geqslant 2, \quad n \geqslant n(\nu).$$

Для $f \in C[0,1]$ будем рассматривать

$$f^{+}(x) = f(|x|); \quad f^{-}(x) = f(|x|)\mathrm{sign}x$$

соответственно четное и нечетное продолжение f на отрезок $[-1,1]$. Для нечетного продолжения дополнительно предполагаем, что $f(0) = 0$.

Для наилучших рациональных приближений четного и нечетного продолжений функции $h_{n\beta}$ справедливы теоремы 1 и 2 соответственно.

Теорема 1 [3]. *Для наилучших рациональных приближений $h_{n\beta}^{+}$ справедливы соотношения*

$$R_n\left(h_{1\beta}^{+};[-1,1]\right) \asymp \frac{1}{n^{1+\beta}}, \quad n \geqslant 1,$$

$$R_n\left(h_{\nu\beta}^{+};[-1,1]\right) \asymp \frac{1}{n\left(\ln_{(\nu-1)} n\right)^{\beta}}, \quad \nu \geqslant 2, \quad n \geqslant n(\nu).$$

Теорема 2 [3]. *Для наилучших рациональных приближений $h_{n\beta}^{-}$ выполняются эквивалентности*

$$R_n\left(h_{1\beta}^{-};[-1,1]\right) \asymp \frac{1}{n^{\beta}}, \quad n \geqslant 1,$$

$$R_n\left(h_{\nu\beta}^{-};[-1,1]\right) \asymp \frac{1}{\left(\ln_{(\nu-1)} n\right)^{\beta}}, \quad \nu \geqslant 2, \quad n \geqslant n(\nu).$$

Асимптотику наилучших рациональных приближений четного и нечетного продолжений других функций можно найти в [4, 5]. В работе [6] изучались наилучшие равномерные полиномиальные приближения четного и нечетного продолжения функции на $[-1,1]$.

Литература

1. Пекарский А.А. Рациональные приближения выпуклых функций / А.А. Пекарский // Матем. заметки. — 1985. — Т. 38, № 5. — С. 679–690.

2. Пекарский А.А. Чебышевские рациональные приближения в круге, на окружности и на отрезке / А.А. Пекарский // Матем. сб. — 1987. — Т. 133, № 1. — С. 86–102.

3. Мардвилко Т.С. Применение действительного пространства Харди — Соболева на прямой для исследования скорости равномерных рациональных приближений функций / Т.С. Мардвилко, А.А. Пекарский // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика — 2022. — № 3. — С. 16–36.

4. Мардвилко Т.С. Равномерная рациональная аппроксимация четного и нечетного продолжений функций / Т.С. Мардвилко // Матем. заметки. — 2024. — Т. 115, № 2. — С. 215–222.

5. Мардвилко Т.С. Равномерная рациональная аппроксимация нечетного и четного преобразований Коши / Т.С. Мардвилко // Матем. сб. — Т. 216, № 2. —С. 110-127.

6. Мардвилко Т.С. Соотношения между наилучшими равномерными полиномиальными приближениями функций и их четными и нечетными продолжениями / Т.С. Мардвилко // Итоги науки и техн. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. — 2023. — Т. 229. — С. 47–52.

ПРИБЛИЖЕНИЯ ПОЧТИ ВСЮДУ ФУНКЦИЙ ИЗ $L^P(\mathbb{T})$ ЧАСТИЧНЫМИ СУММАМИ РЯДА ФУРЬЕ

Д.И. Масютин (Екатеринбург, ИММ УрО РАН)
newselin@mail.ru

Пусть $\mathbb{T} := [-\pi, \pi)$ и функция $f \in L(\mathbb{T})$. Сопоставим функции f ее тригонометрический ряд Фурье

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx), \tag{1}$$

где коэффициенты a_k и b_k определяются стандартным образом. Через $S_n(f,x)$ обозначим значение n-й частичной суммы ряда (1) в точке x.

В 1974 году К. И. Осколков [1] получил следующую оценку:

$$|f(x) - S_n(f,x)| \leqslant C(x)E_n(f)\ln\ln\left(\frac{8E_0(f)}{E_n(f)}\right),$$

© Масютин Д.И., 2025

где $E_n(f)$ — наилучшее приближение функции f тригонометрическими полиномами степени не выше n в пространстве непрерывных функций и $C(x)$ — неотрицательная почти всюду конечная функция.

В настоящей работе получен аналог этой оценки для функций из классов $L^p(\mathbb{T})$. Через $E_n(f)_p$ будем обозначать наилучшее приближение функции f тригонометрическими полиномами степени не выше n в пространстве $L^p(\mathbb{T})$.

Теорема 1. *Пусть* $1 < p < +\infty, f \in L^p(\mathbb{T})$ *и неубывающая функция* $\varphi : [0; +\infty) \to [0; +\infty)$ *такая, что* $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k\varphi(k)} < +\infty$. *Тогда*

$$|f(x) - S_n(f, x)| \leqslant C(x) E_n(f)_p \varphi^{1/p} \left(\frac{E_0(f)_p}{E_n(f)_p} \right),$$

где $C(x)$ — *неотрицательная почти всюду конечная функция. Более того существует константа* $A > 0$ *такая, что для всех* $y > 0$

$$m\{x \in (\mathbb{T}) : C(x) > y\} \leqslant \frac{A}{y^p}.$$

Если $E_n(f)_p$ убывают не очень быстро, то имеет место следующая оценка снизу.

Теорема 2. *Пусть* $\{\varepsilon_n\}_{n=0}^{\infty}$ — *последовательность положительных чисел, монотонно стремящихся к нулю, причем для некоторого положительного* q *последовательность* $\{n^q \varepsilon_n\}_{n=0}^{\infty}$ *неубывающая. Неубывающая функция* $\varphi, \theta : [0; +\infty) \to [0; +\infty)$ *такая, что*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k\varphi(k)} = +\infty.$$

Тогда при любых значениях $1 < p < +\infty$ *и* $\varepsilon > 0$ *существует функция* $f \in L^p(\mathbb{T})$, *удовлетворяющая требованиям*

$$E_n(f)_p \leqslant \varepsilon_n, \quad n = 0, 1, \ldots$$

и для почти всех x

$$\varlimsup_{n \to +\infty} \frac{|f(x) - S_n(f, x)|}{\varepsilon_n \varphi^{1/p - \varepsilon} (\varepsilon_0 / \varepsilon_n)} = +\infty.$$

Литература

1. Осколков К.И. Оценка скорости приближения непрерывной функции и ее сопряженной суммами Фурье на множестве полной меры / К.И. Осколков // Изв. АН СССР, серия матем. – 1974. — Т. 38, № 6. — С. 1393–1407.

НОВЫЙ ОПЕРАТОР УМНОЖЕНИЯ РЕШЕТЧАТЫХ ФУНКЦИЙ И ЕГО СВОЙСТВА

А.М. Минитаева (Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана)
minitaeva@bmstu.ru

Постановка задачи. Новый оператор умножения $f[n] \overset{\tau}{\times} g[n]$ (тау-произведение решетчатых функций) должен соответствовать следующим требованиям:

1) Прямая разность тау-произведения решетчатых функций должна иметь схожий с производной произведения непрерывных функций вид $\Delta(f[n] \overset{\tau}{\times} g[n]) = \Delta f[n] \overset{\tau}{\times} g[n] + \Delta g[n] \overset{\tau}{\times} f[n]$;

2) При стремлении периода повторения к нулю тау-произведение должно стремиться к обычному произведению непрерывных функций: $\lim\limits_{T\to 0} f[n] \overset{\tau}{\times} g[n] = |_{t=nT} f(t)g(t)$, где $f(t) = |_{t=nT} \lim\limits_{T\to 0} f[n]$ и $g(t) = |_{t=nT} \lim\limits_{T\to 0} g[n]$;

3) Тау-умножение должно обладать переместительным, сочетательным и распределительным относительно сложения свойствами;

4) Должен существовать единственный такой операнд тау-умножения, как «единица», тау-произведение которого с любой решетчатой функцией дает саму эту функцию;

5) Должен существовать единственный такой операнд тау-умножения, как «ноль», тау-произведение которого с любой решетчатой функцией дает сам этот «ноль».

Для нахождения формулы, удовлетворяющей требованиям, разложим произведение непрерывных функций в ряд Маклорена.

Формула тау-произведения. $\tau[k] = f[n] \overset{\tau}{\times} g[n] = $
$$= \sum_{j=0}^{k} C_k^j \sum_{i=0}^{j} C_j^i \Delta^i f[0] \Delta^{j-i} g[0] = \sum_{i,j} (-1)^{k-i-j} C_k^{i,j} f[i] g[j],$$
где $C_k^{i,j} = \frac{k!}{i!j!(k-i-j)!}$.

Теорема 1. *Для двух решетчатых функций первая прямая разность их тау-произведения представляется суммой тау-произведения второй функции и первой прямой разности первой функции с тау-произведением первой функции и первой прямой разности второй функции.*

Теорема 2. *При стремлении периода повторения решетчатых функций к нулю их тау-произведение стремится к обычному произведению непрерывных функций* $\lim\limits_{T\to 0} f[n] \overset{\tau}{\times} g[n] = |_{t=nT} f(t)g(t)$.

© Минитаева А.М., 2025

Теорема 3. *Тау-умножение коммутативно.*

Теорема 4. *Тау-умножение ассоциативно.*

Теорема 5. *Тау-умножение обладает распределительным относительно сложения свойством.*

Теорема 6. $f[n] \overset{\tau}{\times} g[n] = f[n]$ *тогда и только тогда, когда* $g[n] = 1[n], (1[n] = 1, \forall n \in \mathbb{N}_0)$.

Теорема 7. $f[n] \overset{\tau}{\times} g[n] = 0[n]$ *тогда и только тогда, когда* $g[n] = 0[n], (0[n] = 0, \forall n \in \mathbb{N}_0)$.

Литература

1. Минитаева А.М. Многомодельный подход к прогнозированию нелинейных нестационарных процессов в задачах оптимального управления / А.М. Минитаева // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сборник трудов Международной научной конференции, Воронеж, 12–14 декабря 2022 года / Воронежский государственный университет. — Воронеж : Научно-исследовательские публикации, 2023. — С. 1564–1571.

2. Минитаева А.М. Новый оператор тензорного произведения и анализ нелинейных систем с полиномиальными функциями пространства состояний / А.М. Минитаева // Информационно-технологический вестник. — 2024. — Т. 41, № 3. — С. 3–14.

3. Минитаева А.М. Обзор подходов к несмещенной оценке коэффициентов авторегрессии / А.М. Минитаева // XIV Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2024 : Сборник трудов XIV Всероссийского совещания по проблемам управления ВСПУ-2024, Москва, 17–20 июня 2024 года / Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН. — Москва : Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2024. — С. 3779–3783. — DOI 10.25728/vspu.2024.3779.

4. Шайхутдинов А.А. Методы и аспекты прогнозного моделирования нелинейных нестационарных процессов / А.А. Шайхутдинов // Информационно-технологический вестник. — 2024. — Т. 40, № 2. — С. 66–76.

5. Шайхутдинов А.А. Расширенные комплексные матрицы метрического тензора и пространство Минковского для систем любой природы / А.А. Шайхутдинов // Информационно-технологический вестник. — 2024. — Т. 42, № 4.

О ЗАДАЧАХ ТИПА ДАРБУ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

А.Н. Миронов (Самара, СамГТУ)
miro73@mail.ru

Рассмотрим уравнение Бианки общего вида

$$L(u) \equiv \frac{\partial^n u(x)}{\partial x_1 \dots \partial x_n} + \sum_{\substack{|\alpha| \leqslant n-1, \\ \alpha_s \leqslant 1,\ s=\overline{1,n}}} a_\alpha(x) \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} = f(x), \quad (1)$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — мультииндекс, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ — длина мультииндекса, $u\,(x)$ — искомая функция, a_α, f — заданные функции.

Пусть D — область, ограниченная плоскостями X_i: $x_i = 0$, S: $x_n = x_1$, $i = \overline{2, n-1}$, и плоскостями $x_j = x_j^0 > 0$, $j = \overline{1,n}$. Считаем, что коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют условиям гладкости $a_\alpha \in C^\alpha(\overline{D})$, $f \in C$ в замыкании рассматриваемой области D. Класс $C^{(q_1, q_2, \dots, q_n)}(\overline{D})$ означает существование и непрерывность всех производных $\partial^{l_1 + l_2 + \dots + l_n} / \partial x_1^{l_1} \partial x_2^{l_2} \dots \partial x_n^{l_n}$, $l_i = \overline{0, q_i}$, $i = \overline{1,n}$, на множестве $\overline{D}$.

Задача Дарбу. *В области D найти регулярное решение уравнения* (1), *удовлетворяющее граничным условиям*

$$\begin{gathered} u|_{\overline{X}_i} = \varphi_i(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n), \quad i = \overline{1, n-1}, \\ u|_{\overline{S}} = \psi(x_1, \dots, x_{n-1}),\ \varphi_i \in C^{(1,1,\dots,1)}(\overline{X}_i),\ \psi \in C^{(1,1,\dots,1)}(\overline{S}). \end{gathered} \quad (2)$$

При этом должны выполняться условия согласования $\varphi_i|_{x_j=0} = \varphi_j|_{x_i=0} =$ *по всем* $i, j = \overline{1, n-1}$; $\varphi_i|_{x_n = x_1} = \psi|_{x_i=0}$, $i = \overline{2, n-1}$; $\varphi_1|_{x_n=0} = \psi|_{x_1=0}$.

Для уравнения (1) предложен метод Римана — Адамара, позволяющий построить решение задачи Дарбу (1)–(2) в явном виде (в терминах функции Римана — Адамара). Отметим, что частные случаи уравнения (1) были рассмотрены в работах [1], [2].

Полученные для уравнения (1) результаты допускают распространение на гиперболические уравнения с кратными характеристиками. Рассмотрим уравнение

$$u_{xxy} + a_{20}(x,y) u_{xx} + a_{11}(x,y) u_{xy} + a_{10}(x,y) u_x +$$

© Миронов А.Н., 2025

$$+a_{01}(x,y)u_y + a_{00}(x,y)u = f(x,y), \qquad (3)$$

которое рассматривалось, в частности, в [3, с. 132–138], [4, с. 124–126].

Пусть G область, ограниченная прямыми $x=0$, $y=y_0>0$, $y=x$, то есть $G=OB_1B_2$, $O(0,0)$, $B_1(0,y_0)$, $B_2(y_0,y_0)$, коэффициенты уравнения (3) удовлетворяют условиям гладкости $a_{ij}\in C^{(i,j)}(\overline{G})$.

Задача Дарбу. *В области G найти регулярное решение уравнения* (3), *удовлетворяющее условиям*

$$\begin{gathered} u|_{x=0}=\varphi(y), \quad u_x|_{x=0}=\varphi_1(y), \quad u|_{x=y}=\psi(x), \\ \varphi\in C^1([0,y_0]), \quad \varphi_1\in C^1([0,y_0]), \quad \psi\in C^2([0,y_0]), \\ \varphi(0)=\psi(0), \quad \varphi'(0)+\varphi_1(0)=\psi'(0). \end{gathered} \qquad (4)$$

Доказаны существование и единственность решения задачи (3)–(4), получены достаточные условия, обеспечивающие построение решения задачи в явном виде.

Литература

1. Миронов А.Н. Задача Дарбу для уравнения Бианки третьего порядка / А.Н. Миронов // Матем. заметки. — 2017. — Т. 102, вып. 1. — С. 64–71.

2. Миронов А.Н. Задача Дарбу для уравнения Бианки четвертого порядка / А.Н. Миронов // Дифференц. уравнения. — 2021. — Т. 57, № 3. — С. 349–363.

3. Жегалов В.И. Дифференциальные уравнения со старшими частными производными / В.И. Жегалов, А.Н. Миронов. — Казань: Изд-во Казанск. матем. общ-ва, 2001. — 226 с.

5. Жегалов В.И. Уравнения с доминирующей частной производной / В.И. Жегалов, А.Н. Миронов, Е.А. Уткина. — Казань: Казанск. ун-т, 2014. — 385 с.

О МЕТОДЕ РИМАНА В РАМКАХ КУРСА «УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ»

А.Н. Миронов, И.П. Фрелих, А.С. Чипура
(Самара, СамГТУ)
miro73@mail.ru

Теория гиперболических уравнений является неотъемлемой частью любого курса уравнений математической физики. В рамках

© Миронов А.Н., Фрелих И.П. Чипура А.С., 2025

этого курса традиционно упоминается метод Римана для гиперболического уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными [1, с. 245–258], [2, с. 169–174], [3, с. 193–200]. Вместе с тем, традиционно основное внимание уделяется другим методам построения решений начально-краевых задач.

Отметим, что метод Римана позволяет построить решения задач Гурса и Коши для уравнений с младшими членами, в том числе с переменными коэффициентами. В частности, известен явный вид функции Римана для телеграфного уравнения и уравнения Эйлера — Пуассона. В свою очередь это позволяет перейти к дальнейшему изучению задач для вырождающихся уравнений, метода Римана — Адамара для задачи Дарбу. Отметим также возможность применения модификации метода Римана к эллиптическим уравнениям второго порядка, записанным в комплексных независимых переменных [4, с. 62–70]. Таким образом, изучение метода Римана существенно расширяет математическую эрудицию обучающихся и набор методов, которыми они владеют.

В книге [5] излагаются некоторые обобщения классического метода Римана на псевдопараболические уравнения и уравнения Бианки.

Разработан курс «Уравнения математической физики» для магистратуры по направлению «Математическое образование», включающий в себя разделы, посвященные методам Римана и Римана — Адамара. В этих разделах рассмотрены задачи Гурса, Коши, Дарбу для гиперболических и псевдопараболических уравнений. При этом функция Римана для каждого из рассмотренных уравнений определяется как решение соответствующего интегрального уравнения Вольтерра второго рода.

Литература

1. Владимиров В.С. Уравнения математической физики / В.С. Владимиров. — М: Наука, 1971. — 512 с.

2. Бицадзе А.В. Уравнения математической физики / А.В. Бицадзе. — М: Наука, 1982. — 336 с.

3. Корзюк В.И. Уравнения математической физики / В.И. Корзюк. — М: ЛЕНАНД, 2021. — 480 с.

4. Бицадзе А.В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка / А.В. Бицадзе. — М: Наука, 1966. — 204 с.

5. Жегалов В.И. Дифференциальные уравнения со старшими частными производными / В.И. Жегалов, А.Н. Миронов. — Казань: Изд-во Казанск. матем. общ-ва, 2001. — 226 с.

О НЕПРЕРЫВНЫХ РЕШЕНИЯХ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ НА ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ГРАФЕ ПРИ ОБЩЕГО ВИДА УСЛОВИЯХ ТРАНСМИССИИ

А.В. Морозов (Воронеж, ВГУ)
dreemer42@yandex.ru

Рассмотрим связный ориентированный геометрический граф Γ из $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, понимаемый в соответствии с монографией [2]. Пусть $\mathcal{J}(\Gamma)$ — множество внутренних вершин Γ, тогда $\mathcal{R}(\Gamma) = \Gamma \setminus \mathcal{J}(\Gamma)$ — объединение ребер Γ. Будем полагать, что множество граничных вершин $\partial\Gamma$ пусто. На графе Γ рассматривается начальная задача для волнового уравнения

$$u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t), \;\; x \in \mathcal{R}(\Gamma), \; t > 0, \tag{1}$$

при начальных условиях

$$u(x,0) = \varphi(x), \; u_t(x,0) = \psi(x), \; x \in \Gamma \tag{2}$$

и условии трансмиссии общего вида

$$u_{tt}(a,t) = g_a(t, u(a,t), u_t(a,t), (u_h^+(a,t))_{h \in D(a)}), \; a \in \mathcal{J}(\Gamma), t > 0, \tag{3}$$

где $u : \Gamma \times [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ — искомая функция, $D(a) = \{h \in \mathbb{R}^n | \;\; |h| = 1$ и $(a+\varepsilon h) \in \Gamma$ для достаточно малых $\varepsilon > 0\}$, $u_h^+(a,t)$ определяются как $\lim\limits_{\varepsilon \to 0+} \varepsilon^{-1}[u(a+\varepsilon h, t) - u(a,t)]$, φ и ψ заданы, а g_a для всех $a \in \mathcal{J}(\Gamma)$ непрерывна.

Методом распространения граничных режимов (см. [1]) доказывается следующая теорема:

Теорема 1. *Существование и единственность решения задачи (1)-(3) эквивалентны существованию и единственности решения начальной задачи:*

$$\mu_a''(t) = g_a\big(t, \mu_a(t), \mu_a'(t), \big(\mathcal{A}_{a,h}\mu'\big)_{h \in D(a)}(t)\big), \; a \in \mathcal{J}(\Gamma), \; t > 0, \tag{4}$$

$$\mu_a(0) = \varphi(a), \; \mu_a'(0) = \psi(a), \tag{5}$$

где $\mu' = (\mu_c')_{c \in \mathcal{J}(\Gamma)}$,

$$\mathcal{A}_{a,h}\mu' = \overline{\varphi_{a,h}'} + \overline{\psi_{a,h}} + 2\big(\mathcal{G}_l \mu_b'\big) - \big(\mathcal{S}_l^+ \circ \mathcal{G}_l\big)(\mu_a') - \big(\mathcal{S}_l^- \circ \mathcal{G}_l\big)(\mu_a'),$$

© Морозов А.В., 2025

$l = |b-a|$, $b = b(a,h)$ — вершина Γ, смежная с a и такая, что $b = a + lh$, $\overline{\varphi}_{a,h}$ — нечетное $2l$-периодическое продолжение на $\mathbb{R}$ функции $\varphi(a+th)$, $t \in (0,l)$ (аналогично для $\overline{\psi}_{a,h}$), оператор граничного режима задается выражением

$$\big(\mathcal{G}_l\xi\big)(y) = \begin{cases} \sum\limits_{p=0}^{[(y-l)/2l]} \xi(y-(2p+1)l),\ y \geqslant 0, \\ -\big(\mathcal{G}_l\xi\big)(-y),\ y < 0, \end{cases}$$

а операторы сдвига определены как $\big(\mathcal{S}_l^+\eta\big)(t) = \eta(t+l)$, $\big(\mathcal{S}_l^-\eta\big)(t) = \eta(t-l)$. При этом $\mu_a(t) = u(a,t)$.

Литература

1. Глотов Н.В. Описание решений волнового уравнения на конечном и ограниченном геометрическом графе при условиях тренсмиссии типа «жидкого» трения / Н.В. Глотов, В.Л. Прядиев // Вестник ВГУ. Сер. : Физика. Математика. — 2006. — № 2. — С. 185–193.

2. Покорный Ю.В. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю.В. Покорный и др. — М. :ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 272 с.

О ВЕКТОРНОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЯХ С МАЛЫМИ СУММАМИ РИМАНА

К.М. Нараленков (Москва, МГИМО)
naralenkov@gmail.com

В работах [2] и [3] изучались взаимоотношения различных векторнозначных обобщений интеграла Римана в естественном для таких обобщений классе *измеримых по Риману функций.* В монографии [1] введены несколько типов равномерных условий малости для римановых сумм, в терминах которых охарактеризованы интегрируемые по Хенстоку и Мак-Шейну на отрезке действительнозначные функции. В настоящей заметке, получены обобщения некоторых из этих результатов в классе измеримых по Риману векторнозначных функций. Кроме того, установлена непротиворечивость интеграла Мак-Шейна и A-интеграла Римана.

Пусть X — действительное банахово пространство и $[a,b]$ есть фиксированный невырожденный отрезок действительной оси. Для функции $f : [a,b] \to X$ и $n \in \mathbb{N}$ обозначим $E_n(f) = \{t \in [a,b] :$

© Нараленков К.М., 2025

$\|f(t)\| > n\}$ и $[f]^n = f \cdot \chi_{[a,b]\setminus E_n(f)}$. Остальные используемые здесь обозначения и определения можно найти в [3].

Определение 1. Функция $f : [a, b] \to X$ имеет *глобально малые римановы суммы* (ГМРС) на $[a, b]$, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $N \in \mathbb{N}$ такое, что для всякого $n \geqslant N$ найдется измеримый масштаб δ на $[a, b]$ с условием

$$\left\| \sum_{k:t_k \in E_n(f)} f(t_k)\mu(I_k) \right\| < \varepsilon$$

всякий раз, когда $\{(I_k, t_k)\}_{k=1}^{K}$ есть разбиение Хенстока отрезка $[a, b]$ согласованное с δ.

Определение 2. Функция $f : [a, b] \to X$ имеет *глобально абсолютно малые римановы суммы* (ГАМРС) на $[a, b]$, если в определении 1 разбиения Хенстока заменяются на разбиения Мак-Шейна.

Определение 3. Пусть функция $f : [a, b] \to X$ измерима по Риману на $[a, b]$ и множество $E_n(f)$ измеримо для каждого $n \in \mathbb{N}$ кроме, возможно, конечного множества $T \subset \mathbb{N}$. Функция f называется *Q-интегрируемой* на $[a, b]$, к *Q-интегралу* $w \in X$, если $(\mathcal{M}) \int\limits_a^b [f]^n \to w$ при $n \to \infty$.

Теорема 1. *Пусть функция $f : [a, b] \to X$ измерима по Риману на $[a, b]$ и множество $E_n(f)$ измеримо для каждого $n \in \mathbb{N}$ кроме, возможно, конечного множества $T \subset \mathbb{N}$.*

(i) Функция f имеет ГМРС на $[a, b]$ тогда и только тогда, когда f как $\mathcal{H}$- так и Q-интегрируема на $[a, b]$ и оба интеграла совпадают.

(ii) Функция f имеет ГАМРС на $[a, b]$ тогда и только тогда, когда f $\mathcal{M}$-интегрируема на $[a, b]$.

Теорема 2. *Функция $f : [a, b] \to X$ $\mathcal{M}$-интегрируема на $[a, b]$, к интегралу $w \in X$, тогда и только тогда, когда для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, открытое множество $G \subset \mathbb{R}$ с условием $\mu(G) < \varepsilon$ и измеримый масштаб γ на $[a, b]$ с условием $(t - \gamma(t), t + \gamma(t)) \subset G$, если $t \in G$, такие, что*

$$\left\| \sum_{k:I_k \not\subset G} f(t_k)\mu(I_k) - w \right\| < \varepsilon$$

всякий раз, когда $\{(I_k, t_k)\}_{k=1}^{K}$ есть разбиение Мак-Шейна отрезка $[a, b]$ согласованное с постоянным масштабом δ с условием $t_k \notin G$, *если $I_k \not\subset G$, для каждого k и*

$$\left\| \sum_{k:I_k\subset G} f(t_k)\mu(I_k) \right\| < \varepsilon$$

всякий раз, когда $\{(I_k,t_k)\}_{k=1}^K$ есть разбиение Мак-Шейна отрезка $[a,b]$ согласованное с γ.

Теорема 3. *Если функция $f:[a,b]\to X$ интегрируема по Мак-Шейну и A-интегрируема по Риману на $[a,b]$, то оба интеграла совпадают.*

Литература

1. Lee Peng-Yee Lanzhou lectures on Henstock integration / Lee Peng-Yee — Teaneck : World Sci. Pub. Co., 1989. — 192 p.

5. Caponetti D. On the integration of Riemann-measurable vector-valued functions / D. Caponetti, V. Marraffa, K. Naralenkov // Monatshefte Math. — 2017. — Vol. 182, No. 3. — Pp. 513–536.

3. Naralenkov K.M. The A-integral for Riemann-measurable vector-valued functions. / K.M. Naralenkov // European J. of Math. — 2024. — Vol. 10, 35.

ОБ ОДНОМ СПЕКТРАЛЬНОМ СВОЙСТВЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ С ПРОИЗВОДНЫМИ ПО МЕРЕ

Е.Е. Некрылов, П.В. Садчиков, С.А. Шабров

(Воронеж, ВГУ)

pochta@mail.ru

Рассмотрим спектральную задачу

$$\begin{cases} Lu \equiv -(pu'_x)'_\sigma + qu = \lambda mu; \\ u(0)=u(l)=0, \end{cases} \tag{1}$$

с производными по мере. В работах [1,2] доказано, что спектор задачи (1) обладает осцилляционным свойством, т.е. состоит из собственных значений, единственная точка сгущения — это $+\infty$; нули собственных функций перемежаются.

Однако, остались не доказаны аналоги некоторых классических фактов.

© Некрылов Е.Е., Садчиков П.В., Шабров С.А., 2025

Решение задачи (1) мы ищем в классе абсолютно непрерывных на $[0,l]$ функций, первая производная которых σ–абсолютно непрерывна на $[0,l]$.

Само уравнение мы считаем заданным на специальном расширении $\overline{[0,l]}_\sigma$ отрезка $[0,l]$, которое строится следующим образом. Пусть $S(\sigma)$ — множество точек разрыва строго возрастающей на $[0,l]$ функции $\sigma(x)$. На $[0,l]$ зададим метрику $\rho(x,y)=|\sigma(x)-\sigma(y)|$. Очевидно, что если $S(\sigma)$ непусто, то метрическое пространство $([0,l];\rho)$ неполно.

Стандартное пополнение и дает нам $\overline{[0,l]}_\sigma$, в котором каждая точка $\xi \in S(\sigma)$ заменена на тройку упорядоченных элементов $\{\xi-0;\xi;\xi+0\}$. Само уравнение в точках $\xi\in S(\sigma)$ мы понимаем как равенство

$$-\triangle(pu'_x)(\xi)+q(\xi)u(\xi)=\lambda m(\xi)u(\xi),$$

где $\triangle\psi(x)=\triangle\psi(x+0)-\triangle\psi(x-0)$ полный скачок функции $\triangle\psi(x)$ в точке x.

Мы предполагаем выполненными следующие условия

1) $p(x)$ — σ–абсолютно непрерывна на $[0,l]$;

2) $\inf\limits_{[0,l]} p>0$;

3) $q(x)$ и $m(x)$ — σ -суммируемые на $\overline{[0,l]}_\sigma$ функции

4) $m(x)>0$ для всех $x\in\overline{[0,l]}_\sigma$.

Пусть $\varphi(x,\lambda)$ и $\psi(x,\lambda)$ — решения уравнения $Lu=\lambda mu$, удовлетворяющие начальным условиям $u(0)=0$, $u'_x(0)=1$ и $u(l)=0$, $u'_x(l)=-1$ соответственно. Если λ_k — одно из собственных значений задачи (1), то существует $\beta_k\neq 0$, такое, что $\varphi(x,\lambda)\equiv\beta_k\psi(x,\lambda)$, и справедливо равенство

$$\alpha_k\beta_k=\frac{d}{d\lambda}\triangle\Bigg|_{\lambda=\lambda_n},$$

где $\alpha_k=\int\limits_0^l\varphi^2(x,\lambda_k)M'_\sigma(x)d\sigma(x)$ и $\triangle(\lambda)$ — определитель Вронского системы $\{\varphi(x,\lambda),\psi(x,\lambda)\}$.

Литература

1. Покорный Ю.В. Осцилляционная теория Штурма-Лиувилля для импульсных задач / Ю.В. Покорный, М.Б. Зверева, С.А. Шабров // Успехи математических наук. — 2008. — Т. 63, № 1. — С. 111–154.

2. Осцилляционный метод Штурма в спектральных задачах / Ю.В. Покорный, Ж.И. Бахтина, М.Б. Зверева, С.А. Шабров. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2009. — 192 с.

ОБ АСИМПОТИКЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОДНОЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМЫ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ[1]

А.В. Нестеров (Москва, РЭУ им. Г.В. Плеханова)
andrenesterov@yandex.ru

Строятся первые члены формального асимптотического разложения (АР) решения задачи Коши для сингулярно возмущенной системы гиперболических уравнений в критическом случае [1]

$$\begin{cases} \varepsilon^3(u_{tt}-k_1u_{xx}) & = & -au+bv+\varepsilon^2 f(u,v), \\ \varepsilon^3(v_{tt}-k_2v_{xx}) & = & au-bv-\varepsilon^2 f(u,v), \end{cases} \tag{1}$$

с начальными условиями специального вида

$$\begin{cases} u(x,0) & = & u^0(x/\epsilon), & u_t(x,0) & = & 0, \\ v(x,0) & = & a/bu^0(x/\epsilon), & v_t(x,0) & = & 0, \end{cases} \tag{2}$$

здесь $0 < \varepsilon << 1$, $a > 0, b > 0$, $a,b = const$,функция $f(u,v)$ достаточно гладкая, $f(0,0)=0$. Начальные условия имеют вид узкой «шапочки» $\left|u^0(z)\right| \leqslant Ce^{-\sigma z^2}$,$C,\sigma > 0$.

Работа является продолжением работы [2]. Построенное АР имеет вид

$$\begin{pmatrix} u(x,t,\epsilon) \\ v(x,t,\epsilon) \end{pmatrix} \;=\; \sum_{i=0}^{2}\epsilon^i \begin{pmatrix} S_i^I u(\varsigma_1,t)+S_i^{II}u(\varsigma_2,t) \\ S_i^I v(\varsigma_1,t)+S_i^{II}v(\varsigma_2,t \end{pmatrix} \;+\; R_3 \tag{3}$$

Здесь $\varsigma_{1,2} = \dfrac{x \pm kt}{\epsilon}$, k выражается через k_1, k_2, a, b. Главные слагаемые в АР (3) $S_i^J u(\varsigma_j,t), S_i^J v(\varsigma_j,t), J = I, II, j = 1,2$ имеют вид $S_0^J v(\varsigma_j,t) = a/bS_0^J u(\varsigma_j,t), J = I, II, j = 1,2,$ где $S_0^J u(\varsigma_j,t), J = I, II, j = 1,2$ есть решение обобщенного уравнения Кортевега - де Вриса

$$-S_0^J u_t + KS_0^J{}_{\varsigma\varsigma\varsigma} - (h(S_0^J u))_\varsigma = 0, J = I, II, \varsigma = \varsigma_j, j = 1,2 \tag{4}$$

с быстро убывающими начальными условиями.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (проект № FSSW-2023-0004.)

© Нестеров А.В., 2025

Здесь $K, h(z)$ определяются через данные системы (1). Оценка остаточного члена в АР (3) дана через невязку. При оценке остаточного члена по невязке для оценки решений уравнения (4) использовались результаты работы [3].

Литература

1. Васильева А.Б. Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях / А.Б. Васильева , В.Ф. Бутузов — М. : Изд-во МГУ, 1978, —262 с.

2. Nesterov A. Asymptotics of the solution of the Cauchy problem for a singularly perturbed system of hyperbolic equations. arXiv:2211.17242, 2022; https://doi.org/10.48550/arXiv.2211.17242

3. Наумкин П.И. Асимптотика решения уравнения Уизема при больших временах/ Наумкин П.И., Шишмарев И.А. //Математическое моделирование.-1990.Т.2. №3. С.72

ФРЕЙМЫ И ИНЪЕКТИВНОСТЬ СЛОЕВ ФУНКЦИИ АКТИВАЦИИ[1]

С.Я. Новиков (Самара, СНИУ)

nvks@ssau.ru

В теории нейронных сетей широко используется (нелинейная) функция активации (Rectified Linear Unit), которая определяется равенством $ReLU(s) = \max(0, s)$, $s \in \mathbb{R}$.

Пусть $m \geqslant n$ и $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^m$ — набор векторов в $\mathbb{R}^n$. Оператор $Cx := \{\langle x, \varphi_i\rangle\}_{i=1}^m$ называется оператором анализа. Если $(m \times n)$-матрица оператора C имеет полный ранг, то Φ называется фреймом для пространства $\mathbb{R}^n$. Другими словами,Φ является полной системой в $\mathbb{R}^n$, т.е. $span\Phi = \mathbb{R}^n$.

В решении фазовой проблемы активно используется нелинейный оператор

$$\mathcal{A} : \mathbb{R}^n/\{\pm 1\} \to \mathbb{R}^m; \quad x \mapsto \{|\langle x, \varphi_i\rangle|\}_{i=1}^m$$

Доказано, что $\mathcal{A}$ инъективен тогда и только тогда, когда для любого разбиения Φ на два подмножества по крайней мере одно из них оказывается полным в $\mathbb{R}^n$ [1]

В работе [2] фреймы нашли применение в исследовании инъективности т. н. ReLU-слоя (ReLU-layer), который определяется как

$$\mathcal{L}_\alpha : \mathbb{R}^n/\{\pm 1\} \to \mathbb{R}^m; \quad x \mapsto \{ReLU(\langle x, \varphi_i\rangle - \alpha_i)\}_{i=1}^m$$

[1] Работа выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа, соглашение № 075-02-2024-1456.

© Новиков С.Я., 2025

для вектора $\alpha \in \mathbb{R}^m$.

Для $x \in \mathbb{R}^n$ и $\alpha \in \mathbb{R}^m$ определяется множество индексов

$$I_x^\alpha := \{1 \leqslant i \leqslant m : \langle x, \varphi_i \rangle \geqslant \alpha_i\},$$

а для фиксированного $i : 1 \leqslant i \leqslant m$, определяется множество векторов

$$\Omega_i^\alpha := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \varphi_i \rangle \geqslant \alpha_i\}.$$

Фрейм Φ называется α-выпрямляющим на множестве $K \subseteq \mathbb{R}^n$ для вектора $\alpha \in \mathbb{R}^m$, если для всех $x \in K$ подмножество $\Phi_{I_x^\alpha} := \{\varphi_i\}_{i \in I_x^\alpha}$ полно в $\mathbb{R}^n$.

В [2] доказаны две теоремы, которые открывают новые возможности применения фреймов в теории нейронных сетей.

Теорема 1. *Пусть* $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^m \subset \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}^m$; $\varnothing \neq K$ *— открытое или строго выпуклое подмножество в* $\mathbb{R}^n$. *Если* $\mathcal{L}_\alpha$ *инъективен на* K, *то* Φ *—*α*-выпрямляющий фрейм на* K.

Теорема 2. *Пусть* $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^m \subset \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}^m$; $\varnothing \neq K \subseteq \mathbb{R}^n$. *Если* Φ *—* α*-выпрямляющий фрейм на* K, *то* $\mathcal{L}_\beta$ *инъективен на* K *для всех* $\beta < \alpha$ *(т.е.* $\beta_i < \alpha_i$, $i = 1, \ldots, m$*). Кроме того, если* K *открыто или выпукло, то* $\mathcal{L}_\alpha$ *инъективен на* K.

Одно из следствий приведенных теорем устанавливает связь между α-выпрямляющими фреймами и их спарками. Напомним, что спарком $s(\Phi)$ фрейма Φ называется минимальное число его линейно зависимых элементов. В частности, фрейм $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^m \subset \mathbb{R}^n$ имеет полный спарк, если каждое его подмножество из n элементов линейно независимо, то есть $s(\Phi) = n + 1$.

Следствие. *Пусть* K *— выпуклое или открытое подмножество* $\mathbb{R}^n$. *Если фрейм* Φ *имеет полный спарк* $s(\Phi) = n + 1$, *то* Φ *является* α*-выпрямляющим на* K *тогда и только тогда, когда* $|I_x^\alpha| \geqslant n$ *для всех* $x \in K$. .

Литература

1. Balan R. On signal reconstruction without phase / R. Balan, P. Casazza, D. Edidin// Applied and Computational Harmonic Analysis. — 2006. — V. 20, I. 3—PP. 345-356.

2. Haider D. Injectivity of ReLU-layers: Perspectives from Frame Theory / D. Haider, M. Ehler, P. Balazs// arhiv.org/pdf/2406.15856.

ОЦЕНКА ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С НОРМАЛЬНЫМ ОПЕРАТОРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

М.Н. Орешина (Липецк, ЛГТУ)
m_oreshina@mail.ru

В гильбертовом пространстве **H** рассмотрим задачу Коши для линейного дифференциального уравнения

$$\dot{z}(t) = Nz(t) + bv(t), \qquad z(0) = a.$$

Здесь оператор $N\colon D(N) \subset \mathbf{H} \to \mathbf{H}$ является нормальным и может быть неограниченным, $v\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ — заданная (скалярная) непрерывная функция, a, $b \in \mathbf{H}$ — заданные векторы.

Можно показать [1], что точное решение z рассматриваемой задачи Коши можно представить в виде

$$z(t) = e^{Nt}a + \theta_t(N)b,$$

где $\theta_t(\xi) = \int_0^t e^{\xi(t-\tau)}v(\tau)\,d\tau$.

Для построения приближенного решения $\tilde{z}$ будем использовать следующую идею [1]. Зафиксируем $t > 0$ и приблизим на спектре $\sigma(N)$ оператора N скалярные функции $\xi \mapsto e^{\xi t}$ и $\xi \mapsto \theta_t(\xi)$ некоторыми рациональными функциями $r_t^1(\xi)$ и $r_t^2(\xi)$ соответственно. В качестве приближенного решения возьмем функцию

$$\tilde{z}(t) = r_t^1(N)a + r_t^2(N)b.$$

Теорема. *Пусть для $t > 0$ известны скалярные оценки*

$$|r_t^1(\xi) - e^{\xi t}| \leqslant \varepsilon_1(t), \qquad \xi \in \sigma(N),$$
$$|r_t^2(\xi) - \theta_t(\xi)| \leqslant \varepsilon_2(t), \qquad \xi \in \sigma(N).$$

Тогда для приближенного решения $\tilde{z}$ справедлива оценка

$$\|\tilde{z}(t) - z(t)\| \leqslant \varepsilon_1(t)\|a\| + \varepsilon_2(t)\|b\|.$$

Литература

1. Орешина М.Н. Приближенное решение линейного дифференциального уравнения с нормальным оператором / М.Н. Орешина // Прикладная математика & Физика. — 2024. — Т. 56, № 4. — С. 286–295.

© Орешина М.Н., 2025

О ТРАЕКТОРИЯХ НЕГЛАДКИХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

В.П. Орлов, В.Г. Звягин (Воронеж, ВГУ)
orlov_vp@mail.ru *zvg_vsu@mail.ru*

Пусть вектор-функция $u(t,x) \in W = \{u : u \in L_2(0,T; W_2^1(\Omega)^N),$ $\operatorname{div} u = 0,\ (t,x) \in Q_T = [0,T] \times \overline{\Omega}$, является полем скоростей движущейся жидкости, заполняющей ограниченную область $\Omega \in R^N$, $N = 2, 3$, с гладкой границей Γ. Траектория движения частицы жидкости, занимающей в момент времени $t \in [0,T]$ положение $x \in \overline{\Omega}$, описывается вектор-функцией $z(\tau; t, x)$ переменной $\tau \in [0,T]$, которая является решением задачи Коши

$$z(\tau; t, x) = x + \int_t^\tau u(\tau, z(\tau; t, x))\, ds,\ \tau \in [0,T], \quad (t,x) \in Q_T.$$

Решение $z(\tau; t, x)$ задачи Коши понимается как регулярный лагранжев поток (РЛП), порожденный u (см. [1]). Если $u(t,x)$ гладкая, то РЛП, порожденный ею, является классическим решением $z(\tau; t, x)$ задачи Коши.

Пусть на границе Γ выполняется условию $u|_\Gamma(t,x) = \alpha(x)$, где $\alpha \in H^{1/2}(\Gamma)$ заданная на Γ функция.

Предполагается, что область Ω является многосвязной и получается удалением из ограниченной односвязной области $\Omega_1 \in R^N$, $N = 2, 3$, с границей $\Gamma_1 \in C^2$, попарно непересекающихся односвязных областей Ω_i, $i = 2, ..., K$, с границами $\partial\Omega_i = \Gamma_i \in C^2$, при этом Γ_i, $i = 1, ..., K$ попарно не пересекаются. Таким образом $\Omega = \Omega_1 \setminus (\cup_{i=2}^K \overline{\Omega}_i)$.

Функция $\tau_u(t,x)$ определяется соотношением $\tau_u(t,x) = \inf\{\tau : z(s; t, x)) \in \overline{\Omega}, s \in (\tau, t]\}, t \in [0,T], x \in \overline{\Omega}$. Множество $\gamma(t,x) = \{y : y = z(s; t, x),\ \tau_u(t,x) \leqslant s \leqslant t\}$ определяет траекторию движения данной частицы. Если $\tau_u(t,x) = 0$, то движение частицы по траектории $\gamma(t,x)$ начинается с нулевого момента времени и либо $z(0; t, x) \in \Omega$, либо Γ.

Если $\tau_u(t,x) > 0$, то в этот момент времени частица занимает положение $z(\tau_u(t,x); t, x) \in \Gamma$, и $\tau_u(t,x)$ означает момент вхождения частицы жидкости в Ω через Γ.

Пусть $\Gamma_+(\alpha) = \{x : \alpha(x) \cdot n(x) > 0,\ x \in \Gamma\}$, $\Gamma_-(\alpha) = \{x : \alpha(x) \cdot n(x) < 0,\ x \in \Gamma\}$, $\Gamma_*(\alpha) = \{x : \alpha(x) \cdot n(x) = 0,\ x \in \Gamma\}$.

Обозначим через $\mathcal{A}$ совокупность гладких функций $\alpha \in H_2^{1/2}(\Gamma)$, таких, что множество $\Gamma_*(\alpha) = \{x : \alpha(x) \cdot n(x) = 0,\ x \in \Gamma\}$ либо пусто,

© Орлов В.П., Звягин В.Г., 2025

либо состоит из конечного числа гладких кривых на Γ в случае $N = 3$ и конечного числа точек на Γ в случае $N = 2$.

Теорема 1. *Для произвольной функции* $\alpha \in H^{1/2}(\Gamma)$ *существует последовательность* $\alpha^n \in \mathcal{A}$, $n = 1, 2, ...$ *такая, что* $\lim_{n\to+\infty} \|\alpha - \alpha^n\|_{H^{1/2}(\Gamma)} = 0$.

Пусть $u \in W$ и $u|_\Gamma(t,x) = \alpha(x)$, $\alpha^n \in \mathcal{A}$, $\alpha \in H^{1/2}(\Gamma)$, причем $\lim_{n\to+\infty} \|\alpha - \alpha^n\|_{H^{1/2}(\Gamma)} = 0$.

Теорема 2. *Существует последовательность гладких* $u^n \in W$, $n = 1, 2, ...$ *таких, что* $u^n|_\Gamma = \alpha^n$ *и выполняется соотношение* $\lim_{n\to+\infty} \|u - u^n\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega)^N)} = 0$.

Пусть $z^n(\tau; t, x)$ решение задачи Коши при $u = u^n$, а
$\tau^n(t,x) = \inf\{\tau : z^n(s;t,x)) \in \overline{\Omega}, s \in (\tau, t]\}, t \in [0,T], x \in \overline{\Omega}$.

Рассмотрим множество

$$Q_*^n = \{(t,x) \in Q_T : x = z^n(\tau; t^*, x^*), \tau^* \in [0,T], x^* \in \Gamma_*(\alpha^n), T \geqslant t \geqslant \tau^*\}.$$

Пусть $Q_+^n = Q_T \setminus Q_*^n$.

Теорема 3. *Функция* $\tau^n(t,x)$ *непрерывна на* $Q_+(n)$, *и* $m(Q_+^n) = m(Q_T)$.

С помощью Теорем 1—3 устанавливается основной результат (см. [2], [3]):

Теорема 4. *Функция* $\tau_u(t,x)$ *является пределом последовательности* $\tau^n(t,x)$ *при* $n \to +\infty$ *при п.в.* $(t,x) \in Q_T$.

Литература

1. Crippa G. Estimates and regularity results for the diPerna-Lions flow / G. Crippa, C. de Lellis // J. Reine Angew. Math. — 2008. — V. 616, — № 3. —P. 15–46.

2. Звягин А.В. Некоторые свойства траекторий неоднородного поля скоростей движения вязкоупругой жидкости в многосвязной области / А.В. Звягин, В.Г. Звягин, В.П. Орлов //Матем. заметки. — 2024. — Т. 116, № 4. —С. 624–629.

3. Zvyagin V. On some properties of trajectories of non-smooth vector fields / V. Zvyagin, V. Orlov, A. Zvyagin // Mathematics. — 2024. — V. 12, №. 11. — P. 1703.

О СЛАБЫХ ЖАДНЫХ АЛГОРИТМАХ ПО НЕСКОЛЬКИМ СЛОВАРЯМ

А.С. Орлова
(Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова, МГТУ им. Н.Э. Баумана)
Anastasia-Orlova1@yandex.ru

Определим обобщения слабого жадного алгоритма [1] и слабого ортогонального жадного алгоритма [1] по нескольким словарям аналогично обобщению чисто жадного алгоритма для случая нескольких словарей [2].

Зафиксируем натуральное число K. Нормированные множества $D_1, \ldots, D_K$ в гильбертовом пространстве H будем называть **словарями**, если линейная оболочка $D = \cup_{i\in\overline{1,K}} D_i$ плотна в H.

Введём **специальную последовательность** $i(n) \in \overline{1,K}$ такую, что каждое $k \in \overline{1,K}$ встречается в последовательности $i(n)$ бесконечное число раз. Также определим последовательность номеров $j(n) = \#\{m \leqslant n :\ i(m) = i(n)\}$, зависящую от $i(n)$.

Для K словарей выберем K ослабляющих последовательностей $\{t_{n,k}\} \subset [0,1),\ k \in \overline{1,K}$ и определим обобщения слабого жадного алгоритма и слабого ортогонального жадного алгоритма по словарям $D_1, \ldots, D_K$ с ослабляющими последовательностями $\{t_{n,k}\},\ k \in \overline{1,K}$ со специальной последовательностью $i(n)$ следующим образом.

Обобщение слабого жадного алгоритма. Для $x \in H$ определим индуктивно последовательность остатков $\{r_n\}_{n=0}^{\infty}$, последовательность коэффициентов $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ и последовательность элементов словаря $\{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D$:

Шаг 0. $r_0 = x$.

Шаг $n \in \mathbb{N}$. $$e_n \in D_{i(n)} : \quad |(r_{n-1}, e_n)| \geqslant t_{j(n),i(n)} \sup_{d \in D_{i(n)}} |(r_{n-1}, d)|,$$
$$c_n = (r_{n-1}, e_n), \quad r_n = r_{n-1} - c_n e_n.$$

Разложением вектора x называется ряд $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} c_n e_n$.

Обобщение слабого ортогонального жадного алгоритма. Для $x \in H$ определим индуктивно последовательность остатков $\{r_n\}_{n=0}^{\infty}$, последовательность приближений $\{G_n\}_{n=0}^{\infty}$, последовательность элементов словаря $\{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D$ и последовательность множеств проектирования $\{E_n\}$:

Шаг 0. $r_0 = x, \quad G_0 = 0$.

© Орлова А.С., 2025

Шаг $n \in \mathbb{N}$. $\quad e_n \in D_{i(n)}: \quad |(r_{n-1}, e_n)| \geqslant t_{j(n),i(n)} \sup\limits_{d \in D_{i(n)}} |(r_{n-1}, d)|,$

$$G_n = \mathrm{Proj}_{E_n}, \text{ где } E_n = \overline{\mathrm{span}\{e_1, \dots, e_n\}}, \quad r_n = x - G_n.$$

Для новых алгоритмов имеют место положительные результаты о сходимости.

Если для последовательности $i(n)$ существует число I, такое что любое число $k \in \overline{1, K}$ встречается в наборе $\{i(n), i(n+1), \dots, i(n+I)\}$ при любом $n \in \mathbb{N}$, то будем называть последовательность $i(n)$ **почти периодической**.

Теорема 1. *Для любых словарей $D_1, \dots, D_K$, почти периодической последовательности $i(n)$, ослабляющих последовательностей $\{t_{n,k}\} \notin \ell_2$, $k \in \overline{1, K}$ и вектора $x \in H$ слабый жадный алгоритм сходится к приближаемому вектору x.*

Замечание. Даже в случае не почти периодической последовательности $i(n)$ условие $\sum \frac{t_{n,k}}{n} = \infty$ для каждого $k \in \overline{1, K}$, гарантирует сходимость чисто жадного алгоритма к приближаемому вектору x, если чисто жадный алгоритм сходится.

Теорема 2. *Для любых словарей $D_1, \dots, D_K$, последовательности $i(n)$, ослабляющих последовательностей $\{t_{n,k}\} \notin \ell_2$, $k \in \overline{1, K}$ и вектора $x \in H$ слабый ортогональный жадный алгоритм сходится к приближаемому вектору x.*

Замечание. Множества проектирования E_n можно определить как $\overline{\mathrm{span}\, \{e_k : \ i(k) = i(n)\}_{k=1}^{n}}$ или $\overline{\mathrm{span}\left\{e_k : \ e_k \in D_{i(n)}\right\}_{k=1}^{n}}$. В этом случае получим другие алгоритмы, но теорема 2 останется верной.

Замечание. Вместо K ослабляющих последовательностей можно вводить одну, и использовать на n-м шаге t_n вместо $t_{j(n),i(n)}$. Тогда для отделённых от 0 последовательностей $\{t_n\}$ справедливы аналоги теорем 1 и 2. Однако, если последовательность $i(n)$ не задана, то для последовательности $\{t_n\}$, не отделённой от 0, нельзя гарантировать сходимость алгоритмов. Если последовательность $i(n)$ предварительно зафиксирована, то можно получить положительные результаты и для ослабляющих последовательностей, не отделённых от 0, задав для $\{t_n\}$ дополнительные условия.

Литература

1. Temlyakov V.N. Weak greedy algorithms / V.N. Temlyakov // Adv. Comput. Math. — 2000. — V. 12, № 2–3. — P. 213–227.

2. Бородин П.А. Слабые пределы последовательных проекций и жадных шагов / П.А. Бородин, Е. Копецка // Труды МИАН. — 2022. — Т. 319. — С. 64–72.

СЖИМАЮЩИЕ ПОЛУГРУППЫ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО ТРАНСПОРТНОГО УРАВНЕНИЯ НА ПРОСТРАНСТВЕ СОЛЕНОИДАЛЬНЫХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ[1]

Е.Ю. Панов (Великий Новгород, НовГУ)
evpanov@yandex.ru

В области $\Pi = (0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$ рассматривается система

$$u_t + a(x) \cdot \nabla_x u + \nabla p = 0, \quad \mathrm{div}_x u = 0, \tag{1}$$

в которой неизвестный вектор

$$u = (u_1(t, x), \dots, u_n(t, x)) \in C([0, +\infty), X_0).$$

Соленоидальное поле коэффициентов

$$a = (a_1(x), \dots, a_n(x)) \in L^q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n),\ 2 \leqslant q \leqslant \infty,$$

задано. Здесь $X_0 \subset L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ обозначает замкнутое подпространство соленоидальных векторных полей. Рассмотрим задачу Коши для системы (1) с начальным условием

$$u(0, x) = u_0(x) \in X_0. \tag{2}$$

Ввиду соленоидальности $a(x)$ система (1) переписывается в дивергентной форме

$$u_t + \mathrm{div}_x(au) + \nabla p = 0,$$

что позволяет ввести понятие обобщенного решения (о.р.).

Определение 1. Вектор $u = u(t, x) \in L^2_{loc}([0, +\infty), X_0)$ называется о.р. задачи (1), (2), если для любой пробной вектор-функции $f = f(t, x) \in C^1_0(\bar{\Pi}, \mathbb{R}^n)$, где $\bar{\Pi} = [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$, такой что $\mathrm{div}_x f = 0$

$$\int_\Pi [u \cdot f_t + u \cdot (a \cdot \nabla_x) f] dt dx + \int_{\mathbb{R}^n} u_0(x) \cdot f(0, x) dx = 0.$$

Выбор класса соленоидальных пробных векторов позволил исключить давление $p = p(t, x)$ из нашей системы. Рассмотрим неограниченный линейный оператор A_0 на пространстве X_0, заданный на

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (госзадание, проект «Математическое моделирование природных процессов»)
© Панов Е.Ю., 2025

пространстве $D(A_0) = C_0^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \cap X_0$ равенством

$$(A_0 u, v) = (a \cdot \nabla_x u, v) = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i,j=1}^{n} a_i(x)(u_j)_{x_i}(x) v_j(x) dx \quad \forall v \in X_0.$$

Здесь $(u, v) = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^{n} u_j(x) v_j(x) dx$ — скалярное умножение на X_0. Нетрудно проверить, что оператор A_0 кососимметричен на X_0, $(A_0 u, v) = -(u, A_0 v)$ $\forall u, v \in D(A_0)$, и значит допускает замыкание, которое мы обозначим A. Существует максимальное кососимметричное расширение $\tilde{A}$ оператора A. Пусть $d_{\pm}$ — индексы дефекта оператора $\tilde{A}$, то есть гильбертовы коразмерности замкнутых подпространств $\mathrm{Im}(E \pm \tilde{A})$ в X_0. Так как $\tilde{A}$ максимален, по крайней мере один из индексов дефекта нулевой. Если $d_+ = 0$, то оператор $B = -\tilde{A}$ m-диссипативен и (см. [1,Глава 3]) порождает C_0-полугруппу $T_t = e^{tB}$ сжатий в X_0, причем операторы T_t являются изометрическими вложениями, $\|T_t u\|_{X_0} = \|u\|_{X_0}$. Если же $d_- = 0$, оператор $\tilde{A}$ является m-диссипативным. Известно (см. [1, Предложение 3.11]), что сопряжённый оператор $B = (\tilde{A})^* \supset -\tilde{A}$ также является m-диссипативным оператором и порождает полугруппу сжатий. Мы установили следующий результат:

Теорема 1. *Существует m-диссипативное расширение B оператора $-A$. Соответствующая сжимающая полугруппа $T_t = e^{tB}$ порождает о.р. $u(t,x) = T_t(u_0)(x) \in C([0,+\infty), X_0)$ задачи (1), (2).*

Единственность сжимающей полугруппы о.р. эквивалентна максимальности оператора A. Точнее, справедлива следующая

Теорема 2. *Сжимающая полугруппа T_t о.р. единственна тогда и только тогда, когда кососимметричный оператор A максимален. При этом, унитарность полугруппы T_t эквивалента кососопряженности оператора A, $A^* = -A$. В этом случае, $T_t = e^{-tA}$, $t \in \mathbb{R}$ — группа унитарных операторов.*

Литература

1. Клемент Ф. Однопараметрические полугруппы / Ф. Клемент, Х. Хейманс, С. Ангенент, К. ван Дуйн, Б. де Пахтер. — М. : Мир, 1992. — 352 с.

ОБ АПОСТЕРИОРНЫХ ОЦЕНКАХ В ЗАДАЧАХ С МОНОТОННЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

С.Е. Пастухова (Москва, МИРЭА – РТУ)
pas-se@yandex.ru

Пусть K — выпуклое замкнутое множество в рефлексивном банаховом пространстве X, X^* — двойственное пространство. Рассмотрим задачу на отыскание такого элемента $u \in K$, что

$$\langle Au - h, w - u \rangle \geqslant 0 \quad \text{для любого } w \in K. \tag{1}$$

Здесь $A : X \to X^*$ — ограниченный коэрцитивный семинепрерывный строго монотонный оператор; $h \in X^*$ — произвольный фиксированный элемент. Задача (1) имеет единственное решение $u \in K$, см., например, [1]. Если оператор A не потенциален, (1) не является задачей вариационного исчисления. Заметим также, что в случае $K = X$ решение u задачи (1) удовлетворяет равенству

$$\langle Au - h, w \rangle = 0 \quad \text{для любого } w \in X. \tag{2}$$

Решение u задачи (1) или (2) находится явно в редких частных случаях. Возникает вопрос: можно ли для произвольной функции $v \in K$, выступающей как приближение к u, оценить какую-либо меру отклонения её от u лишь в терминах v и данных самой задачи? Оценки такого рода называют *апостериорными*; их нахождению и исследованию посвящена весьма обширная к настоящему времени литература (см., например, [2–5] и указанную там библиографию). Подобного сорта оценки востребованы в численных расчётах.

В качестве меры отклонения v от u возьмём норму $\|u-v\|_X$. Тогда апостериорной оценкой считаем любой функционал $M : X \to \mathbb{R}$, такой что $\|u-v\| \leqslant M(v)$, $v \in X$. Желательно иметь здесь мажоранту, удовлетворяющую условиям

$$M(v) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad v = u; \quad M(v) \to 0 \quad \text{при } v \to u \text{ сильно в } X.$$

Наличие такой мажоранты явного вида позволяет оценивать качество аппроксимации решения, полученной экспериментально.

Предложен общий метод получения апостериорных оценок функционального типа. Его эффективность проверена на многих конкретных примерах с классическими линейными и нелинейными операторами. В отличие от опирающихся на теорию двойственности методов, широко используемых в литературе, наш метод не связан с

© Пастухова С.Е., 2025

вариационной постановкой задачи и основан лишь на строгой монотонности оператора. Так называемый метод интегральных тождеств, рассмотренный в [2], является его частным случаем.

Укажем примеры задач, в которых применим наш подход. Прежде всего, это уравнение для p-лапласиана $\Delta_p u = \text{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ (где $p>1$) с граничными условиями Дирихле или Неймана, а также задача с «толстым» препятствием для p-лапласиана. Оператор задачи можно усложнить, переходя к $\Delta_{p(\cdot)}$ – лапласиану переменного порядка нелинейности $p(\cdot)$ (как в [5]) и далее (как в [6]) к анизотропному $p(\cdot)$-лапласиану вида div $(|\nabla u|^{p(\cdot)-2}\mathcal{A}\nabla u)$, где матрица $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\cdot)$ является измеримой, симметричной и подчинённой условию типа Кордеса. Для последнего оператора условие типа Кордеса обеспечивает его строгую монотонность; это не потенциальный оператор, для него не применим вариационный подход получения апостериорных оценок, использующий теорию двойственности.

Предложенный нами метод зффективно работает и в аналогичных эволюционных задачах параболического типа.

Описанная тематика разрабатывается совместно с В.Е. Бобковым из Института математики с вычислительным центром Уфимского федерального исследовательского центри РАН (г. Уфа, РФ).

Литература

1. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Лионс Ж.-Л.. — М. : Мир, 1972. — 588 с.

2. Repin S. A posteriori estimates for partial differential equations / S. Repin. — Walter de Gruyter GmbH Co. KG, Berlin, 2008. — 316 p.

3. Репин С.И. Апостериорные тождества для мер отклонений от точных решений нелинейных краевых задач / С.И. Репин // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2023. — Т. 63, № 6. — С. 896–919 .

4. Pastukhova S.E. A posteriori estimates for the accuracy of approximations in variational problems with power functionals / S.E. Pastukhova // J. Math. Sciences. — 2020. — V. 244, № 3. — P. 509–523.

5. Пастухова С.Е. Апостериорные оценки отклонения от точного решения в вариационных задачах с нестандартными условиями коэрцитивности и роста / С.Е. Пастухова // Алгебра и анализ. — 2020. — Т. 32, № 1. — С. 51–77.

6. Pastukhova S.E. Galerkin approximations in problems with anisotropic $p(\cdot)$-Laplacian / S.E. Pastukhova, D.A.Yakubovich // Applicable Analysis. — 2019. — V. 98, № 1-2. — P. 345–361.

ПОСТРОЕНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛИ ОЦЕНКИ НАДЕЖНОСТИ КВАНТОВОЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

Ю.И. Пастухова, А.А. Крючков
(Москва, ЦЭМИ РАН; Москва, РТУ МИРЭА)
kryuchkov_a@mirea.ru

В условиях накладываемых ограничений на использование вычислительного потенциала облачного квантового оборудования, авторам видится необходимым определение возможных подходов предварительной оценки надежности квантовой вычислительной системы (КВУ) без необходимости ее прямого использования. Для исследования квантовых систем будет рассмотрена схема генерации случайных последовательностей (СП) на КВУ [1].

Фундаментальной единицей произвольного квантового процессора является кубит, представляющий собой единичный вектор $|\mathbf{y}\rangle$ в двумерном комплексном векторном пространстве, базис которого задается ортогональными векторами:

$$|\mathbf{e_1}\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |\mathbf{e_2}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

формируя общее представление одиночного квантового состояния:

$$|\mathbf{y}\rangle \ = c_1|\mathbf{e_1}\rangle + c_2|\mathbf{e_2}\rangle \tag{2}$$

где c_1, c_2 — произвольные комплексные числа, амплитуды вероятностей квантового состояния такие, что:

$$|c_1|^2 + |c_1|^2 = 1 \tag{3}$$

Несложно показать, что каждый кубит может выступать в качестве самостоятельного источника генератора случайных чисел (ГСЧ). В то же время произвольный кубит имеет собственный набор параметров, напрямую влияющих на качество результирующей двоичной последовательности (табл. 1).

Таблица 1. Значимые параметры КВУ «brisbane» (20.12.24) [3].

№ кубита	**T1**	**T2**	$\mathbf{E_1}$	$\mathbf{E_2}$
1	286.05	61.527	0.0289	0.0002038
...	...	...	...	...
127	261.15	179.896	0.0083	0.0002315

© Пастухова Ю.И., Крючков А.А., 2025

Параметры T_1 и T_2 отражают время декогеренции квантового состояния, измеряются в мкс. E_1 — «Readout error», относится к измерительному аппарату квантовой системы, представляет собой вероятность некорректного измерения кубита. Параметр E_2 —«(sx) error», вероятность, что вентиль «sx» будет выполнен с ошибкой, проявляется на стадии применения и выполнения квантовой схемы.

При прогнозировании результатов ГСЧ набору выбранных параметров кубита ставится в соответствие числовое значение $\hat{\mathbf{p}}$, отражающее относительное количество успешно пройденных тестов NIST STS [2]. Значимость тестов определяется экспертными оценками с последующим переводом их в весовые коэффициенты. По результатам анализа больших статистических данных — формируется математическая модель множественной линейной регрессии предсказания качества выходной СП с одиночного кубита в зависимости от технических параметров квантового состояния.

В рамках предварительных экспериментов выбраны два кубита (№24 и №111), генерирующие наихудшую и наилучшую с точки зрения статистических свойств двоичную последовательность, для которых вычисленные квадрат-коэффициенты множественной корреляции продемонстрировали достаточно высокие значения 0,82535 и 0,42497 соответственно. При этом частные коэффициенты детерминации указывают на большую степень влияния переменных T_1 и E_1 в первом случае и T_2 и E_2 во втором случае на качество случайной последовательности, полученной с одиночного кубита.

В рамках исследования представляется возможным нахождение значений параметров, при которых КВУ генерирует СП, статистические свойства которых находятся в допустимом диапазоне.

Литература

1. Крючков А.А. Модели оценки надежности квантовых вычислительных устройств / А.А. Крючков // Фундаментальные, поисковые, прикладные исследования и инновационные проекты : сборник трудов III Национальной научно-практической конференции. — М. : — 2024. — С. 140–144.

2. SP 800-22. NIST STS / NIST STS // [Электронный ресурс]. — URL: https://csrc.nist.gov/pubs/sp/800/22/r1/upd1/final (дата обращения 30.12.24).

3. Платформа облачных квантовых вычислений / IBM Quantum Platform // [Электронный ресурс]. —URL: https://quantum.ibm.com/ (дата обращения 30.12.24).

КВАЗИКЛАССИЧЕСКАЯ АСИМПТОТИКА СПЕКТРА ТРЕХМЕРНОГО ОПЕРАТОРА ТИПА ХАРТРИ ВБЛИЗИ ВЕРХНИХ ГРАНИЦ СПЕКТРАЛЬНЫХ КЛАСТЕРОВ[1]

А.В. Перескоков (Москва, НИУ МЭИ, НИУ ВШЭ)
pereskokov62@mail.ru

Рассмотрим задачу на собственные значения для нелинейного оператора типа Хартри в пространстве $L^2(\mathbb{R}^3)$

$$\left(-\Delta_q - \frac{1}{\mid q \mid} + \varepsilon \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1-\mu e^{-\varkappa\varepsilon^{3/4}|q-q'|}}{\mid q-q' \mid} \mid \psi(q') \mid^2 dq'\right)\psi = \lambda\psi, \qquad (1)$$

$$\|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = 1, \qquad (2)$$

где Δ_q — оператор Лапласа, $\varepsilon > 0$ — малый параметр, $\varkappa > 0$, μ — параметры, а потенциал самодействия является разностью кулоновского и экранированного кулоновского потенциалов. Подобные потенциалы (например, двойной потенциал Юкавы) возникают при описании реальных взаимодействий.

Хорошо известно, что при $\varepsilon = 0$ собственные значения $\lambda = \lambda_n(\varepsilon)$ задачи (1), (2) имеют вид

$$\lambda_n(0) = -\frac{1}{4n^2}, \quad n = 1, 2, \ldots, \qquad (3)$$

где n — главное квантовое число. Пусть теперь ε не равно нулю. Рассмотрим случай, когда число n велико. Для определенности будем считать, что λ имеет порядок ε. Тогда n имеет порядок $\varepsilon^{-1/2}$.

Пусть $p = n - \mid m \mid -1$, где m — магнитное квантовое число. В данной работе для каждого $p = 0, 1, 2, \ldots$ найдены асимптотические собственные значения

$$\lambda_{n,i}^{(p)}(\varepsilon) = -\frac{1}{4n^2} + \varepsilon\left(\frac{\ln n}{4\pi n^2} + \frac{E_{1,i}^{(p)}}{n^2}\right) + O\left(\frac{\varepsilon \ln n}{n^{5/2}}\right), \quad n \to \infty, \qquad (4)$$

где $i = 0, \ldots, I_p$, которые расположены вблизи верхних границ спектральных кластеров. В частности, при $p = 0$ существует одно число

$$E_{1,0}^{(0)} = \frac{1}{4\pi}\left(5\ln 2 + \gamma - \mu f_0\left(\frac{b_0^2}{2}\right)\right),$$

[1] Результаты получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (проект FSWF-2023-0012)

© Перескоков А.В., 2025

где $\gamma \approx 0.57$ — постоянная Эйлера, $b_0 = 2\varkappa\ n^{3/2}\varepsilon^{3/4}$, $f_0(x) = e^x \mathrm{Ei}(-x)$. Здесь

$$\mathrm{Ei}(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t}\ dt$$

обозначает интегральную показательную функцию.

При $p = 1$ существуют два числа

$$E_{1,0}^{(1)} = \frac{1}{4\pi}\left(5\ln 2 + \gamma - \frac{5}{8} - \right.$$

$$\left. -\mu\left[\frac{1}{\sqrt{2}b_0}\left(3f_2\left(\frac{b_0^2}{2}\right) - f_1\left(\frac{b_0^2}{2}\right)\right) - \frac{3}{4}f_0\left(\frac{b_0^2}{2}\right)\right]\right),$$

$$E_{1,1}^{(1)} = \frac{1}{4\pi}\left(5\ln 2 + \gamma - \frac{3}{4} - \mu\left[\frac{\sqrt{2}}{b_0}f_2\left(\frac{b_0^2}{2}\right) - \frac{1}{2}f_0\left(\frac{b_0^2}{2}\right)\right]\right),$$

где $f_1(x) = e^{x/2}W_{-3/2,0}(x)$, $f_2(x) = e^{x/2}W_{-5/2,0}(x)$. Здесь $W_{\varkappa,\mu}(z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция Уиттекера. Она связана с вырожденной гипергеометрической функцией $\Psi(a, b; z)$ соотношением $W_{\varkappa,\mu}(z) = z^{\mu+1/2}e^{-z/2}\Psi(\mu - \varkappa + 1/2, 2\mu + 1; z)$.

Соответствующие (4) асимптотические собственные функции локализованы вблизи окружности в пространстве $\mathbb{R}^3$, на которой потенциал самодействия в (1) имеет логарифмическую особенность [1]. Поэтому второй член в формуле (4) содержит $\ln n$. Так как он имеет порядок $(\varepsilon \ln n)/n^2$, а внутри кластера соответствующая поправка принимает значения порядка ε/n^2, то числа $\lambda_{n,i}^{(p)}(\varepsilon)$ расположены вблизи верхних границ спектральных кластеров. Эти кластеры образуются вокруг уровней энергии (3) невозмущенного оператора (при $\varepsilon = 0$).

Литература

1. Pereskokov A.V. Asymptotics of the spectrum of a three-dimensional Hartree type operator near upper boundaries of spectral clusters / A.V. Pereskokov // J. Math. Sci. — 2024. — V. 281, № 4. — P. 612–624.

О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ $\mathbb{R}^d$-ЭРГОДИЧЕСКИХ СРЕДНИХ, ПОСТРОЕННЫХ ПО ВЫПУКЛОМУ МНОЖЕСТВУ С ГРАНИЦЕЙ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ[1]

И.В. Подвигин
(Новосибирск, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН)
ipodvigin@math.nsc.ru

Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство, на котором действует группа $\mathbb{R}^d$ унитарными преобразованиями $U_{\mathbf{t}}$, $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^d$. Пусть $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^d$ — множество конечной положительной меры Лебега $\mathcal{L}_d$. Гомотетию, порожденную вектором $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^d$, обозначим как

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} \odot \mathbf{t} := (x_1 t_1, x_2 t_2, \ldots, x_d t_d), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d.$$

Для $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^d$ положим $\mathcal{K}_{\mathbf{t}} = \mathcal{K} \odot \mathbf{t}$. Статистическая эргодическая теорема утверждает, что для любого вектора $h \in \mathcal{H}$

$$I_{\mathcal{K}}(\mathbf{t}) := \left\| \frac{1}{\mathcal{L}_d(\mathcal{K}_{\mathbf{t}})} \int_{\mathcal{K}_{\mathbf{t}}} U_{\mathbf{s}} h \, d\mathcal{L}_d(\mathbf{s}) - Ph \right\|_{\mathcal{H}}^2 \to 0$$

при $t_1, ..., t_d \to \infty$, где P — ортогональное проектирование на подпространство неподвижных векторов группы $\{U_{\mathbf{t}}\}_{\mathbf{t} \in \mathbb{R}^d}$.

Благодаря известной формуле

$$I_{\mathcal{K}}(\mathbf{t}) = \int_{\mathbb{R}^d} \left| \frac{1}{\mathcal{L}_d(\mathcal{K})} \mathrm{F}[I_{\mathcal{K}}](\mathbf{x} \odot \mathbf{t}) \right|^2 d\sigma_{h-Ph}(\mathbf{x})$$

видна зависимость асимптотики интеграла $I_{\mathcal{K}}(\mathbf{t})$ от преобразования Фурье $\mathrm{F}[I_{\mathcal{K}}](\mathbf{x}) = \int_{\mathcal{K}} e^{i(\mathbf{y},\mathbf{x})} \, d\mathcal{L}_d(\mathbf{y})$ индикатора $I_{\mathcal{K}}$, и спектральной меры σ_{h-Ph} вектора $h - Ph$.

В докладе мы рассматриваем случай, когда множество $\mathcal{K}$ выпукло, компактно и имеет достаточно гладкую границу $\partial\mathcal{K}$ со всюду положительной полной (гауссовой) кривизной. Асимптотика при $|\mathbf{x}| := \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})} \to \infty$ преобразования Фурье $\mathrm{F}[I_{\mathcal{K}}](\mathbf{x})$ такого множества хорошо изучена (см., например, монографию [1, §2.3]). А именно, пусть $\partial\mathcal{K}$ принадлежит классу гладкости C^k при

[1] Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № FWNF-2022-0004).
© Подвигин И.В., 2025

$k > \max\left\{1, \frac{d-1}{2}\right\}$. Тогда справедливо асимптотическое равенство, доказанное Херцем (см. более общий результат в [1, теорема 2.29]):

$$\mathrm{F}[I_{\mathcal{K}}](\mathbf{x}) = \mathcal{D}(\mathbf{x})|\mathbf{x}|^{-\frac{d+1}{2}} + o(|\mathbf{x}|^{-\frac{d+1}{2}})$$

при $|\mathbf{x}| \to \infty$, где $\mathcal{D}(\mathbf{x})$ — ограниченная функция, зависящая от полной кривизны.

Основной результат доклада заключается в следующем спектральном критерии однородной скорости сходимости в статистической эргодической теореме. Положим

$$\mathcal{E}(\mathbf{t}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \quad |\mathbf{x} \odot \mathbf{t}| < 1\} = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \ x_1^2 t_1^2 + \cdots + x_d^2 t_d^2 < 1\right\}.$$

Теорема. *Пусть φ — однородная функция степени $\alpha > -(d+1)$, тогда при $t_1, ..., t_d \to \infty$ справедлива эквивалентность*

$$I_{\mathcal{K}}(\mathbf{t}) = \mathcal{O}(\varphi(\mathbf{t})) \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_{\mathbf{h-Ph}}(\mathcal{E}(\mathbf{t})) = \mathcal{O}(\varphi(\mathbf{t})).$$

Эта теорема, примененная для единичного шара $\mathcal{K}$, дополняет недавний критерий из [2], где рассматривались шаровые усреднения с одним параметром, т.е. $t_1 = ... = t_d = R$. Мы также упомянем похожий результат [3,4] для множества $\mathcal{K}$ с нулевой кривизной границы — для единичного куба.

Литература

1. Iosevich A. Decay of the Fourier transform. Analytic and geometric aspects / A. Iosevich, E. Liflyand. — Basel : Springer, 2014. — 222 p.

2. Подвигин И.В. О степенной скорости сходимости в эргодической теореме Винера / И.В. Подвигин // Алгебра и анализ. — 2023. — Т. 35, № 6. — С. 159–168.

3. Качуровский А.Г. Спектральный критерий степенной скорости сходимости в эргодической теореме для $\mathbb{Z}^d$ и $\mathbb{R}^d$ действий / А.Г. Качуровский, И.В. Подвигин, В.Э. Тодиков, А.Ж. Хакимбаев // Сиб. мат. журн. — 2024. — Т. 65, № 1. — С. 92–114.

4. Подвигин И.В. Критерий степенной скорости сходимости эргодических средних для унитарных действий групп $\mathbb{Z}^d$ и $\mathbb{R}^d$ / И.В. Подвигин // Алгебра и анализ. — 2024. — Т. 36, № 4. — С. 148–164.

СРАВНЕНИЕ ПЕРВЫХ ЧАСТОТ КОЛЕБАНИЙ МЕМБРАНЫ И СЕТКИ ИЗ СТРУН

А.А. Поздняков (Воронеж, ВГУ)
andruwapozd@gmail.com

Рассматривается классическая задача о спектре частот собственных колебаний мембраны:

$$\begin{cases} \sigma \triangle u + \lambda \rho u = 0, x \in Q_0 \\ \hfill u = 0, x \in \delta Q \end{cases}$$

где σ – напряжение мембраны, ρ – плотность мембраны

И аналогичная задача :

$$\begin{cases} T_h \triangle_G u + \lambda_h \rho_h u = 0, x \in G_0 \\ \hfill u = 0, x \in \delta G \end{cases}$$

где T_h – натяжение струн, ρ_h – плотность струн

О частотах колебаний сетки из струн, заполняющей квадрат Q с ячейкой h × h.

Натяжение и плотность сетки связяна с аналогичными ведичинами для мембраны формулами:

$$\begin{cases} \rho_h = \dfrac{\rho h}{2} \\ T_h = \sigma h \end{cases}$$

В прошлых докладах было показано, что первые собственные значения данных систем связаны неравенством: $\lambda_1 \geqslant \lambda_1^h$. В докладе, основываясь на принципе Релэя доказано, что $\lambda_1^h \to \lambda_1$ при $h \to 0$.

Ранее этот результат был получен О.М.Пенкиным и другими на основе прямых вычислений, опирающихся на правильную форму сетки. Наш метод имеет перспективы переноса на несимметричные сетки, где прямые вычисления оказываются затруднительными.

Литература

1. Курант Р. Методы математической физики / Р. Курант, Д. Гильберт — Методы математической физики Т.1 — 3-е изд. — 1951. — 476 с.

© Поздняков А.А., 2025

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ВОССТАНОВЛЕНИИ В ВЕСОВЫХ КЛАССАХ РЕШЕНИЙ СИНГУЛЯРНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ[1]

М.В. Половинкина, И.П. Половинкин
(Воронеж, ВГУИТ; Воронеж, ВГУ; Белгород, БелГУ)
polovinkina-marina@yandex.ru

Рассмотрим задачу Коши

$\partial u/\partial t = Bu,\ x \in R_+,\ t > 0,\ \ u(x,0) = u_0(x),\ \ x \in R_+,$

где B — оператор Бесселя в R_+, определяемый формулой $B\,u = \partial^2 u/\partial x^2 + \gamma/x\ \partial u/\partial x$. Единственное решение этой задачи выражается следующей формулой, обобщающей хорошо известную формулу Пуассона [1,2]:

$$u(x,t) = P_t u_0 \equiv \frac{1}{2tx^\nu} \int\limits_{R+} \eta^{\nu+1}\, u_0(\eta)\, I_\nu\left(\frac{\eta x}{2t}\right) \exp\left(-\frac{\eta^2+x^2}{4t}\right) d\eta\ .$$

где $I_\nu(\cdot)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода порядка ν, $\Gamma(\cdot)$ — гамма–функция Эйлера.

Пусть функции $y_j(\cdot) \in L_2^\gamma(R)$ известны в моменты $0 \leqslant t_1 < \cdots < t_p$ и $\|u(\cdot,t_j) - y_j(\cdot)\|_{L_2^\gamma(R_+)} \leqslant \delta_j,\ j = 1,\ldots,p$, где $\delta_j > 0,\ j = 1,\ldots,p$. Требуется, каждому такому набору функций поставить в соответствие функцию из $L_2^\gamma(R_+)$, которая в некотором смысле наилучшим образом аппроксимировала бы истинное распределение температуры в R_+ в фиксированный момент времени τ. Любое отображение $m : L_2^\gamma(R_+) \times \cdots \times L_2^\gamma(R_+) \longrightarrow L_2^\gamma(R_+)$, следуя [3], мы называем методом восстановления (температуры в R_+ в момент τ согласно этой информации). Значение $e(\tau,\overline{\delta},m) = \sup\limits_U \|u(\cdot,\tau) - m(y_j(\cdot))(\cdot)\|_{L_2^\gamma(R_+)}$, где $\overline{y}(\cdot) = (y_1(\cdot),\ldots,y_p(\cdot))$, $\overline{\delta} = (\delta_1(\cdot),\ldots,\delta_p(\cdot))$, $U = \{(u_0(\cdot),\overline{y}(\cdot)) \in L_2^\gamma(R_+) :\ \|u(\cdot,t_j) - y_j(\cdot)\|_{L_2^\gamma(R_+)} \leqslant \delta_j,\ j = 1,\ldots,p\}$, называется ошибкой этого метода. Значение

$$E(\tau,\overline{\delta}) = \inf_{m:(L_2^\gamma(R))^p \longrightarrow L_2^\gamma(R_+)} e(\tau,\overline{\delta},m)$$

называется ошибкой оптимального восстановления. Метод $\widehat{m}$, для которого $E(\tau,\overline{\delta}) = e(\tau,\overline{\delta},\widehat{m})$, называется оптимальным методом восстановления.

На двумерной плоскости (t,y) построим множество

$$M = \mathrm{co}\,\{(t_j, \ln(1/\delta_j))\, j = 1,\ldots,p\} + \{(t,0) : t \geqslant 0\}\,,$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 10-01-00000).

© Половинкина М.В., Половинкин И.П., 2025

где $\mathrm{co}\,A$ означает выпуклую оболочку множества A. Введем функцию $\theta(t)$ на луче $[0,+\infty)$ с помощью формулы $\theta(t)=\max\{y:(t,y)\in M\}$,предполагая, что $\theta(t)=-\infty$, если $(t,y)\notin M$ при всех y. На луче $[t_1,+\infty)$ график функции $\theta(t)$ — направленная вверх выпуклая вверх (вогнутая) ломаная линия. Пусть $t_1=t_{s_1}<t_{s_2}<\dots<t_{s_\varrho}$ суть точки ее изломов.

Теорема [4]. *Для любого* $\tau>0$ $E(\tau,\overline{\delta})=e^{-\theta(\tau)}$.

1. Если $0\leqslant\tau<t_1$, *то* $\theta(\tau)=-\infty$.

2. Если $\tau=t_{s_j}$, $j=1,\dots,\varrho$ *то метод* $\widehat{m}$, *определенный формулой* $\widehat{m}(\overline{y}(\cdot))(\cdot)=y_{s_j}(\cdot)$, *является оптимальным.*

3. Если $\varrho\geqslant 2$, $\tau\in(t_{s_j},t_{s_{j+1}})$, *то метод* $\widehat{m}$, *определенный формулой* $\widehat{m}(\overline{y}(\cdot))(\cdot)=(\Psi_{s_j}*y_{s_j})_\gamma(\cdot)+(\Psi_{s_{j+1}}*y_{s_{j+1}})_\gamma(\cdot)$,*где* $\Psi_{s_j}(\cdot)$, $\Psi_{s_{j+1}}(\cdot)$ *— функции, образы Фурье–Бесселя которых имеют вид*

$$F_\gamma\Psi_{s_j}(\xi)=\frac{(t_{s_{j+1}}-\tau)\delta^2_{s_{j+1}}e^{-|\xi|^2(\tau-t_{s_j})}}{(t_{s_{j+1}}-\tau)\delta^2_{s_{j+1}}+(\tau-t_{s_j})\delta^2_{s_j}e^{-2|\xi|^2(t_{s_{j+1}}-t_{s_j})}},$$

$$F_\gamma\Psi_{s_{j+1}}(\xi)=\frac{(\tau-t_{s_j})\delta^2_{s_j}e^{-|\xi|^2(\tau+t_{s_{j+1}}-2t_{s_j})}}{(t_{s_{j+1}}-\tau)\delta^2_{s_{j+1}}+(\tau-t_{s_j})\delta^2_{s_j}e^{-2|\xi|^2(t_{s_{j+1}}-t_{s_j})}},$$

является оптимальным.

4. Если $\tau>t_{s_\varrho}$, *то метод* $\widehat{m}$, *определенный формулой* $\widehat{m}(\overline{y}(\cdot))(\cdot)=P_{\tau-t_{s_\varrho}}y_{s_\varrho}(\cdot)$, *является оптимальным.*

Литература

1. Житомирский Я. И. Задача Коши для систем линейных уравнений в частных производных с дифференциальными операторами типа Бесселя / Я. И. Житомирский // Матем. сб. — 1955. — Т. 36(78), № 2. —С. 299–310.

2. Muravnik A. B. Functional Differential Parabolic Equations: Integral Transformations and Qualitative Properties of Solutions of the Cauchy Problem / A. B. Muravnik // J. Math. Sci. — 2016. — *216*. — С. 345–496. — https://doi.org/10.1007/s10958-016-2904-0 .

3. Магарил–Ильяев Г. Г.Оптимальное восстановление решения уравнения теплопроводности по неточным измерениям / Г. Г. Магарил–Ильяев, К. Ю. Осипенко // Матем. сб. — 2009. — *Т. 200*, № 5. — С. 37-–54. https://doi.org/10.4213/sm7301 .

4. Polovinkina, M.V., Polovinkin, I.P. Recovery of the solution of the singular heat equation from measurement data. Bol. Soc. Mat. Mex. 29, 41 (2023). https://doi.org/10.1007/s40590-023-00513-3

РЕШЕНИЕ НАЧАЛЬНО КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ ТЕРМОУПРУГИХ ПЛАСТИН.

С.В. Поломин (Москва, РГУ им. А.Н. Косыгина)
sergiopolomin@gmail.com

В современных исследованиях вопросы, касающиеся динамики термоупругих пластин, приобретают особую актуальность. Термоупругие пластины используются в ряде инженерных приложений, от авиации до строительной механики, что делает необходимым тщательное изучение их колебательных свойств.

В работе рассматривается начально краевая задачи для уравнения колебаний термоупругих пластин. Основным уравнением работы является уравнение из работы [1], возникающее в теории колебаний термоупругих пластин:

$$\frac{\partial^3}{\partial t^3}(\Delta u - \beta u) + k\frac{\partial^2}{\partial t^2} \cdot \Delta(\Delta u - \alpha u) + \gamma\frac{\partial}{\partial t}\Delta^2 u - k\Delta^3 u = F(x,t)$$

с начальными условиями:

$$\left.\frac{\partial^j u}{\partial t^j}\right|_{t=0} = u_j(x), \quad j = 0,\ \ldots,\ 2; x \in \Omega;$$

краевыми условиями Дирихле:

$$u|_{\partial\Omega} = 0;$$

или условиями Неймана:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0$$

Данное волновое уравнение определяет амплитуду поперечных колебаний термоупругих пластин. Здесь $u(x,t)-$ функция, которая показывает на сколько от точки равновесия, отклоняется полотно в точке x в момент времени t.

Для поиска точных решений уравнения функция $u(x,t)$ представляется в виде $u(x,t) = T(t)\sin\lambda x$, где сомножитель, который зависит от x, определяется с помощью метода Галёркина. Для определения функции $T(t)$ возникает семейство задач Коши для линейного обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка.

© Поломин С.В., 2025

Также в работе установлено энергетическо тождество, которое можно интерпретировать, как закон сохранения энергии для данной механической системы.

Выработанные методы и подходы могут найти применение в расчетах и разработках новых инженерных проектов, где критично учитывать взаимодействие механики и термодинамики.

Литература

1. Rivera J. E. M. Regularizing Properties and Propagations of Singularities for Thermoelastic Plates / J. E. M. Rivera, L. H. Fatori // Math. Meth. Appl. Sci. 1998. V. 21. P. 797–821.

ТОЧНАЯ ОЦЕНКА СВЕРХУ МОДУЛЯ НЕПРЕРЫВНОСТИ ФУНКЦИИ, СОПРЯЖЁННОЙ К ЛИПШИЦЕВОЙ

А.Ю. Попов, В.А. Окулов (Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова)
mail_29@mail.ru

Обозначим $C_{2\pi}$ множество всех $2\pi-$периодических и непрерывных на $\mathbb{R}$ функций. Давно известно [1, гл.8], что если функция $f \in C_{2\pi}$ и её модуль непрерывности удовлетворяет условию

$$\int_0^{\pi} \frac{\omega(f;h)}{h} dh < +\infty,$$

то 1) ряд Фурье $f(x) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ сходится к $f(x)$ равномерно на $\mathbb{R}$, 2) сопряжённый ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \sin(nx) - b_n \cos(nx))$ сходится равномерно на $\mathbb{R}$ к функции

$$\overline{f}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{ctg}\left(\frac{t}{2}\right) [f(x-t) - f(x+t)] dt \in C_{2\pi},$$

которая называется функцией, сопряжённой к f.

И.И. Привалов [2] доказал, что если $\alpha \in (0,1)$ и $\omega(f;h) \leqslant Mh^{\alpha}$, $M > 0, h \in (0,\pi]$, то $\omega(\overline{f};h) \leqslant C(\alpha)Mh^{\alpha}$, где $C(\alpha)$ - некоторая положительная на $(0,1)$ функция. А.Б. Александров [3] нашёл оптимальное значение $C(\alpha) = \pi^{-1}B(\alpha/2, (1-\alpha)/2)$, где $B-$ бета-функция Эйлера.

Мы решили аналогичную задачу для класса функций, удовлетворяющей условию Липшица порядка 1, а именно нашли

$$\Omega_1(h) = \sup\{\omega(\overline{f};h) \big| f \in C_{2\pi}, \omega(f;t) \leqslant t \quad \forall t \in [0,\pi]\}.$$

© Попов А.Ю., Окулов В.А., 2025

Теорема. *$\Omega_1(h)$ является модулем непрерывности функции сопряжённой к $2\pi-$периодическому продолжению функции $f(x) = |x|$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$, то есть $\Omega_1(h) = \omega(\overline{f}; h)$ при $h \in [0, \pi]$, где*

$$\overline{f}(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\sin(2n-1)x}{\pi(2n-1)^2}$$

. Кроме того, справедливо тождество

$$\Omega_1(h) = \frac{2h}{\pi}\ln\left(\frac{4e}{h}\right) - \frac{4}{\pi}\int_0^{h/2}\left(\frac{h}{2} - t\right)\left(\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t}\right)dt.$$

.

Следствие. *В условиях теоремы верно двойное неравенство*

$$\frac{2-\pi}{6}\left(\frac{h}{\pi}\right)^3 < \Omega_1(h) - \frac{2h}{\pi}\ln\left(\frac{4e}{h}\right) < -\frac{h^3}{72\pi}.$$

В частности, имеем

$$-0,191\left(\frac{h}{\pi}\right)^3 < \Omega_1(h) - \frac{2h}{\pi}\ln\left(\frac{4e}{h}\right) < -0,137\left(\frac{h}{\pi}\right)^3.$$

Литература

1. Бари Н.К. Тригонометрические ряды / Н.К. Бари. — М. : Физматгиз, 1961. — 936 с.

2. Priwaloff J. Sur les fonctions conjuguees / И.И. Привалов // Bull. Soc. Math. Fr. — 1916. — V. 44. — С. 100—103.

3. Александров А.Б. Норма преобразования Гильберта в пространстве гёльдеровых функций / А.Б. Александров //Функц. анализ и его прил. — 1975. — Т. 9, вып. 2. — С. 1—4.

ОПТИМАЛЬНАЯ ТРАНСПОРТИРОВКА С НЕЛИНЕЙНЫМИ ФУНКЦИОНАЛАМИ СТОИМОСТИ

С.Н. Попова (Москва, ВШЭ)
popovaclaire@mail.ru

Пусть даны две борелевские вероятностные меры μ и ν на вполне регулярных топологических пространствах X и Y соответственно, а

© Попова С.Н., 2025

также борелевская неотрицательная функция h на $X \times Y$ (называемая функцией стоимости). Рассмотрим множество $\Pi(\mu, \nu)$ всех борелевских вероятностных мер на произведении $X \times Y$ с проекциями μ и ν на сомножители, т.е. $\sigma(A \times Y) = \mu(A)$ и $\sigma(X \times B) = \nu(B)$ для всех борелевских множеств $A \subset X$ и $B \subset Y$. Меры из множества $\Pi(\mu, \nu)$ называются планами Канторовича или транспортными планами, а меры μ и ν называются маргиналами. Задача Канторовича заключается в минимизации интеграла

$$J_h(\sigma) = \int_{X \times Y} h(x, y)\, \sigma(dx\, dy)$$

по множеству $\Pi(\mu, \nu)$. Функция стоимости h обычно предполагается непрерывной или полунепрерывной снизу, чтобы гарантировать существование минимума. Функционал J_h является линейным по σ, поэтому мы имеем дело с минимизацией линейного функционала на выпуклом множестве, которое компактно в слабой топологии.

В [1] была рассмотрена модификация задачи Канторовича, в которой допускается зависимость функции стоимости h от плана σ, то есть h — борелевская функция на $X \times Y \times \mathcal{P}(X \times Y)$, где $\mathcal{P}(X \times Y)$ — пространство вероятностных борелевских мер на $X \times Y$, которое рассматривается со слабой топологией. Таким образом, теперь функционал

$$J_h(\sigma) = \int_{X \times Y} h(x, y, \sigma)\, \sigma(dx\, dy)$$

не является линейным по σ. Рассмотрим случай, когда функция стоимости h зависит от условных мер σ^x на Y меры σ относительно меры μ. Функционал, связанный с условными мерами, может иметь вид

$$\int_X \int_Y h(x, y, \sigma^x)\, \sigma^x(dy)\, \mu(dx)$$

или более простой вид

$$\int_X h(x, \sigma^x)\, \mu(dx).$$

В работе [1] было доказано, что если X, Y — польские пространства, функция $h\colon X \times \mathcal{P}(Y) \to \mathbb{R}$ полунепрерывна снизу на $X \times \mathcal{P}(Y)$ и выпукла по p, то в нелинейной задаче Канторовича с функцией стоимости h существует оптимальный план.

В данной работе рассматривается нелинейная задача Канторовича с функцией стоимости $h(x, y, \sigma^x)$. Доказывается, что в этой задаче оптимальное решение может не существовать, если $h\colon X \times \mathcal{P}(Y) \to \mathbb{R}$ — ограниченная непрерывная функция и функция $p \mapsto h(x, y, p)$ выпукла по p при всех $x \in X, y \in Y$.

Также доказывается новый результат о существовании решения в нелинейной задаче с условными мерами для функций стоимости $h(x, \sigma^x)$, позволяющий ослабить условие выпуклости функции $h\colon X \times \mathcal{P}(Y) \to \mathbb{R}$ по p.

Изучается нелинейная задача Канторовича с функцией стоимости $h(x, g(\sigma^x))$, где $g(p) = \int_Y F(y)p(dy)$ и $F\colon Y \to \mathbb{R}^d$ — борелевская функция. Мы показываем связь нелинейной задачи с функцией стоимости $h(x, g(\sigma^x))$ и некоторой задачи Монжа с выпуклым доминированием.

Литература

1. Backhoff-Veraguas J., Beiglböck M., Pammer G. Existence, duality, and cyclical monotonicity for weak transport costs / J. Backhoff-Veraguas, M. Beiglböck, G. Pammer // Calc. Var. Partial Differ. Equ. — 2019. V. 58, №203. — P. 1–28.

2. Popova S.N. On nonlinear Kantorovich problems for cost functions of a special form / S.N. Popova // Algebra i Analiz. — 2024. V. 36, №4. — P. 165–194.

3. Bogachev V.I., Popova S.N., Rezbaev A.V. On nonlinear Kantorovich problems with density constraints / V.I. Bogachev, S.N. Popova, A.V. Rezbaev // Moscow Mathematical Journal. — 2023. V. 23, №3. — P. 285–307.

ОБ ОЦЕНКАХ РАВНОМЕРНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ФУНКЦИЙ СО СТЕПЕННОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ РАЦИОНАЛЬНЫМИ ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ ФУРЬЕ—ЧЕБЫШЕВА[1]

П.Г. Поцейко, Е.А. Ровба

(Гродно, Республика Беларусь, ГрГУ им. Я. Купалы)

pahamatby@gmail.com, rovba.ea@gmail.com

В 1964 году Д. Ньюменом [1] была построена рациональная функция, которая в значительной степени улучшала порядок равномер-

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке ГПНИ «Конвергенция-2025» (№ 20211888, Республика Беларусь).

© Поцейко П.Г., Ровба Е.А., 2025

ных приближений функции $|x|$ на отрезке $[-1,1]$ в сравнении с полиномиальными аппроксимациями. Результат Д. Ньюмена придал новый импульс в исследованиях наилучших равномерных рациональных приближений функции $|x|$ на отрезке $[-1,1]$, а «ньюменовские» параметры $\xi_k = \mathrm{e}^{-k/\sqrt{n}},\ k=0,1,\ldots,n$, и их модификации оказались полезными в рациональной аппроксимации функций со степенной особенностью. В частности, они могут быть использованы при решении задач аппроксимации рациональными интегральными операторами, восходящими своими корнями к классическим рядам Фурье.

В 1979 году Е. А. Ровба [2] ввел рациональный интегральный оператор, ассоциированный с системой рациональных функций Чебышёва — Маркова [3] и представляющий собой естественным обобщением частичных сумм полиномиального ряда Фурье — Чебышёва. В [4] этот метод был использован для решения задачи рациональной аппроксимации функции $|x|^s, s\in(0,+\infty)\backslash\mathbb{N}$, на отрезке $[-1,\ 1]$. В частности, для равномерных приближений

$$\varepsilon_{2n}(|x|^s) = |||x|^s - s_{2n}(|x|^s,\ x)||_{C[-1,\ 1]},\quad n\in\mathbb{N},$$

была найдена оценка сверху

$$\varepsilon_{2n}(|x|^s) \leqslant \frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right| \int\limits_0^1 \frac{u^{s-1}}{(1-u^2)^{\frac{s}{2}}}\left(\frac{1-u}{1+u}\right)^r \left|\prod_{k=1}^m \frac{\beta_k-u}{\beta_k+u}\right| du, \qquad (1)$$

где $\beta_k\in(0,\ 1],\ k=1,2,\ldots,m,\ n=m+r,\ n>r,\ r=[s/2]$. Причем оценка точна в том смысле, что если все $\beta_k,\ k=1,2,\ldots,m$, имеют только четную кратность, то равенство в ней достигается при $x=0$.

В докладе решается задача получения оценок равномерных рациональных приближений функции $|x|^s, s\in(0,+\infty)\backslash\mathbb{N}$, на отрезке $[-1,\ 1]$ путем исследования поведения интегрального представления мажоранты в соотношении (1) при различных наборах параметров $\beta_k,\ k=1,2,\ldots,m$. В случае использования некоторых модификаций «ньюменовских» параметров установлена [5] равномерная оценка

$$\varepsilon_{2n}(|x|^s) \leqslant c_1(s)\sqrt{n}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}\sqrt{sn}},\quad n\to\infty.$$

Основываясь на результатах Н. С. Вячеславова [6] (см., также, Е. В. Ковалевская, А. А. Пекарский [7]), получена равномерная оценка

$$\varepsilon_{2n}(|x|^s) \leqslant c_2(s)\sqrt{n}\mathrm{e}^{-\pi\sqrt{sn}},\quad n\to\infty.$$

Литература

1. Newman D. J. Rational approximation to $|x|$ / D. J. Newman // The Michigan Mathem. Journal. — 1964. — Vol. 11, iss. 1. — P. 11–14.

2. Ровба Е. А. Об одном прямом методе в рациональной аппроксимации / Е. А. Ровба // Доклады АН БССР. — 1979. — Т. 23, № 11. — С. 968–971.

3. Русак В. Н. Рациональные функции как аппарат приближения / В. Н. Русак. — Минск : БГУ, 1979. — 178 с.

4. Поцейко П. Г. Приближения на классах интегралов Пуассона рациональными интегральными операторами Фурье–Чебышёва / П. Г. Поцейко, Е. А. Ровба // Сибирский математический журнал. — 2021. — Т. 62, № 2. — С. 362–386.

5. Поцейко П. Г. Об оценках равномерных приближений рациональными интегральными операторами Фурье–Чебышева при определенном выборе полюсов / П. Г. Поцейко, Е. А. Ровба // Математические заметки. — 2023. — Т. 113, выпуск 6. — С. 876–894.

6. Вячеславов Н. С. О наименьших уклонениях функции $\operatorname{sign} x$ и ее первообразных от рациональных функций в метриках L_p, $0 < p < \infty$. / Н. С. Вячеславов // Математический сборник. — 1977. — Т. 103(145), № 1(5). — С. 24–36.

7. Ковалевская Е. В. Построение экстремальных произведений Бляшке / Е. В. Ковалевская, А. А. Пекарский // Веснік ГрГУ ім. Я. Купалы. Сер. 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. — 2017. — Т. 7, № 1. — С. 6–14.

ТОЧНАЯ ПОРЯДКОВАЯ ОЦЕНКА КОНСТАНТЫ ЛЕБЕГА ДЛЯ СУММ ФУРЬЕ В ПРОСТРАНСТВАХ ОРЛИЧА

А.Д. Пьянков (Екатеринбург, ИММ УрО РАН)

sascha.pyankow@mail.ru

В соответствии с [1] будем использовать следующие определения и обозначения. Будем называть функцию $\varphi : \mathbb{R} \to [0; +\infty)$ N-*функцией*, если она четная, выпуклая, положительная при ненулевом аргументе, непрерывно дифференцируемая и

$$\lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x)}{x} = 0; \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = +\infty.$$

Класс Орлича $\varphi(L)_{2\pi}$ состоит из всех измеримых 2π-периодичных

© Пьянков А.Д., 2025

функций f, для которых

$$\int_0^{2\pi} \varphi(f(x))\,dx < +\infty.$$

Пространством Орлича называется наименьшее по включению линейное пространство, содержащее заданный класс Орлича. Одноименную норму в пространстве Орлича, построенного по классу $\varphi(L)_{2\pi}$, будем обозначать $\|\cdot\|_{\varphi}$.

Говорят, что N-функция φ принадлежит *классу* Δ_2, если

$$\exists c, x_0 > 0\; \forall x > x_0 \quad \varphi(2x) \leqslant c\varphi(x).$$

Пусть $S_n(f)$ — n-я частичная сумма ряда Фурье функции f по тригонометрической системе.

Теорема. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $1 < a < b < +\infty$, φ и ψ — N-функции, удовлетворяющие следующим условиям*:

$$\frac{\varphi^{-1}(x)}{\psi^{-1}(x)} \text{ не убывает при } x > 0;$$

$$\frac{\psi'(xy)}{\varphi'(x)} \text{ при любом } y > 0 \text{ строго возрастает на } (0, +\infty);$$

φ из класса Δ_2 и дополнительно удовлетворяет условиям

$$\int_{\varepsilon}^{u} \varphi(t)t^{-a-1}\,dt = O(\varphi(u)u^{-a}); \tag{a}$$

$$\int_{u}^{+\infty} \varphi(t)t^{-b-1}\,dt = O(\varphi(u)u^{-b}), \tag{b}$$

при $u \geqslant \varepsilon > 0$, где ε достаточно мало. Тогда справедлива следующая порядково точная оценка

$$\|S_n(f)\|_{\psi} \leqslant C_1 \frac{\varphi^{-1}(n)}{\psi^{-1}(C_2 n)} \|f\|_{\varphi}, \tag{1}$$

где $f \in \varphi(L)_{2\pi}$, а C_1 и C_2 не зависят от n и f. Порядковая по n точность неравенства (1) *достигается на ядре Фейера степени n.*

Замечания. 1. Множитель перед $\|f\|_{\varphi}$ в неравенстве (1) является оценкой сверху на константы Лебега $\|S_n\|_{\varphi(L)_{2\pi} \to \psi(L)_{2\pi}}$.

2. Порядковая точность неравенства (1) совпадает с порядковой точностью неравенства разных метрик для тригонометрических полиномов в пространствах Орлича [2, теорема 3].

3. Условия (a) и (b) обеспечивают промежуточное положение пространства Орлича между двумя пространствами Лебега: $L^{\bar{b}}_{2\pi} \subset \varphi(L)_{2\pi} \subset L^{a}_{2\pi}$, где $1 < a < b \leqslant \bar{b} < +\infty$.

Литература

1. Красносельский М.А. Выпуклые функции и пространства Орлича / М.А. Красносельский, Я.Б. Рутицкий. — М. : Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1958. — 271 с.

2. Пьянков А.Д. Неравенство разных метрик для дискретных норм Люксембурга в конечномерном пространстве / А.Д. Пьянков // Труды ИММ УрО РАН. — 2024. — Т. 30, № 4. — С. 212–223.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ВОЗМУЩЕННОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА[1]

Е.В. Раецкая (Воронеж, ВГЛТУ)

raetskaya@inbox.ru

Рассматривается возмущенная система в частных производных

$$\varepsilon \frac{\partial^2 x(t,s,\varepsilon)}{\partial t^2} = B\frac{\partial x(t,s,\varepsilon)}{\partial s} + Du(t,s,\varepsilon) \qquad (1)$$

с условиями

$$x(0,s,\varepsilon) = \alpha_0(s), \qquad x(T,s,\varepsilon) = \beta_0(s), \qquad (2)$$

где $t \in [0,T], s \in [0,S], \varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$; $x(t,s,\varepsilon) \in \mathbb{R}^n$; $u(t,s,\varepsilon) \in \mathbb{R}^m$; B, D — матрицы соответствующих размеров.

Устанавливаются необходимые и достаточные условия полной управляемости системы (1) с применением метода каскадной декомпозиции ([1]–[6]), базирующемся на свойствах прямоугольной матрицы $D : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, которой соответствуют расщепления пространств в прямые суммы подпространств:

$$\mathbb{R}^m = \operatorname{Coim} D \dot{+} \operatorname{Ker} D, \quad \mathbb{R}^n = \operatorname{Im} D \dot{+} \operatorname{Coker} D.$$

[1] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-20012, https://rscf.ru/project/24-21-20012/

© Раецкая Е.В., 2025

Наряду с возмущенным уравнением (1) рассматривается предельное уравнение ($\varepsilon = 0$):

$$0 = B\frac{\partial \overline{x}(t,s)}{\partial s} + D\overline{u}(t,s). \tag{3}$$

Уравнение (1) является сингулярно возмущенным, так как функция $\overline{x}(t,s)$ — решение предельного уравнения (3), при любом $\overline{u}(t,s)$, удовлетворяет лишь некоторой части условий (2).

Выявляются компоненты функций $\alpha_0(s), \beta_0(s)$ в условиях (2), которым удовлетворяет функция $\overline{x}(t,s)$.

На коэффициенты B, D не накладываются условия регулярности вырождения задачи (например, условий на спектры некоторых матриц). Здесь требуется лишь полная управляемость возмущенной системы.

Решается следующая задача управления: для любого решения $\overline{x}(t,s)$ предельного уравнения (3), удовлетворяющего соответствующей части условий (2), строится управляющая функция $u(t,s,\varepsilon)$, при подстановке которой в уравнение (1), его решение $x(t,s,\varepsilon)$ удовлетворяет условиям (2) и обладает свойством:

$$x(t,s,\varepsilon) = \overline{x}(t,s) + v(t,s,\varepsilon), \tag{4}$$

где $v(t,s,\varepsilon)$ - функция погранслоя вблизи точек $t = 0$ и $t = T$. Свойство (4) означает:

1) $x(t,s,\varepsilon)$ равномерно стремиться к $\overline{x}(t,s)$ на любом отрезке $[t_1,t_2]$, $0 < t_1 < t_2 < T$;

2) $x(t,s,\varepsilon)$ не стремиться равномерно к $\overline{x}(t,s)$ на отрезке $[0,T]$.

Литература

1. Zubova С.П. Solution of the spectrum allocation problem for a linear control system with closed feedback /S.P. Zubova, E.V. Raetskaya //Differential Equations. — 2024. —Vol. 60, № 6, P. 763 – 781.

2. Раецкая Е.В. Общая схема построения определяющей функции в задаче управления для динамической системы в частных производных разного порядка / Е.В. Раецкая // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2024. —Т. 232, № 1. —С. 78 – 88.

3. Zubova С.П. Solution of a semi-boundary value problem for a degenerate partial differential equation /S.P. Zubova, E.V. Raetskaya //Differential Equations. — 2022. —Vol. 58, № 9, P. 1182 – 1194.

4. Zubova C.П. Solution of the multi-point control problem for a dynamic system in partial derivatives /S.P. Zubova, E.V. Raetskaya //Mathematical Methods in the Applied Sciences. — New York :AIMS Press, 2021. —Vol. 44, № 15, P. 11998 – 12009.

5. Zubova C.П.Construction of Controls Providing the Desired Output of the Linear Dynamic System /S.P. Zubova, E.V. Raetskaya //Automation and Remote Control. —2018. —Vol. 79, № 5, P. 774 – 791.

6. Раецкая Е.В. Структурный анализ функции управления динамической системой в частных производных разного порядка / Е.В. Раецкая // Моделирование систем и процессов. —2023. —Т. 16, № 1. —С. 93 – 104.

7. Раецкая Е.В. Алгоритм построения полиномиального решения задачи программного управления для динамической системы в частных производных / Е.В. Раецкая // Моделирование систем и процессов. —2023. —Т. 16, № 3. —С. 94 – 104.

МОДЕЛИРОВАНИЕ СОСТОЯНИЙ ЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ПОМОЩЬЮ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

К.А. Раецкий (Воронеж, ВГУ)
kraetsky@mail.ru

Для динамической системы

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \tag{1}$$

$x = x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u = u(t) \in \mathbb{R}^m$, $t \in [t_0, t_k]$, $A : n \times n$, $B : n \times m$, ставится задача построения множества траекторий, состояний $x(t)$, соединяющих точки x_0 при $t = t_0$ и x_k при $t = t_k$, то есть

$$x(t_0) = x_0, \tag{2}$$

$$x(t_k) = x_k. \tag{3}$$

Из множества траекторий $x(t)$, удовлетворяющих (1), (2), (3), «заказчик» выбирает «подходящую» траекторию $\widetilde{x}(t)$, после чего следует найти управление $\widetilde{u}(t)$, под воздействием которого траекторией системы(1), при выполнении условия (2), будет именно $\widetilde{x}(t)$. Если «заказчик» не удовлетворен предъявленными ему траекториями, то следует построить другое множество траекторий, что удобно

© Раецкий К.А., 2025

делать методом неопределенных коэффициентов, разработанным в ([1] – [4]). Пучок траекторий ищется в виде

$$x(t) = \sum_{i=1}^{r} c_i \cdot g_i(t). \tag{4}$$

Соответственно

$$u(t) = \sum_{i=1}^{r} d_i \cdot g_i(t). \tag{5}$$

В качестве $g_i(t)$ берутся линейно независимые скалярные функции, от которых требуется, чтобы некоторый определитель $\triangle$ был отличен от нуля. Для нахождения векторных коэффициентов c_i, d_i, выражения (4)—(5) подставляются в (1). Приравнивание в полученном соотношении коэффициентов при одинаковых функциях $g_i(t)$ приводит к построению линейной алгебраической системы.

В настоящей работе $\varphi_i(t) = a^{it}$, $a \neq 1$. Эти функции имеют преимущества перед $\varphi_i(t) = t^i$, $\varphi_i(t) = e^{it}$. Алгебраическая система в этом случае принимает вид

$$(A - (\ln a) \cdot I)c_i + Bd_i = 0, \quad i = 1, 2, ..., r. \tag{6}$$

Известен критерий Хаутуса:

система (1) является полностью управляемой в том и только том случае, когда

$$rank(A - \lambda \cdot I \quad B) = n, \quad , \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Следовательно, система (6) при каждом i имеет решение c_i, d_i.

Расщепляем каждое уравнение (6) на два уравнения:

- одно для нахождения c_i;

- второе для определения d_i.

Коэффициенты c_i находим методом каскадной декомпозиции. На последнем шаге декомпозиции выявляются произвольные элементы $Q_{p-1}Q_{p-2}...Q_0c_i$, где Q_j — проекторы на некоторые подпространства. Эти произвольные элементы затем определяются из условий (2), (3), при $\triangle \neq 0$.

Неединственность траекторий $x(t)$ следует их наличия ядер у некоторых операторов, возникающих при декомпозиции систем, а также за счет изменения параметра a.

Литература

1. Zubova С.П. Algorithm to solve linear multipoint problems of control by the method of cascade decomposition /S.P. Zubova, K.A. Raetskiy // Mathematical Biosciences and Engineering. — 2021. — Vol. 18, № 6, — P. 7861–7876.

2. Раецкий К.А. Моделирование экспоненциально стабилизированной траектории движения для линейной динамической системы /К.А. Раецкий //Таврический вестник информатики и математики. — 2024. — Т. 63, № 2, — С. 57–74.

3. Раецкий К.А. Моделирование стабилизированной траектории линейной динамической системы методом неопределенных коэффициентов /К.А. Раецкий // Фундаментальные основы механики. — 2022. — № 10, — С. 34–37.

4. Раецкий К.А. Построение модели движения линейной динамической системы с многоточечными условиями /К.А. Раецкий //Таврический вестник информатики и математики. — 2021. — Т. 1, № 50, — С. 65–80.

ДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА НЕКОТОРЫХ ОПЕРАТОРОВ[1]

А.И. Рахимова (Уфа, Институт математики с вычислительным центром УФИЦ РАН)
alsu1405@mail.ru

Рассмотрим некоторые динамические свойства операторов в весовом пространстве целых функций $\mathcal{F}_\varphi$, где φ — семейство выпуклых в $\mathbb{C}^n$ функций. Оно определено как проективный предел компактной последовательности банаховых пространств $\mathcal{F}_m$

$$\mathcal{F}_\varphi = \bigcap_{m=1}^{\infty} \mathcal{F}_m,$$

поэтому является пространством Фреше–Шварца.

Теорема 1. *В пространстве $\mathcal{F}_\varphi$ оператор частного дифференцирования*

$$T = \frac{\partial}{\partial z_j},\ j \in (1;n),$$

гиперциклический и его образ лежит в $\mathcal{F}_\varphi$.

[1]

© Рахимова А.И., 2025

Теорема 2. *Пусть в пространстве $\mathcal{F}_\varphi$ задан некоторый полином с постоянными коэффициентами*

$$\Phi(z) = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n\colon\, |\alpha|\leqslant m} c_\alpha z^\alpha,\ z\in\mathbb{C}^n,$$

отличный от константы, тогда оператор

$$T = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n\colon\, |\alpha|\leqslant m} c_\alpha D_z^\alpha f$$

гиперциклический в $\mathcal{F}_\varphi$.

Литература

1. Рахимова А.И. О гиперциклических операторах в весовых пространствах целых функций // Таврич. вестн. информ. и матем. — 2023. — Т. 58, № 1. — С. 88–110.

О МНОГОМЕРНОМ АНАЛОГЕ ОТНОШЕНИЯ $\frac{\Delta f}{\Delta x}$

В.И. Родионов (Ижевск, УдГУ)
rodionov@uni.udm.ru

Через $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ обозначим совокупность всех непустых открытых множеств, определенных в пространстве $\mathbb{R}^n$. Допускается, что множество $X\in\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ не ограничено и/или имеет счетное число компонент связности. Через $\mathcal{O}^2_+(\mathbb{R}^n)$ обозначим совокупность всех упорядоченных пар (X_0,X) таких, что $X_0\in\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ и $X_0\subseteq X\subseteq\overline{X}_0$.

Пусть $(X_0,X)\in\mathcal{O}^2_+(\mathbb{R}^n)$. Через X^{n+1}_* обозначим множество, состоящее из всех упорядоченных наборов $\langle x_0,x_1,\ldots,x_n\rangle$, $x_i\in X$, таких, что векторы $\Delta x_1,\ldots,\Delta x_n$ (где $\Delta x_i\doteq x_i-x_0$) образуют ортогональный репер с началом в точке x_0, причем выпуклая оболочка $\operatorname{conv}\{\,x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ содержится в X.

Зафиксируем симплекс $\langle x_0,x_1,\ldots,x_n\rangle\in X^{n+1}_*$ и составим квадратную матрицу $\Delta x\doteq\operatorname{col}(\Delta x_1,\ldots,\Delta x_n)$, состоящую из элементов $\Delta x_{ij}\doteq x_i^j-x_0^j$, где через x_i^j обозначена j-я координата точки x_i. Пусть $\Delta x^\top$ — это транспонированная к Δx матрица. Тогда

$$(\Delta x)^{-1} = \Delta x^\top \operatorname{diag}\Big(\,\tfrac{1}{\|\Delta x_1\|^2}\,,\ \ldots,\ \tfrac{1}{\|\Delta x_n\|^2}\,\Big).$$

© Родионов В.И., 2025

Произвольной функции $f\colon X \to \mathbb{R}$ поставим в соответствие векторнозначную функцию $\Gamma_f : X_*^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ такую, что

$$\Gamma_f \langle x_0, x_1, \ldots, x_n \rangle \doteq \begin{pmatrix} \Delta x_{11} & \ldots & \Delta x_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \Delta x_{n1} & \ldots & \Delta x_{nn} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \Delta f_1 \\ \ldots \\ \Delta f_n \end{pmatrix},$$

где $\Delta f_i \doteq f(x_i) - f(x_0)$. Если $\Delta f \doteq \mathrm{col}\,(\Delta f_1, \ldots, \Delta f_n)$, то формула принимает компактный вид $\Gamma_f = (\Delta x)^{-1} \Delta f$.

При $n = 1$ применима традиционная запись $\Gamma_f = \frac{\Delta f}{\Delta x}$.

Пусть $N \doteq \{1, \ldots, n\}$. Справедливо равенство

$$\| \Gamma_f \langle x_0, x_1, \ldots, x_n \rangle \|^2 = \sum_{k \in N} \left(\tfrac{f(x_k) - f(x_0)}{\| x_k - x_0 \|} \right)^2, \quad \langle x_0, x_1, \ldots, x_n \rangle \in X_*^{n+1}.$$

Пусть $\langle x_0, x_1, \ldots, x_n \rangle \in X_*^{n+1}$. Уравнение гиперплоскости, проходящей через точки $(x_m, f(x_m)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, $m \in \{0\} \cup N$, имеет вид

$$z = f(x_0) + \big((\Delta x)^{-1} \Delta f, x - x_0 \big) \quad \text{или} \quad z = f(x_0) + (\Gamma_f, x - x_0).$$

При $n = 1$ первая формула принимает классический вид.

Теорема 1. *Пусть $X \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$. Функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируема тогда и только тогда, когда для любого $x \in X$ существует конечный предел*

$$\lim{}_* \, \Gamma_f \langle x_0, x_1, \ldots, x_n \rangle. \tag{1}$$

В этом случае справедливо $\lim_* \Gamma_f \langle x_0, x_1, \ldots, x_n \rangle = \mathrm{grad}\, f(x)$.

Символ «$*$» в формуле (1) означает следующее. Вектор $\mathrm{g}(x)$ есть предел (1), если для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность U_x точки x такая, что $\| \Gamma_f \langle x_0, x_1, \ldots, x_n \rangle - \mathrm{g}(x) \| < \varepsilon$ для любых $x_0, x_1, \ldots, x_n \in X \cap U_x$ таких, что $\langle x_0, x_1, \ldots, x_n \rangle \in X_*^{n+1}$.

Зафиксируем пару $(X_0, X) \in \mathcal{O}_+^2(\mathbb{R}^n)$ и через $\mathcal{C}(X)$ обозначим линейное пространство, состоящее из непрерывных ограниченных функций $f\colon X \to \mathbb{R}$. Согласно [1, с. 30] пространство $\mathcal{C}(X)$, наделенное нормой $\|f\|_{\mathcal{C}(X)} \doteq \sup\limits_{x \in X} |f(x)|$, банахово. Через $\mathcal{G}(X)$ обозначим линейное пространство, состоящее из функций $f \in \mathcal{C}(X)$ таких, что

$$\gamma(f) \doteq \sup_{\langle x_0, x_1, \ldots, x_n \rangle \in X_*^{n+1}} \| \Gamma_f \langle x_0, x_1, \ldots, x_n \rangle \| < \infty.$$

В пространстве определена норма $\|f\|_{\mathcal{G}(X)} \doteq \|f\|_{\mathcal{C}(X)} + \gamma(f)$.

Теорема 2. *Пусть* $(X_0, X) \in \mathcal{O}^2_+(\mathbb{R}^n)$. *Линейное пространство* $\langle \mathcal{G}(X), \|\cdot\|_{\mathcal{G}(X)} \rangle$ *банахово.*

Через $\mathcal{F}(X)$ обозначим линейное пространство всех таких функций $f \in \mathcal{C}(X)$, что $\lambda(f) \doteq \sup\limits_{x,y\,\in X,\ x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{\|x-y\|} < \infty$. В этом пространстве определена норма $\|f\|_{\mathcal{F}(X)} \doteq \|f\|_{\mathcal{C}(X)} + \lambda(f)$ и оно входит в семейство банаховых пространств функций типа Липшица–Гельдера (подобные функции играют важную роль при решении задач математической физики).

Теорема 3. *Если* $(X_0, X) \in \mathcal{O}^2_+(\mathbb{R}^n)$, *то* $\mathcal{F}(X) \subseteq \mathcal{G}(X)$. *Если, кроме того,* X_0 *— выпуклое множество, то* $\mathcal{F}(X) = \mathcal{G}(X)$.

Исследован ряд актуальных подпространств пространства $\mathcal{G}(X)$, доказано, что два из них банаховы, одно из них при $n = 1$ и при определенных условиях является замыканием пространства кусочно-линейных функций $f\colon X \to \mathbb{R}$.

Литература

1. Хатсон В. Приложения функционального анализа и теория операторов / В. Хатсон, Дж.С. Пим. — М. : Мир, 1983. — 432 с.

УПРАВЛЕНИЕ КОЛЕБАНИЯМИ КОРОТКИХ БАЛОК[1]

А.М. Романенков (Москва, МАИ, ФИЦ ИУ РАН)
romanaleks@gmail.com

Будем рассматривать модельную задачу о колебаниях короткой балки. Пусть $u(x,t)$– отклонение от положения равновесия в точке x, в момент времени t, где $x \in (0;l), l > 0; t \geqslant 0$. Данная функция является решением начально краевой задачи:

$$\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \rho I \frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x^2} + EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \kappa \frac{(EI)^2}{GA} \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} = 0, \tag{1}$$

с однородными краевыми условиями:

$$u\big|_{x=0} = u\big|_{x=l} = \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x=l} = \left.\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right|_{x=l} = 0, \tag{2}$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Гранта на выполнение крупных научных проектов в приоритетном порядке направления научно-технического развития Министерства науки и высшего образования Образование Российской Федерации от 24 апреля 2024 г. (проект № 075-15-2024-544).

© Романенков А.М., 2025

и начальными условиями

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x), \tag{3}$$

где функции $u_0(x)$, $u_1(x)$ удовлетворяют краевым условиям (2), что необходимо для существования решения. В уравнении(1) $\rho-$ массовая плотность, $A-$ площадь поперечного сечения, $I-$ момент инерции поперечного сечения балки относительно оси z, $M-$ изгибающий момент, $E-$ модуль Юнга, $G-$ модуль сдвига, $\kappa-$ коэффициент сдвига. Применение метода Галёрикна позволяет доказать существование слабого решения задачи (1)-(3) и предъявить его в виде ряда Фурье:

$$u(x,\ t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_{1_n} \sin\left(\sqrt{\delta_{6n}} t\right) + C_{2_n} \cos\left(\sqrt{\delta_{6n}} t\right)\right) \sin \lambda_n x, \tag{4}$$

где $\lambda_n = \frac{\pi n}{l}, \delta_6 = \frac{\frac{I}{A} E \lambda^4 \left(\frac{A}{I} + \kappa \frac{EI}{G} \lambda^2\right)}{\rho\left(\frac{A}{I} + \lambda^2\right)}$, а константы C_{1_n}, C_{2_n} определяются из начальных условий (3), как коэффициенты Фурье разложения по $\sin \lambda_n x$ функций $u_0(x)$ и $u_1(x)$ соответственно.

Для управления колебаниями будем использовать градиентный метод [1]. Пусть $y_0(x), y_1(x)-$ желаемая форма и скорость точек балки соответсвенно в момент времени $T > 0$. Определим квадратичный функционал:

$$J_{L^{2n}}(f) = ||u(x,T,f) - y_0(x)||^2_{L^{2n}} + ||u_t(x,T,f) - y_1(x)||^2_{L^{2n}} + \\ + C_\varepsilon \int_0^l \int_0^T f^2(x,t)\, dt dx \tag{5}$$

который характеризует отклоение решения задачи (1)-(3) от целевых функций. Отметим, что в (5) $|| \bullet ||_{L^{2n}}$ обозначет норму, которая индуцирована положительно определенным дифференциальным оператором $L = -\rho I \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \rho A$. Следуя работе [2] получаем выражение для градиента функционала (5):

$$(grad J_{L^{2n}}(f), h) = \int_0^l \int_0^T (\psi(x,t) + 2C_\varepsilon f(x,t))\, h(x,t)\, dt dx, \tag{6}$$

где $\psi(x,t)-$ сопряженная функция, которая является решением уравнения (1), удовлетворяет тем же краевым услвоиям (2) и новым начальным условиям:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}(x,T) = -2\left(u(x,T,f) - y_0(x)\right),\ \psi(x,T) = 2\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,T,f) - y_1(x)\right).$$

Стоит отметить, что сопряженную начально краевую задачу необходимо решаеть в обратном времени.

Литература

1. Васильев Ф. П. Методы оптимизации: В 2-х кн: Кн. 2 / Ф.П. Васильев. — Москва : МЦНМО, 2011. — 427 с. - ISBN 978-5-94057-708-9.

2. Романенков А.М. Градиент в задаче управления процессами, описываемыми линейными псевдогиперболическими уравнениями / А.М.Романенков // Дифференциальные уравнения. 2024. — Т. 60. - №2. - С. 224–236. doi: 10.31857/S0374064124020068

ОБ ОЦЕНКЕ РАЗНОСТИ ЧАСТИЧНЫХ СУММ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО КОРНЕВЫМ ФУНКЦИЯМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА И В ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЙ РЯД ФУРЬЕ

В.С. Рыхлов (Саратов, СГУ)
rykhlovvs@yandex.ru

Рассмотрим линейный дифференциальный оператор L, порождённый дифференциальным выражением n-го порядка

$$\ell(y) = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y, \qquad p_j(x) \in L_1[0,1],$$

и краевыми условиями

$$\sum_{j=0}^{n-1}(a_{kj}y^{(j)}(0) + b_{kj}y^{(j)}(1)) = 0, \qquad k = \overline{1,n}. \tag{1}$$

Одной из важных задач является задача о разложении заданной функции в ряд по корневым функциям (к.ф.) оператора L. Наиболее полно эта задачи решается в случае, когда удается доказать равносходимость (в том или ином смысле) разложений заданной функции в ряды по к.ф. оператора L и в тригонометрический ряд Фурье, так как тригонометрическая система достаточно хорошо изучена.

Тригонометричпеская система является системой к.ф. оператора L_0 вида

$$\ell_0(y) = y^{(n)}, \quad y^{(k-1)}(0) - y^{(k-1)}(1) = 0, \quad k = \overline{1,n}.$$

Изучается влияние свойств коэффициента $p_1(x)$ и разлагаемой функции $f(x)$ на оценку разности частичных сумм в равномерной

© Рыхлов В.С., 2025

метрике внутри интервала (0,1) разложений в ряды по к.ф. операторов L и L_0. Соответствующие результаты опубликованы в статьях [2] и [3]. Там же можно найти краткую историю вопроса. Более детально история вопроса описана в обзорной статье [4].

Пусть λ_ν, $\lambda_{0\nu}$, $\nu = 0, 1, \ldots$, есть собственные значения (с.з.) операторов L и L_0, соответственно. Обозначим через D_δ область комплексной плоскости $\mathbb{C}$, получающуюся из $\mathbb{C}$ после удаления из нее всех с.з. операторов L и L_0 вместе с кругами с центрами в с.з. и достаточно малого фиксированного радиуса $\delta > 0$.

Из асимптотики с.з. [1, с. 74–75] следует, что существует последовательность $\{r_m\}_{m=1}^{\infty} \in \mathbb{R}$ такая, что $(2\pi m)^n < r_m < (2\pi(m+1))^n$, и контуры $\Gamma_m := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = r_m\}$, начиная с некоторого достаточно большого m, лежат в области D_δ.

Между соседними контурами находятся не более двух с.з. λ_ν оператора L, начиная с некоторого m, и одно двукратное с.з. $\lambda_{0\mu}$ оператора L_0. Расмотрение таких контуров обусловлено структурой обычного тригонометрического ряда Фурье в экспоненциальной форме, который на самом деле является рядом со скобками.

Обозначим через R_λ и $R_{0\lambda}$ резольвенты операторов L и L_0, соответственно. Пусть

$$S_m(f,x) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_m} R_\lambda f\, d\lambda, \sigma_m(f,x) \equiv S_{0m}(f,x) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_m} R_{0\lambda} f\, d\lambda,$$

Известно [1, с. 92], что $S_m(f,x)$ есть частичная сумма биортогонального ряда Фурье функции $f(x)$ по к.ф. оператора L, содержащая слагаемые, соответствующие с.з. λ_ν, для которых $|\lambda_\nu| < r_m$, а $\sigma_m(f)$ есть частичная сумма порядка m обычного тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$ (частичная сумма ортогонального ряда Фурье функции $f(x)$ по к.ф. оператора L_0, содержащая слагаемые, соответствующие с.з. $\lambda_{0\nu} = (2\nu\pi i)^n$, для которых $|\nu| \leqslant m$), то есть

$$\sigma_m(f,x) := \sum_{k=-m}^{m} (f, e_k) e_k(x), \text{ где } (f, e_k) := \int_0^1 f(\xi) e^{-2k\pi i\xi}\, d\xi.$$

Введём следующие модули непрерывности

$$\omega(f,\delta)_p = \sup_{0<h\leqslant\delta}\left(\int\limits_0^{1-h}|f(t+h)-f(t)|^p\,dt\right)^{1/p}, \text{ где } 1\leqslant p<\infty,$$

$$\omega(f,\delta)_\infty = \sup_{0<h\leqslant\delta}\ \sup_{t\in[0,1-h]}\bigl|f(t+h)-f(t)\bigr|.$$

Под $L_\infty[0,1]$ понимаем пространство $C[0,1]$.

Предположим, что краевые условия (1) регулярны по Биркгофу в смысле определения [1, с. 66–67].

Положительная непрерывная в проколотой окрестности нуля функция $\Omega(\delta)$, для которой выполнено условие

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{\Omega(\gamma\delta)}{\Omega(\delta)} = \gamma^\rho \quad \text{для любого} \quad \gamma>0,$$

называется *правильно меняющейся функцией* (п.м.ф.) в нуле порядка $\rho\in\mathbb{R}$. При $\rho=0$ п.м.ф. называется *медленно меняющейся функцией* (м.м.ф.) в нуле. Теория п.м.ф. и м.м.ф. изложена в [5].

Введём следующие условия:

$$f(x)\in L_r[0,1], \quad p_1(x)\in L_q[0,1], \quad \frac{1}{q}+\frac{1}{r}=1, \quad 1\leqslant q\leqslant\infty, \tag{2}$$

$$\omega(f,\delta)_r = O(\Omega_1(\delta)), \quad \omega(p_1,\delta)_q = O(\Omega_2(\delta)), \quad \delta\to+0, \tag{3}$$

Будем говорить, что функции $\Omega_1(\delta)$ и $\Omega_2(\delta)$ удовлетворяют условию *медленного изменения* (МИ), если существует интервал $(0,\varepsilon_0)$, на котором

(а) $\Omega(\delta)$ есть м.м.ф. в точке 0;

(б) $\Omega(\delta)$ является монотонно неубывающей функцией и обладает свойством $\Omega(\delta)\to 0$ при $\delta\to+0$;

(в) для любого $\gamma>0$ справедливо $\Omega(\delta^\gamma)\sim\Omega(\delta)$ при $\delta\to+0$, то есть существуют константы $C_1>0$ и $C_2>0$ такие, что

$$C_1\Omega(\delta)\leqslant\Omega(\delta^\gamma)\leqslant C_2\Omega(\delta).$$

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* (2) *и* (3), *а функции* $\Omega_1(\delta)$ *и* $\Omega_2(\delta)$ *удовлетворяют условию МИ. Если, к тому же, выполняются ещё условия*

$$\ln m\,\Omega_1\left(\frac{1}{m}\right)\Omega_2\left(\frac{1}{m}\right)\to 0,\ \ \Omega_1\left(\frac{1}{m}\right)H_q(\Omega_2,m)\to\infty \ \textit{при} \quad m\to\infty,$$

где

$$H_q(\Omega, m) := \left(\int\limits_{1/m}^{1} \frac{1}{\xi} \Omega^q(\xi)\, d\xi \right)^{1/q},$$

то для любого компакта $K \subset (0,1)$ *имеет место равносходимость*

$$\lim_{m\to\infty} \|\Psi_m(x)\|_{C(K)} = 0, \tag{4}$$

где $\Psi_m(x) = S_m(f,x) - \sigma_m(f,x)$, *и справедливы следующие оценки:*

$$\|\Psi_m(x)\|_{C(K)} \leqslant C(f,p_1,K) \left(\ln m\, \Omega_1\left(\frac{1}{m}\right) \Omega_2\left(\frac{1}{m}\right) + \right.$$
$$\left. + \Omega_1\left(\frac{1}{m}\right) H_q(\Omega_2, m) + \Omega_1\left(\frac{1}{m}\right) + \Omega_2\left(\frac{1}{m}\right) \right),\ m \gg 1.$$

В частности, если

$$\omega(f,\delta)_r = O\left(\frac{1}{\ln^\alpha 1/\delta}\right), \quad \omega\big(p_1,\delta\big)_q = O\left(\frac{1}{\ln^\beta 1/\delta}\right), \quad \delta \to +0, \tag{5}$$

то теорема равносходимости принимает наиболее простой вид.

Теорема 2. *Если выполняются условия* (2), (5) *и* $\alpha + \beta > 1$, *то для любого компакта* $K \subset (0,1)$ *имеет место равносходимость* (4) *и справедливы следующие оценки при* $m \gg 1$*:*
— *в случае* $\beta q = 1$ *и* $(1 \leqslant q < \infty)$

$$\|\Psi_m(x)\|_{C(K)} \leqslant C(f,p_1,K) \left(\frac{\ln m}{\ln^{\alpha+\beta} m} + \frac{\big(\ln\ln m\big)^{1/q}}{\ln^\alpha m} + \frac{1}{\ln^\beta m} \right),$$

— *а в остальных случаях* ($\beta q \neq 1$ *и* $1 \leqslant q < \infty$ *или* $q = \infty$)

$$\|\Psi_m(x)\|_{C(K)} \leqslant C(f,p_1,K) \left(\frac{\ln m}{\ln^{\alpha+\beta} m} + \frac{1}{\ln^\alpha m} + \frac{1}{\ln^\beta m} \right). \tag{6}$$

Литература

1. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы / М.А. Наймарк. — М. : Наука, 1969. — 528 с.

2. Рыхлов В.С. Скорость равносходимости для дифференциальных операто ров с ненулевым коэффициентом при $n-1$-й производной / В.С. Рыхлов // Дифференц. уравнения. — 1990. — Т. 26, № 6. — С. 975-–989.

3. Rykhlov V.S. Equiconvergence rate in terms of general moduli of continuity for differential operators / V.S. Rykhlov // Results in Mathematics. — 1996. — V. 29. — P. 153–168.

4. Ломов И.С. Оценки скорости сходимости и равносходимости спектраль ных разложений обыкновенных дифференциальных операторов / И.С. Ломов // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Матем. Мех. Инф. — 2015. — Т. 15, № 4. — С. 405–418.

5. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. Пер. с анл. / Е. Сенета. — М.: Наука. Физматлит, 1985. — 144 с.

О КОРРЕКТНОСТИ НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

К.Б. Сабитов (Стерлитамак, Стерлитамакский филиал Уфимского университета науки и технологий, Уфа, Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН)
sabitov_fmf@mail.ru

В связи с изучением краевых задач для уравнений смешанного типа, в частности, задачи Трикоми, для уравнения

$$yu_{xx} + u_{yy} = 0,$$

возник интерес к изучению эллиптических, параболических и гиперболических уравнений, вырождающихся на части границы области задания таких уравнений. Статья М.В. Келдыша [1], опубликованная в 1951 году, положила начало к целому направлению изучения краевых задач для вырождающихся дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка и выше. В монографиях М.М. Смирнова [2], О.А. Олейник, Е.В. Радкевич [3] приведен достаточно полный обзор работ, посвященных изучению граничных задач (Дирихле, Неймана и других) для дифференциальных уравнений с частными производными с неотрицательной характеристической формой, задачи Коши для вырождающихся гиперболических и параболических уравнений. В работах [3, с. 16], [4] отмечены и нерешенные проблемы. Одной из них является изучение начально–граничных задач для вырождающихся параболических уравнений, в частности, для уравнения теплопроводности. Интерес изучения краевых задач для таких уравнений не угасает. Примером является новая работа [5], где показано, что в теории набега длинных волн на

© Сабитов К.Б., 2025

воде на пологий берег возникает волновое уравнение вырождающееся на всей границе области задания.

Рассмотрим уравнение

$$Lu = t^n u_{xx} - x^m u_t - bx^m t^n u = 0, \tag{1}$$

где n, m, b – вещественные постоянные, в четверти

$$D = \{(x,t) \mid t > 0,\ x > 0\}$$

и будем изучать корректность постановки начально – граничной задачи в этой области в зависимости от параметров n, m и b.

Если ввести новую функцию по формуле

$$v = e^{\frac{b}{n+1}t^{n+1}} u(x,t), \tag{2}$$

то функция $v(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1) при $b = 0$. Поэтому в дальнейшем будем исследовать начально – граничную задачу для уравнения (1) при $b = 0$. Затем по формуле (2) построим решения поставленных задач для уравнения (1) при $b \neq 0$.

Задача 1. *Пусть $n > -1$ и $m > -2$. Найти в области D ограниченную функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую условиям:*

$$u(x,t) \in C(\overline{D}) \cap C^{2,1}_{x,t}(D); \tag{3}$$

$$Lu(x,t) \equiv 0, \ \ (x,t) \in D; \tag{4}$$

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \varphi(x), \ \ x \geqslant 0; \tag{5}$$

$$u(x,t)\Big|_{x=0} = 0, \ \ t \geqslant 0, \tag{6}$$

где $\varphi(x)$ – заданная непрерывная и ограниченная функция, $\varphi(0) = 0$.

Задача 2. *Пусть $n > -1$ и $m \leqslant -2$. Найти в области D ограниченную функцию, удовлетворяющую условиям* (3) – (5).

Отметим, что в постановке задачи 2 граница $x = 0$ области D освобождается от граничного условия (6), как и в работе Келдыша М.В. [1]. Ранее уравнения типа (1) при $n > 0$ и $m = 0$ изучались в работах Нахушева А.М. [6, с. 52 – 57], Pagani C.D. [7] в ограниченной области в связи с обоснованием корректности постановки начально–граничных задач.

В данной статье, следуя работам [1, 3, 8] исследуются на корректность постановки задач 1 и 2 в зависимости от значений показателей степени вырождения n и m уравнения (1) на прямых $t = 0$ и $x = 0$.

1. Построено в явном виде решения задачи 1 при всех $n > -1,\ n \neq 0$ и $m > -2,\ m \neq 0$ как сумма ряда по ортогональной системе функций Бесселя в пространстве $L_2[0, l]$ с весом x^m. Единственность решения задачи 1 доказана на основании свойства полноты построенной системы собственных функций. Приведено обоснование сходимости ряда в классе функций (2).

2. Построено интегральное представление решения задачи 1 при всех $n > -1$, $n \neq 0$ и $m > -2$, $m \neq 0$ с обоснованием сходимости в классе функций (2). Единственность решения задачи 1 доказана на основании принципа экстремума и метода барьерных функций.

3. При $n \leqslant -1,\ m > -2$ показана некорректность задачи 1. В этом случае построенные частные решения $u_\mu(x, t)$ при $t \to 0$ или $\mu \to \infty$ стремятся к бесконечности.

4. При $n > -1$ и $m = -2$ исследована задача 2. Для решения этой задачи получено интегральное представление.

5. При $n > -1$ и $m < -2$ решение задачи 2 построено в виде интегрального представления. Единственность решения этой задачи при $m \leqslant -2$ установлена методами максимума и барьерных функций.

Литература

1. Келдыш М.В. О некорректрых случаях вырождения уравнений эллиптического типа / М.В. Келдыш. // Доклад АН СССР. 1951. — Т. 77. — № 2. — С. 181–183.

2. Смирнов М.М. Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения / М.М. Смирнов. — М.: Наука, 1966. — 292 с.

3. Олейник О.А. Уравнения с неотрицательной характеристической формой / О.А. Олейник, Е.В. Радкевич. — М.: Изд-во МГУ, 2010. — 360 с.

4. Kohn J.J. Degenerate elliptic-parabolic equations of second order / J.J. Kohn, L. Nirenberg // Comm. Pure Appl. Math. 1967. — V. 20. — P. 797–872.

5. Доброхотов С.Ю. Униформизация уравнений с граничным вырождением бесселева типа и квазиклассические асимптотики / С.Ю. Доброхотов, В.Е. Назайкинский // Матем. заметки. — 2020. — Т. 107. — Вып. 5. — С. 780–786.

6. Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных / А.М. Нахушев. — М.: Наука, 2006. — 287 с.

7. Pagani C.D. On the parabolic equation $(sgnx)x^p u_y - u_{xx} = 0$ and a related one / C.D. Pagani. // Ann. mat. pura ed appl. 1974. — V. 99. — № 4. — P. 333–339.

8. Сабитов К.Б. О корректности постановки началь- но-граничной задачи для вырождающегося уравнения теплопроводности / К.Б. Сабитов, А.Р. Зайнулов // Матем. заметки. — 2024. — Т. 115. — Вып. 2. — С. 230–244.

О НЕКОТОРЫХ СПЕЦИАЛЬНЫХ ПОЛИНОМАХ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯХ К ХАУСДОРФОВЫМ ПРИБЛИЖЕНИЯМ

Е.Х. Садекова (Москва, НИЯУ МИФИ)
vetka.08@mail.ru

Фиксируем числа $\delta \in (0,\pi)$ и $n \in \mathbb{N}$. Пусть $\mathcal{I}_{n,\delta}$ — множество таких тригонометрических полиномов $T(x)$ порядка $n \in \mathbb{N}$, что $|T(x)| \leqslant 1$ при $\delta \leqslant |x| \leqslant \pi$, и на интервале $(-\delta,\delta)$ существуют такие три точки $x_1 < x_2 < x_3$, что $T(x_1) > 1$, $T(x_2) < -1$, $T(x_3) > 1$. Для полинома $T \in \mathcal{I}_{n,\delta}$ положим

$$M(T) = \sup\{\min\{T(x_1), -T(x_2), T(x_3)\}\},$$

где супремум берется по всем тройкам точек $x_1 < x_2 < x_3$ указанного типа из интервала $(-\delta,\delta)$. Обозначим

$$\tilde{M} = \sup\{M(T) : T \in \mathcal{I}_{n,\delta}\}.$$

Требуется среди всех полиномов $T \in \mathcal{I}_{n,\delta}$ найти тот полином $T_n(\delta;x)$, у которого величина $M(T_n(\delta;\cdot))$ совпадает с $\tilde{M}$.

Теорема 1. *Пусть $n \geqslant 2$, $\pi/n < \delta < \pi$. Тогда существует, причем единственный, полином $T_n(\delta;x) \in \mathcal{I}_{n,\delta}$, такой, что выполняется равенство $M(T_n(\delta;\cdot)) = \tilde{M}$. Этот полином обладает следующими свойствами:*

1. *$T_n(\delta;x)$ — четный полином;*
2. *$\|T_n(\delta;\cdot)\| = \tilde{M}$;*
3. *на отрезке $[0,\delta]$ полином $T_n(\delta;x)$ имеет два участка монотонности, а именно, возрастает от своего минимального значения $T_n(\delta;0) = -\tilde{M}$ до своего максимального значения $\tilde{M}$, а затем убывает от $\tilde{M}$ до значения $T_n(\delta;\delta) = 1$;*

© Садекова Е.Х., 2025

4. *на отрезке $[\delta, \pi]$ полином $T_n(\delta; x)$ имеет $n-1$ участков монотонности, на каждом из которых он изменяется от 1 до -1 или от -1 до 1, именно, начиная с точки $x = \delta$ он убывает от 1 до -1, затем возрастает от -1 до 1 и т.д., заканчивая точкой $x = \pi$, в которой $T_n(\delta; \pi) = (-1)^{n+1}$.*

Тригонометрический полином $T_n(\delta; x)$ из теоремы 1 (о его построении см. [1]) называется *«пробным» полиномом порядка n с параметром δ* и используется при доказательстве теоремы 2.

Пусть $\mathcal{M}$ — класс 2π-периодических ограниченных (вообще говоря, многозначных) функций. Хаусдорфовым расстоянием $H(f, g)$ между функциями f и g, принадлежащими классу $\mathcal{M}$, называется расстояние Хаусдорфа–Минковского между их дополненными графиками $F(f)$ и $F(g)$, т.е.

$$H(f, g) := H(F(f), F(g)).$$

Будем говорить, что дополненный график функции f содержит график тригонометрического полинома, если существует тригонометрический полином T такой, что $F(T) \subset F(f)$. Пусть $HE_n(f)$ суть наименьшие уклонения фиксированной функции $f \in \mathcal{M}$ от тригонометрических полиномов порядка не выше $n \in \mathbb{N}$ в метрике Хаусдорфа–Минковского, а $\Omega(f)$ — колебание функции $f \in \mathcal{M}$.

Теорема 2. *Для функции $f \in \mathcal{M}$, дополненный график которой содержит график тригонометрического полинома, при всех натуральных $n > N(f)$ справедлива оценка*

$$HE_n(f) < \frac{1}{n} \log(n\, \Omega(f)) + \frac{4}{n}.$$

Ранее В.А. Поповым и Бл. Сендовым [2] было показано, что для любой функции $f \in \mathcal{M}$ верна оценка

$$HE_n(f) \leqslant \frac{\log n}{n}(1 + \varepsilon_n(f)),$$

где $\varepsilon_n(f) \to 0$ при $n \to \infty$, и что множитель $1+\varepsilon_n(f)$ при этом нельзя заменить на $c + \varepsilon_n(f)$, где $c < 1$.

Литература

1. Садекова Е.Х. Об одной задаче для чётного тригонометрического полинома, наименее уклоняющегося от нуля / Е.Х. Садекова // Системы компьютерной математики и их приложения: межвузовский сборник научных трудов — 2024. — Т. 25. — С. 273–278.

2. Сендов Бл., Попов В.А. Точная асимптотика наилучшего приближения алгебраическими и тригонометрическими многочленами в метрике Хаусдорфа / Бл. Сендов, В.А. Попов // Матем. сб. — 1972. — Т. 89, № 1. — С. 138–147.

ПРОСТРАНСТВА ФУНКЦИЙ БЕСКОНЕЧНОМЕРНОГО АРГУМЕНТА И УНИТАРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУПП

В.Ж. Сакбаев (Москва, ИПМ им. М.В. Келдыша)
fumi2003@mail.ru

Исследуются меры на сепарабельном гильбертовом пространстве E, инвариантные относительно таких групп преобразований, как группа сдвигов вдоль бездивергентных векторнных полей. Получены унитарные представления указанных групп в пространстве $H = L_2(E, \lambda, \mathbb{C})$ квадратично интегрируемых по инвариантной мере функций. Найдены подгруппы, представления которых непрерывны в сильной операторной топологии, и найдены инвариантные подпространства, сужения на которые представлений групп сильно непрерывны [1].

Исследованы диссипативные полугруппы сжатий, описывающих усреднения случайных преобразований, и их генераторы. Определены аналоги пространств Соболева и пространств гладких функций и исследованы их вложения. Получены аналоги предельных теорем для композиций случайных преобразований.

Получен критерий сильной непрерывности в пространстве H квадратично интегрируемых по трансляционно инвариантной мере функций полугруппы $\mathbf{U_D}$ сверток с центрированной гауссовской мерой $\gamma_{\mathbf{D}}$ на пространстве E.

Теорема 1. *Полугруппа* $\mathbf{U_D}(t),\ t \geqslant 0$, *сильно непрерывна в пространстве* H *тогда и только тогда, когда оператор* $\sqrt{\mathbf{D}}$ *ядерный.*

Самосопряженный оператор Лапласа-Вольтерра $\mathbf{\Delta}$ в пространстве функций бесконечномерного аргумента задается с помощью введения на пространстве последовательностей $E = \ell_2$ трансляционно инвариантной конечно-аддитивной меры λ. Полугруппа $e^{t\mathbf{\Delta}},\ t \geqslant 0$, порождаемая оператором Лапласа-Вольтерра в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ квадратично интегрируемых по мере λ функций, сглаживает произвольную функцию так, что любая функция из пространства образов $\bigcup\limits_{t>0} e^{t\mathbf{\Delta}}(\mathcal{H}) \equiv C^{\infty}_{\mathbf{\Delta}}$ обладает производной любого

© Сакбаев В.Ж., 2025

порядка по любому базисному направлению, лежащей в пространстве $\mathcal{H}$ (см. [2]).

Пространство Соболева $W^1_{2,\Delta}$ вводится как область определения замыкания квадратичной формы $K_\Delta(u) = -(\mathbf{\Delta} u, u),\ u \in C^\infty_\Delta$.

Теорема 2. *Пусть* $\mathbf{D}$ *– неотрицательный ядерный оператор в пространстве* H *такой, что* $\sqrt{\mathbf{D}}$ *является ядерным. Тогда пространство* $W^1_{2,\Delta}$ *плотно в пространстве* H*, а пространство* $W^2_{2,\Delta}$ *является областью определения генератора полугруппы* $\mathbf{U_D}(t),\ t \geqslant 0$.

В общем случае среди «бесконечно дифференцируемых» функций из пространства $C^\infty_{\mathbf{\Delta}}$ существуют разрывные. Найдено инвариантное относительно полугруппы $e^{t\mathbf{\Delta}},\ t \geqslant 0$, сепарабельное подпространство $\mathcal{H}_0$ пространства H такое, что любая функция из образа $\bigcup\limits_{t>0} e^{t\mathbf{\Delta}}(\mathcal{H}_0)$ является непрерывной.

Пусть $\mathbf{D}$ – неотрицательный оператор в пространстве E. Введем пространства Соболева

$$W^l_{2,\mathbf{D}^a}(E) = \{u \in H : \partial^l_j u \in H\ \forall\ j\ : \sum_{j=1}^n d^a_j \|\partial^l_{e_j} u\|^2_H < +\infty\}$$

где $\{e_j\}$ – ортонормированный базис собственных векторов оператора $\mathbf{D}$, $a > 0$, $l \in \mathbf{N}$.

Теорема 3. *Пусть* $\mathbf{D}$ *– неотрицательный невырожденный оператор в пространстве* E *такой, что* $\mathbf{D}^\gamma$ *является ядерным при некотором* $\gamma > 0$*. Пусть* $l \in \mathbb{N}$.

Если $b \geqslant l\alpha + \gamma$ *для некоторого* $\alpha \in [\gamma, +\infty)$*, то* $C^\infty_{\mathbf{D}^\alpha}(E) \subset W^l_{2,\mathbf{D}^b}(E)$.

Если, кроме того, $\alpha \geqslant 2\gamma$*, то пространство* $C^\infty_{\mathbf{D}^\alpha}(E)$ *плотно в пространстве* $W^l_{2,\mathbf{D}^b}(E)$.

Если условия теоремы 3 нарушены, то пространство $C^\infty_{D^a}(E)$ может не быть вложено в пространство $W^1_{2,\mathbf{D}}(E)$; пространство $C^\infty_{D^a}(E)$ может не быть плотно в пространстве $W^1_{2,\mathbf{D}}(E)$.

Литература

1. Sakbaev V.Zh. Flows in Infinite-Dimensional Phase Space Equipped with a Finitely-Additive Invariant Measures / V.Zh. Sakbaev // Mathematics. — 2023. — V. 11, No 5. — P. 1161.

2. Busovikov V.M. Sobolev spaces of functions on Hilbert space endowed with shift-invariant measures and approximations of semigroups / V.M. Busovikov, V.Zh. Sakbaev // Izvestiya Mathematics. — 2020. — V. **84**, No 4. — P. 694–721.

О ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ ЗНАЧЕНИЙ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ РИМАНА И РОДСТВЕННЫХ С НЕЙ ФУНКЦИЙ В НАТУРАЛЬНЫХ ТОЧКАХ[1]

Т.А. Сафонова (Архангельск, САФУ)
t.Safonova@narfu.ru

Символом $\beta(s)$ обозначим бета-функцию Дирихле, а символами $\zeta(s)$, $\lambda(s)$ и $\eta(s)$ - дзета-функцию Римана и родственные с ней функции, определяемые равенствами

$$\beta(s)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^s},\qquad \zeta(s)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^s},$$

$$\lambda(s)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k-1)^s}=(1-2^{-s})\zeta(s),\ \eta(s)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^s}=(1-2^{1-s})\zeta(s).$$

В работе методами спектральной теории обыкновенных дифференциальных операторов устанавливается справедливость некоторых тождеств для определённых линейных комбинаций чисел $\beta(2n)$, $\zeta(2n+1)$, $\lambda(2n+1)$, $\eta(2n+1)$ и $\beta(2n+1)$, $\zeta(2n)$, $\lambda(2n)$, $\eta(2n)$, где $n\in\mathcal{N}$, а именно справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *При $m=1,2,\dots$ справедливы равенства*

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{(-1)^{n-1}}{(2m-2n)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2(m-n)}\beta(2n)=\frac{1}{2(2m-1)!}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{x^{2m-1}}{\sin x}dx,$$

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{(-1)^{n-1}\pi^{2(m-n)}}{(2m-2n+1)!}\zeta(2n+1)=-\frac{\pi^{2m+1}}{(2m+1)!}\ln 2+$$

$$+\frac{2^{2m+1}}{(2m+2)!}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{(2m+2)\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2m+1}x+\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^{2m+2}-\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2m+2}}{\sin^2 x}dx,$$

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{(-1)^{n-1}}{(2m-2n)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2(m-n)}\lambda(2n+1)=\frac{1}{2(2m)!}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2m}-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^{2m}}{\sin x}dx,$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12-21-00128).

© Сафонова Т.А., 2025

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{(-1)^{n-1}\pi^{2(m-n)+1}}{(2m-2n+1)!}\eta(2n-1)=\frac{2^{2m-1}}{(2m)!}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{x^{2m}}{\sin^2 x}dx,$$

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{(-1)^{m-n}}{(2m-2n+1)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2(m-n)+1}\beta(2n)+\lambda(2m+1)=\frac{(-1)^m}{2(2m)!}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{x^{2m}}{\sin x}dx,$$

$$\sum_{n=0}^{m}\frac{(-1)^{m-n}\pi^{2(m-n)}}{(2m-2n)!}\eta(2n+1)+\zeta(2m+1)=\frac{(-1)^m 2^{2m}}{(2m+1)!}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{x^{2m+1}}{\sin^2 x}dx.$$

Теорема 2. *При* $m=1,2,\ldots$ *справедливы равенства*

$$\sum_{n=0}^{m}\frac{(-1)^n}{(2m-2n)!}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2n}\beta(2n+1)=0,$$

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{(-1)^{n-1}}{\pi^{2n}(2m-2n+1)!}\zeta(2n)=\frac{m}{(2m+1)!},$$

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{(-1)^{n-1}}{(2m-2n)!}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2n}\lambda(2n)=\frac{1}{2(2m-1)!},$$

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{(-1)^{n-1}}{\pi^{2n}(2m-2n+1)!}\eta(2n)=\frac{1}{2(2m+1)!},$$

$$\sum_{n=0}^{m-1}\frac{(-1)^{m-n}}{(2m-2n-1)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2(m-n)-1}\beta(2n+1)+\lambda(2m)=0,$$

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{(-1)^{m-n}\pi^{2(m-n)}}{(2m-2n)!}\eta(2n)+\zeta(2m)=\frac{(-1)^{m-1}\pi^{2m}}{2(2m)!}.$$

Некоторые из приведённых выше тождеств были установлены ранее другими авторами, а другие - новы.

ИНВАРИАНТЫ НА КЛАССАХ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ЖЕСТКИХ ФРЕЙМОВ[1]

В.В. Севостьянова (Самара, Самарский университет)
berlua@mail.ru

Пусть $\mathbb{H}^d$ — евклидово (унитарное) пространство размерности d над полем $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ (соотв. $\mathbb{C}$).

Определение 1. *Конечный набор векторов $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ в пространстве $\mathbb{H}^d$ будем называть фреймом, если существуют константы $0 < a \leqslant b < \infty$, такие, что для всех $\mathbf{x} \in \mathbb{F}^d$,*

$$a\|\mathbf{x}\|^2 \leqslant \sum_{j=1}^{n} |\langle \mathbf{x}, \varphi_j \rangle|^2 \leqslant b\|\mathbf{x}\|^2.$$

Фреймы находят широкое применение в анализе сигналов, обработке изображений, кодировании и восстановлении данных, квантовой теории информации и теории сжатых измерений.

Если $a = b$ в определении 1, то такие фреймы называются *a-жесткими.* 1-жесткие фреймы будем называть *фреймами Парсеваля.*

Введем на множестве фреймов различные классы эквивалентности.

Определение 2. *Фреймы $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ и $\{\psi_i\}_{i=1}^n$ называются унитарно эквивалентными, если существует унитарное преобразование $\mathbf{U}$, такое, что $\psi_i = \mathbf{U}\varphi_i$, $\forall i$.*

Хорошо известно, что матрицы Грама двух систем векторов $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ и $\{\psi_i\}_{i=1}^n$ совпадают тогда и только тогда, когда эти системы унитарно эквивалентны. Тогда унитарно эквивалентные фреймы однозначно определяются $\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle$, $i \leqslant j$.

Определение 3. *Будем говорить, что два фрейма Парсеваля $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ и $\{\psi_i\}_{i=1}^n$ перестановочно унитарно эквивалентны, если существует перестановка $\sigma \in S_n$, для которой фреймы $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ и $\{\psi_{\sigma(i)}\}_{i=1}^n$ унитарно эквивалентны.*

Рассмотрим классы фреймов, являющихся перестановочно унитарно эквивалентными. В работах [1,2] найдены инвариантные функции, разделяющие перестановочно унитарные классы эквивалентности в общем положении.

[1] Работа выполнена в рамках реализации Программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2024-1456).

© Севостьянова В.В., 2025

Определение 4. *Фреймы* $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^n$ *и* $\Psi = \{\psi_i\}_{i=1}^n$ *называются проективно унитарно эквивалентными, если существует унитарное преобразование* $\mathbf{U}$ *и числа* $\alpha_i \in \mathbb{F}$, $|\alpha_i| = 1$, *для которых* $\psi_i = \alpha_i \mathbf{U}\varphi_i$.

Инвариантами на проективно унитарных классах эквивалентности являются так называемые m-произведения, т.е. произведения вида

$$\Delta(\varphi_{i_1}, \varphi_{i_2}, \ldots, \varphi_{i_m}) = \langle\varphi_{i_1}, \varphi_{i_2}\rangle\langle\varphi_{i_2}, \varphi_{i_3}\rangle \ldots \langle\varphi_{i_m}, \varphi_{i_1}\rangle.$$

В работе [3] показано, что фреймы в $\mathbb{H}^d$ — проективно унитарно эквивалентны тогда и только тогда, когда совпадают все их m-произведения.

Определение 5. *Фреймы Парсеваля* $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^n$ *и* $\Psi = \{\psi_i\}_{i=1}^n$ *называются проективно-перестановочно унитарно эквивалентными, если существуют унитарное* $\mathbf{U}$, $\sigma \in S_n$ *и* $\alpha_i \in \mathbb{F}$, $|\alpha_i| = 1$, *для которых* $\psi_i = \alpha_i \mathbf{U}\varphi_{\sigma(i)}$.

В докладе пойдет речь об инвариантах на проективно-перестановочно унитарных классах эквивалентности фреймов Парсеваля. В частности, будут показаны полиномиальные функции, постоянные на таких классах, которые в общем положении разделяют проективно-перестановочно унитарные классы эквивалентности фреймов Парсеваля.

Литература

1. Севостьянова В.В. Инварианты на классах эквивалентности жестких фреймов / В.В. Севостьянова // Математика и теоретические компьютерные науки. — 2023. — Т. 1, № 3. — С. 46–58.

2. Севостьянова В.В. Инварианты на перестановочно унитарных классах эквивалентности фреймов Парсеваля / В.В. Севостьянова // Мат. заметки. — 2024. — Т. 116, вып. 4. — С. 582–596.

3. Abdollahi A. Frame Graphs / A. Abdollahi, H. Najafi // Linear and Multilinear Algebra. — 2018. — V. 66, iss. 6. — P. 1229–1243.

ПРОБЛЕМЫ МОТИВАЦИИ СТУДЕНТОВ

А.М. Сергеева (Москва, НИУ «МЭИ»)
sergeevaam@mpei.ru

Проблемы мотивации студентов в изучении высшей математики являются актуальной темой для образовательной среды. Они могут быть связаны с различными факторами, включая индивидуальные

© Сергеева А.М., 2025

особенности студентов, педагогические подходы, организацию учебного процесса и восприятие самой дисциплины.

- **Отсутствие практической значимости:** Демонстрация прикладных задач, использование кейс-методов.
- **Сложность материала:** Пошаговое усложнение, применение мультимедиа.
- **Отсутствие внутренних мотивов:** Развитие любознательности, стимулирование исследовательской активности.
- **Неэффективные педагогические подходы:** Геймификация, проектное обучение.
- **Негативный опыт:** Атмосфера поддержки, повторение базовых тем.
- **Недостаточная вовлеченность:** Дискуссии, метод перевернутого класса.
- **Неоптимальная организация процесса:** Ревизия планов, смешанное обучение.

Эти проблемы требуют комплексного подхода и учета индивидуальных потребностей студентов.

Литература

1. Филимонов А.В. Мотивационные аспекты обучения высшей математике в вузах / А.В. Филимонов // Вестник высшего образования. — 2021.

2. Иванова Н.А. Формирование интереса к математике через практико-ориентированные задачи / Н.А. Иванова // Педагогика и методика. — 2019.

3. Rogova A.M. The transformation of educational goals in the student's subjective purpose / A.M. Rogova, E.A. Ginsberg // Vestnik of Tomsk State Pedagogical University. — 1999. Т. 7(16). — С. 75–76.

4. Сергеева А.М. Понятие саморегуляции у студентов / А.М. Сергеева // Достижения науки и образования. — 2017. — С. 38-40.

НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМ ВЫРОЖДЕНИЕМ

С.Н. Сидоров (Уфа, Уфимский государственный нефтяной технический университет)
stsid@mail.ru

Рассмотрим уравнение смешанного типа

$$Lu = \begin{cases} u_{xx} - t^n u_t - bu = 0, & t > 0, \\ u_{xx} - (-t)^m u_{tt} - bu = 0, & t < 0, \end{cases} \tag{1}$$

в прямоугольной области $D = \{(x,t) | \, 0 < x < l, \, -\alpha < t < \beta\}$, где $n > 0$, $m > 0$, $l > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ и b – заданные действительные числа и следующие начально-граничные задачи.

Задача 1. *Пусть* $0 < m < 1$. *Найти функцию* $u(x,t)$, *удовлетворяющую следующим условиям:*

$$u(x,t) \in C(\overline{D}) \cap C_x^1(\overline{D}) \cap C_x^2(D_+) \cap C^2(D_-); \tag{2}$$

$$\lim_{t \to 0+0} t^n u_t(x,t) = \lim_{t \to 0-0} u_t(x,t); \tag{3}$$

$$Lu(x,t) \equiv 0, \quad (x,t) \in D_+ \cup D_-; \tag{4}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad -\alpha \leqslant t \leqslant \beta; \tag{5}$$

$$u(x,-\alpha) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{6}$$

где $\varphi(x)$ *– заданная достаточно гладкая функция,* $D_+ = D \cap \{t > 0\}$, $D_- = D \cap \{t < 0\}$.

Задача 2. *Пусть* $1 < m < 2$. *Найти функцию* $u(x,t)$, *удовлетворяющую условиям (2), (4) – (6) и*

$$\lim_{t \to 0+0} t^n u_t(x,t) = \lim_{t \to 0-0} (-t)^{m-1} u_t(x,t), \quad 0 \leqslant x \leqslant l.$$

Задача 3. *Пусть* $m = 1$. *Найти функцию* $u(x,t)$, *удовлетворяющую условиям (2), (4) – (6) и*

$$\lim_{t \to 0+0} t^n u_t(x,t) = \lim_{t \to 0-0} \frac{u_t(x,t)}{\ln(-t)}, \quad 0 \leqslant x \leqslant l.$$

Как и в работах М.В. Келдыша [1] и О.А. Олейник, Е.В. Радкевич [2] для уравнения (1) линия $t = 0$ является характеристикой

© Сидоров С.Н., 2025

степенного вырождения уравнения, что затрудняет постановку краевых задач. Здесь показана корректность постановки задач 1 – 3 при различных $0 < n < 1$ и $0 < m < 2$. Когда $n \geqslant 1$ или $m \geqslant 2$ поставленные задачи для уравнения (1) становятся некорректными.

Задача 1 при $n = 0$ и $m = 0$ впервые была изучена в работах К.Б. Сабитова [3, 4]. В работах [5, 6] изучены начально-граничные задачи для трехмерного уравнения параболо-гиперболического типа (1) при $n \leqslant 0$ и $m = 0$.

В настоящей работе, используя идеи работ [3 – 6], для каждой из поставленных задач установлен критерий единственности решений. Решения задач построены в явной форме в виде сумм рядов по системе собственных функций соответствующей одномерной спектральной задачи. При обосновании сходимости построенных рядов возникают малые знаменатели, затрудняющие сходимость этих рядов. В связи с этим для доказательства равномерной сходимости рядов установлены оценки об отделенности от нуля малых знаменателей с соответствующей асимптотикой, которые позволили доказать существование регулярного решения.

Литература

1. Келдыш М.В. О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа / М.В. Келдыш // Докл. АН ССР. — 1951. — Т. 77, № 2. — С. 181–183.

2. Олейник О.А. Уравнения с неотрицательной характеристической формой / О.А. Олейник, Е.В. Радкевич. — М. : Изд-во МГУ, 2010. — 360 с.

3. Сабитов К.Б. Задача Трикоми для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольной области / К.Б. Сабитов // Матем. заметки. — 2009. — Т. 86, вып. 2. — С. 273–279.

4. Сабитов К.Б. Прямые и обратные задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа / К.Б. Сабитов. — М. : Наука, 2016. — 272 с.

5. Sabitov K.B. Initial-boundary problem for a three-dimensional inhomogeneous equation of parabolic-hyperbolic type / K.B. Sabitov, S.N. Sidorov // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2020. — Vol. 41, № 11. — P. 2257–2268.

6. Sidorov S.N. Three-dimensional initial-boundary value problem for a parabolic-hyperbolic equation with a degenerate parabolic part / S.N. Sidorov // Azerbaijan Journal of Mathematics. — 2022. — Vol. 12, № 1. — P. 49–67.

ОБ ОДНОМ ТИПЕ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ ДЛЯ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Ю.С. Солиев (Москва, МАДИ)
su1951@mail.ru

Рассмотрим сингулярный интеграл

$$If = I(f;x) = \int_{-1}^{1}(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}\frac{f(t)}{t-x}dt,$$

$$-1 < x < 1, \alpha > -1, \beta > -1, \tag{1}$$

понимаемого в смысле главного значения по Коши, где $f(x)$ — заданная плотность интеграла. Пусть

$$\omega_n(x) = \prod_{k=1}^{n}(x-x_k),\ \omega_n'(x) = n\prod_{k=1}^{n-1}(x-x_k^*),$$

$$x_k < x_k^* < x_{k+1}(k=\overline{1,n-1}).$$

Через $L_{2n-1}(x) = L_{2n-1}(f;x)$ обозначим интерполяционный полином типа Эрмита – Пала [1] степени $2n-1$ (n—четное), удовлетворяющий условиям

$$L_{2n-1}(x_k) = f(x_k)(k=\overline{1,n}),\ L_{2n-1}'(x_k^*) = f'(x_k^*)(k=\overline{1,n-1}).$$

Аппроксимируя плотность интеграла (1) полиномом $L_{2n-1}(x)$, получим квадратурную формулу

$$If = I(L_{2n-1}f;x) + R_nf = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\widetilde{A}_k(x) + \sum_{k=1}^{n-1} f'(x_k^*)\widetilde{B}_k(x) + R_nf, \tag{2}$$

где $\widetilde{A}_k(x) = I(A_k;x),\ \widetilde{B}_k(x) = I(B_k;x)$, а $R_nf = R_n(f;x)$ — остаточный член.

Коэффициенты $\widetilde{A}_k(x)$, $\widetilde{B}_k(x)$ вычисляются так же как в работе [2].

С помощью результатов работ [3]-[6] доказываются следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть $\omega_n(x) = (1-x^2)P_{n-1}'(x)$ ($n \geqslant 2$), где $P_{n-1}(x)$ — полином Лежандра степени $n-1$, $P_{n-1}(1) = 1$ и $L_{2n-1}'(-1) =$*

© Солиев Ю.С., 2025

$f'(-1)$. Если $f(x) \in C^{(r)}[-1;1]$ $(r \geqslant 2)$, $n \geqslant 2r+3$, то для остаточного члена квадратурной формулы (2) справедлива оценка

$$\|R_n f\|_C = O\left(n^{\frac{3}{2}-r}\omega\left(f^{(r)};\frac{1}{n}\right)\ln^2 n\right),$$

где $\omega(f;\delta)$ — модуль непрерывности $f(x)$ на $[-1;1]$.

Следствие. *Пусть в условиях теоремы 1 $f'(x) \in H_\alpha(M,[-1;1])$, $\frac{1}{2} < \alpha < 1$. Тогда $\|R_n f\|_C = O\left(n^{\frac{1}{2}-\alpha}\ln^2 n\right)$.*

Теорема 2. *Пусть $\omega_n(x) = T_n(x) = \cos n \arccos x$ — полином Чебышева первого рода и $f'(x) \in C[-1;1]$. Тогда*

$$\|R_n f\|_C = O\left(n^{-1}\omega\left(f';\frac{1}{n}\right)\ln^2 n\right).$$

Следствие. *Пусть в условиях теоремы 2 $f'(x) \in H_\alpha(M,[-1;1])$, $0 < \alpha < 1$. Тогда $\|R_n f\|_C = O\left(n^{-1-\alpha}\ln^2 n\right)$.*

Теорема 3. *. Пусть $x_k(k=\overline{1,n})$ — нули полинома Якоби $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, $\alpha > -1$, $\beta > -1$, а $x_k^*(k=\overline{1,n})$ — нули полинома $F_n(x) = \frac{(1-x^2)(P_n^{(\alpha,\beta)}(x))''}{\alpha+\beta+2}$. Если $f'(x) \in C[-1;1]$, то справедлива оценка*

$$|R_n(f;x)| = (1-x)^{-1-\alpha}(1+x)^{-1-\beta}O\left(\omega\left(f';\frac{1}{n}\right)\ln n\right).$$

Полученные результаты переносятся на гиперсингулярные интегралы.

Литература

1. Pal L.G. A new modification of the Hermite – Fejer interpolation / L.G. Pal //Analysis Mathematica, 1975, № 1, 197–205.

2. Солиев Ю.С. О порядке сходимости квадратурных процессов с кратными узлами для сингулярного интеграла с ядром Коши / Ю.С. Солиев // Материалы ВВМШ. Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2024, 314—317.

3. Eneduanya S.A.N. On the convergence of interpolation polynomials / S.A.N. Eneduanya // Analysis Mathematica, 1985, № 11, 13—22.

4. Eneduanya S.A.N. On the modified Hermite interpolation polynomials /S.A.N. Eneduanya // Demonstratio Mathematica., 1982, vol. XV, № 4, 1135—1146.

5. Шешко М.А. О сходимости квадратурных процессов для сингулярного интеграла / М.А. Шешко // Изв. вузов. Матем. —- 1976. № 12. —- С. 108—118.

6. Szabo V.E.S. A Generalization of Pal Interpolation. IY the Jacobi Case / V.E.S. Szabo // Acta Mathematica Hungarica, 1997, vol. 74, № 4, 287—300.

НЕСАМОПЕРЕСЕКАЮЩИЕСЯ И НЕСПРЯМЛЯЕМЫЕ ПУТИ НА ПЕРИОДИЧЕСКИХ ГРАФАХ

Р.Е. Солонченко (Белгород, БГТУ)
solonchenko@bsuedu.ru

Численно исследуется специальный случайный процесс $\mathbf{r}(t)$, $t \in \mathbb{N}_+ = \{0, 1, 2, 3, ...,\}$ случайных блужданий с самоограничениями траекторий на периодических связных графах Γ размерности $d = 2, 3$. Здесь $\mathbf{r}(t)$ — вектор-функция, которая принимает значения на периодической геометрической дискретной структуре, получаемой в результате погружения периодического графа в соответствующее ему евклидово пространство $\mathbb{R}^d$. Рассматриваются два варианта самоограничений: 1) отсутствие самопересечений траекторий, 2) обладание траекториями т.н. свойства неспрямляемости (см., например, [1]). В первом случае, траектории $\mathbf{r}(t)$ таковы, что $\mathbf{r}(t) \neq \mathbf{r}(s)$ для любых пар $\{t, s\} \subset \mathbb{N}_+$. Во втором случае, для каждой траектории процесса, кроме требования несамопересечения, требуется, чтобы $\|\mathbf{r}(t), \mathbf{r}(s)\| > 1$ для всех пар $\{t, s\} \subset \mathbb{N}_+$, $|t - s| > 1$. Здесь символом $\| \cdot \|$ обозначено расстояние на графе Γ такое, что для любой пары вершин $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ графа Γ расстояние $\|\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2\|$ равно длине кратчайшего пути на графе Γ, соединяющего эти две вершины.

Процесс случайного блуждания $\mathbf{r}(t)$, $t \in \mathbb{N}_+$ изучается с целью исследования проблемы вычисления числа путей фиксированной длины с указанными ограничениями на кристаллических решетках. В свою очередь, решения такой задачи связано с проблемой статистической физики, относящейся к описанию расположения длинных линейчатых молекул полимерного материала (см. [2]) в рамках дискретизированного фазового пространства.

Определение распределения вероятностей случайного процесса $\mathbf{r}(t)$, $t \in \mathbb{N}_+$ полностью определяется следующими правилами. Из начальной вершины первый шаг траектория $\mathbf{r}(t)$ осуществляет в любую из смежных с ней вершин на графе равновозможным образом

© Солонченко Р.Е., 2025

с вероятностью s^{-1}, где s — степень вершины графа Г. На каждом последующем шаге траектория $\mathbf{r}(t)$ в момент времени $t \in \mathbb{N}_+$ совершает переход в момент времени $(t+1)$ равновозможным образом в любую из вершин, смежных с вершиной $\mathbf{r}(t)$, которые являются допустимыми с точки зрения указанных выше ограничений. Таким образом, вероятность такого перехода в любую из допустимых вершин равна l^{-1}, l — число допустимых вершин. Если же траектория попадает в тупик, то есть $l = 0$, то часть траектории отрезается начиная с последнего момента времени t_1, в котором $l_1 > 1$. После чего, траектория для $t > t_1$ строится посредством ее перехода в любую из $(l_1 - 1)$ допустимых вершин, которые получаются исключением из всей из совокупности той вершины, продолжением траектории в которую привело к тупику. Если и при таком продолжении траектория пришла к тупику, то процедура повторяется с выбором какой-нибудь новой вершины из числа $(l_1 - 2)$ вершин и т.д. Если же в результате перебора всех l_1 вершин, допустимых в момент времени, траектория $\mathbf{r}(t)$ все равно каждый раз приходила в тупик, то происходит повторная процедура обрезания всей той части траектории перед моментом времени t_1, в которой число допустимых вершин равно 1. В результате, находится следующий предыдущий момент времени $t_2 < t_1$, когда число допустимых вершин $l_2 > 1$. Траектория продолжается с момента времени t_2 по описанному выше алгоритму. Доказано следующее утверждение.

Теорема. *Любая траектория с ограничениями типа 1) и 2) может быть продолжена неограниченным образом.*

Справедливость этого утверждения позволяет говорить о корректно определенном случайном процессе $\mathbf{r}(t)$, $t \in \mathbb{N}$.

В предположении о том, что процесс при $t \to \infty$ стремится к эргодическому стационарному процессу оценивается число $N(n)$ всех возможных его траекторий длины n. Число всех таких траекторий равно $\prod_{j=1}^{n} l_j$. Ввиду стационарности асимптотически предельного случайного процесса $\ln\, l_t$ при $t \to \infty$, существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} \ln\, l_t = \alpha\,.$$

Тогда число $\ln N(n)$, выражается следующей асимптотически точной формулой $N(n) \sim e^{\alpha n}$.

Литература

1. Антонова Е.С. Неспрямляемые пути на периодических графах / Е.С. Антонова, Ю.П. Вирченко // Дифференциальные урав-

нения и их приложения : материалы международной конф. — Белгород : Политерра, 2013. — С. 16–17.
2. Жен П.-Ж. де Идеи скейлинга в физике полимеров / П.-Ж. де Жен. — М. : Мир, 1982. — 368 с.

ТЕОРЕМА О СРЕДНЕМ ДЛЯ ЖЕСТКОГО ЛАПЛАСИАНА НА ПРОИЗВОЛЬНЫХ СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ МНОЖЕСТВАХ

А.С. Спивак (Воронеж, ВГУ)
alexs1nger@yandex.ru

Данный доклад посвящен аналогу теоремы о среднем для гармонических функций в случае, когда вместо области пространства $\mathbb{R}^d$ рассматривается стратифицированное множество Ω и жесткий лапласиан вместо классического. Полученная теорема о среднем играет важную роль при обсуждении качественных свойств гармонических функций на стратифицированных множествах и в вопросах разрешимости на них задачи Дирихле.

Стратифицированное множество представляет собой связное подмножество $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, которое состоит из конечного числа гладких многообразий — страт σ_{kj} — различных размерностей k, специальным образом примыкающих друг к другу. Множество Ω разделим на Ω_0 и $\partial\Omega_0$ так, что Ω_0 — открытое, связное подмножество Ω, составленное из страт, $\overline{\Omega}_0 = \Omega$ и $\Omega = \Omega_0 \cup \partial\Omega_0$.

Пусть $\omega \subset \Omega$ таково, что каждое пересечение $\omega \cap \sigma_{kj}$ измеримо по Лебегу. Стратифицированная мера любого множества $\omega \in \Sigma$ определяется следующей формулой: $\mu(\omega) = \sum\limits_{\sigma_{kj}} \mu_k(\omega \cap \sigma_{kj})$, где μ_k — k-мерная мера Лебега.

Определим дивергенцию касательного векторного поля $\vec{F}$ в $\mathbb{R}^d$ в точке $X \in \sigma_{kj}$ следующим выражением:

$$\nabla \cdot \vec{F}(X) = \nabla_k \cdot \vec{F}(X) + \sum_{\sigma_{k+1i} \succ \sigma_{kj}} \vec{F}(X + 0 \cdot \vec{\nu}_i) \cdot \vec{\nu}_i,$$

где $\nabla_k \cdot \vec{F}$ — классическая k-мерная дивергенция сужения векторного поля $\vec{F}$ на σ_{kj}; $\vec{\nu}_i$ — единичная нормаль к σ_{kj} в точке X, направленная внутрь страты σ_{k+1i}, примыкающей к σ_{kj} (факт примыкания обозначается $\sigma_{k+1i} \succ \sigma_{kj}$). Обозначение вида $\vec{F}(X + 0 \cdot \vec{\nu}_i)$ служит для записи предельного значения вектора $\vec{F}(Y)$, когда Y, двигаясь

© Спивак А.С., 2025

по страте σ_{k+1i}, стремится к X. Множество векторных полей, для которых эта дивергенция существует, обозначается $\vec{C}^1(\Omega_0)$.

Пусть $u : \Omega_0 \to \mathbb{R}$ — скалярная функция. Если через ∇u обозначить векторное поле на Ω_0, составленное из градиентов сужений u на страты $\sigma_{kj} \subset \Omega_0$, и если $\nabla u \in \vec{C}^1(\Omega_0)$, то можно определить целый класс операторов вида $\nabla \cdot (p\nabla u)$, где p — стратифицированная константа, равная на каждой страте из Ω_0 либо тождественной единице, либо нулю. При этом всегда предполагается, что $p = 1$ на свободных стратах; так называются страты, не являющиеся граничными для других страт. Если $p \equiv 1$ на Ω_0, то соотвутствующий оператор $\Delta u = \nabla \cdot (\nabla u)$ называется жестким лапласианом.

Далее представлен результат для случая жесткого лапласиана, но на основе проведенных исследований можно вывести аналогичное утверждение для всех промежуточных операторов вышеуказанного вида.

Теорема 1. *Пусть $u : \Omega_0 \to \mathbb{R}$ — гармоническая функция ($\Delta u = 0$), а $S_R(X_0)$ ($X_0 \in \sigma_{kj} \subset \Omega_0$) — допустимая сфера. Тогда:*

1) Если $k > 1$, то

$$\int\limits_{S_R(X_0)} u(X)\, d\mu_R = \sum_{m\in I(X_0)} m \int\limits_{B_R^{m+1}(X_0)} \frac{u(X)}{r}\, d\mu,$$

где $r = |X - X_0|$ — расстояние от X_0 до X; $I(X_0)$ — множество размерностей страт, из которых состоит сфера. Нетрудно заметить, что эти размерности не меньше, чем $k-1$, но не больше $n-1$ (n — максимальная размерность страт, входящих в Ω). Отметим, что некоторые из них могут быть пропущены. $B_R^{m+1}(X_0)$ — $(m+1)$-мерный фрагмент шара $B_R(X_0)$, составленный из страт $\widetilde{\sigma}_{m+1,j}$ размерности $m+1$.

2) Если $k = 0$ или $k = 1$, то

$$u(X_0) = \frac{1}{l} \int\limits_{S_R(X_0)} u(X)\, d\mu_R - \sum_{m\in I(X_0)} \frac{m}{l} \int\limits_{B_R^{m+1}(X_0)} \frac{u(X)}{r}\, d\mu.$$

Литература

1. Покорный Ю. В. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю.В. Покорный, О.М. Пенкин, В.Л. Прядиев, А.В. Боровских, К.П. Лазарев, С.А. Шабров. — М. : Физматлит, 2005. — 272 с.

2. Ощепкова С.Н. Теорема о среднем для эллиптического оператора на стратифицированном множестве / С.Н. Ощепкова, О.М. Пенкин // Математические заметки. — 2007. — Т. 81, № 3. — С. 417–426.

ОБ ОЦЕНИВАНИИ ИНТЕРВАЛА ОХВАТА ДЛЯ НЕКОТОРЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ПО ВЫБОРОЧНОМУ РАЗМАХУ

А.В. Степанов (Санкт-Петербург, ВНИИМ им. Д.И. Менделеева)
stepanov17@yandex.ru

В работе рассмотрен вопрос об оценивании интервалов охвата [1] по коротким (5-15 значений) выборкам данных из непрерывных симметричных распределений. В частности, рассматривались семейство симметричных TSP (Two-Sided Power, двусторонних степенных) распределений [2], плотности которых описываются формулой:

$$f(x|x_0,r,p) = \begin{cases} \frac{p}{2r}\left(1+\frac{x-x_0}{r}\right)^{p-1}, & x_0-r<x\leqslant x_0, \\ \frac{p}{2r}\left(1-\frac{x-x_0}{r}\right)^{p-1}, & x_0\leqslant x<x_0+r \end{cases} \tag{1}$$

($p>0$, случай $p=1$ отвечает равномерному распределению, $p=2$ — треугольному); а также семейство обобщенных экспоненциальных распределений [3], плотности которых имеют вид

$$f(x|x_0,\sigma,\alpha) = \frac{\alpha}{2\lambda\sigma\Gamma(1/\alpha)}\exp\left(-\left|\frac{x-x_0}{\lambda\sigma}\right|^{\alpha}\right), \quad \lambda=\sqrt{\frac{\Gamma(1/\alpha)}{\Gamma(3/\alpha)}} \tag{2}$$

($\alpha,\sigma>0$, нормальное распределение является частным случаем семейства при $\alpha=2$, с ростом параметра α вид распределения становится схож с трапециевидным, а затем — с равномерным).

В качестве оценки интервала охвата, отвечающего уровню вероятности P_0, рассматривался отрезок вида $[c_1,c_2]=[\bar{x}-C_d d,\bar{x}+C_d d]$, где $\bar{x}$ — выборочное среднее, d — выборочная статистика, характеризующая меру разброса данных: среднеквадратическое отклонение S, размах R или иная (например, межквартильный размах IQR), а C_d — коэфиициент, полученный методом Монте-Карло, исходя из условия $P\left\{F(c_2)-F(c_1)\geqslant P_0\right\}=P_1$ (здесь F — функция распределения). Таким образом, предполагается, что рассматриваемый отрезок обеспечивает уровень вероятности охвата не менее P_0 (иными

© Степанов А.В., 2025

p	0.75	1	1.5	2	3	5	7
C_R	1.81	1.78	1.82	1.91	2.07	2.29	2.40
C_S	4.88	4.87	5.00	5.23	5.70	6.31	6.65

Таблица 1. C_R, C_S, $f \sim (1)$ ($n = 7$, $P_0 = 0.95$, $P_1 = 0.99$)

α	2	3	5	7	10
C_R	1.99	1.86	1.80	1.78	1.78
C_S	5.45	5.11	4.93	4.91	4.87

Таблица 2. C_R, C_S, $f \sim (2)$ ($n = 7$, $P_0 = 0.95$, $P_1 = 0.99$)

словами, содержит некоторый интервал охвата для данного уровня вероятности) с заданной вероятностью P_1. Величина C_d возрастает с ростом P_1, а также убывает с ростом длины выборки n, для каждого рассматриваемого распределения. Выше не ставится условие о том, что найденный отрезок $[c_1, c_2]$ содержит именно вероятностно-симметричный интервал охвата с центром в точке x_0 (вообще говоря, неизвестной), последнее условие является более сильным (и было рассмотрено отдельно).

Ниже в качестве примера приведены некоторые значения коэффициента C_d, когда d представляет собой выборочный размах ($d \equiv R$) или среднеквадратическое отклонение ($d \equiv S$) для распределений (1), (2) (Таблицы 1 и 2, соответственно), при $n = 7$.

Заметим, что в рассмотренных примерах обе оценки обеспечивают, в среднем, сопоставимую длину отрезка $[c_1, c_2]$.

При наличии выбросов в данных, в качестве оценки параметра центра x_0 предлагается использовать усеченное среднее, а в качестве оценки разброса — IQR (или иную робастную оценку).

Литература

1. Stoudt S. Coverage Intervals / S. Stoudt, A. Pintar, A. Possolo // Journal of Research of the National Institute of Standards and Technology. —2021. —126. —10.6028/jres.126.004.

2. Kotz S. Beyond Beta: Other Continuous Families of Distributions with Bounded Support and Applications / S. Kotz, J.R. Van Dorp — World Scientific Publishing, 2004.

3. Новицкий П.В. Оценка погрешностей результатов измерений / П.В. Новицкий, И.А. Зограф — Л.: Энергоатомиздат, 1991.

ОБ АППРОКСИМАЦИИ ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СЕМЕЙСТВОМ TSP ПРИ РЕШЕНИИ МЕТРОЛОГИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

А.В. Степанов, А.Г. Чуновкина
(Санкт-Петербург, ВНИИМ им. Д.И. Менделеева)
stepanov17@yandex.ru

Неопределенность u измерения величины x, которой приписано некоторое распределение вероятностей, при обработке результатов измерений обычно отождествляется с ее среднеквадратическим отклонением (СКО), а расширенная неопределенность U, как правило, вычисляется как произведение коэффициента охвата K и u, если данное распределение симметрично, т.е. ассоциируется с симметричным интервалом охвата вида $[v-Ku, v+Ku]$, где v — измеренное значение. Величина коэффициента охвата выбирается, исходя из требуемого уровня вероятности охвата P_0 (упоминая K или U, считаем данный уровень заданным).

Рассмотрен вопрос об аппроксимации некоторых непрерывных распределений семейством симметричных двусторонних степенных (TSP) распределений [1], плотности которых имеют вид

$$f_{TSP}(x|x_0, r, p) = \begin{cases} \frac{p}{2r}\left(1 + \frac{x-x_0}{r}\right)^{p-1}, & x_0 - r < x \leqslant x_0, \\ \frac{p}{2r}\left(1 - \frac{x-x_0}{r}\right)^{p-1}, & x_0 \leqslant x < x_0 + r, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

($p, r > 0$, при $p = 1$ распределение является равномерным, при $p < 1$ — двухмодальным). Искомыми параметрами при аппроксимации являются r, p (считаем, что центр x_0 совпадает для аппроксимирующего и аппроксимируемого распределений).

В качестве аппроксимируемых рассматривались следующие семейства распределений (f): нормальное, t-распределение, симметричное Бета-распределение (в частности, арксинусоидальное), трапециевидное, обобщенное экспоненциальное.

Были рассмотрены следующие критерии аппроксимации:

1) Равенство неопределенностей и расширенных неопределенностей (или, что то же самое, коэффициентов охвата) для f и f_{TSP}. В этом случае можем сформулировать

© Степанов А.В., Чуновкина А.Г., 2025

Утверждение: Параметры p, r для заданных u, $K = K(P_0)$ находятся из условий

$$\left\{ \begin{array}{c} \left(1 - \sqrt[p]{1 - P_0}\right) \sqrt{(p+1)(p+2)/2} - K = 0, \\ r = u\sqrt{(p+1)(p+2)/2}. \end{array} \right.$$

Например, для нормального распределения $N(0, u^2)$ пара (r, p) имеет вид $(2.810\,u, 2.505)$ при $P_0 = 0.95$, и $(3.526\,u, 3.512)$ при $P_0 = 0.99$.

2) Равенство неопределенностей или расширенных неопределенностей, при условии минимизации СКО ошибки аппроксимации функции распределения или расстояния полной вариации $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - f_{TSP}(x)|\, dx$.

Для сравнения и выбора различных аппроксимаций использовались такие критерии качества, как близость соответствующих функций и плотностей распределения и вероятность охвата, вычисленная для аппроксимируемого распределения, с использованием интервала охвата, построенного для аппроксимирующего TSP-распределения.

Вопрос аппроксимации распределений, в частности, актуален при решении задачи трансформирования распределений [2] (для аппроксимации распределений входных параметров), когда уравнение измерения допускает линеаризацию, а выходное распределение — приемлемую, с точки зрения практических приложений, аппроксимацию семейством TSP, т.е.

$$y = \sum_1^n a_i\, TSP(x_{0,i}, r_i, p_i) \sim TSP\left(\sum_1^n a_i x_{0,i}, \sum_1^n |a_i| r_i, p_y\right),$$

$$p_y = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + \frac{8\left(\sum_1^n |a_i| r_i\right)^2}{\sum_1^n a_i^2 u_i^2}} - 3\right), \quad u_i^2 = \frac{2r_i^2}{(p_i+1)(p_i+2)}.$$

Литература

1. Kotz S. Beyond Beta: Other Continuous Families of Distributions with Bounded Support and Applications / S. Kotz, J.R. Van Dorp — World Scientific Publishing, 2004.

2. Evaluation of measurement data — Supplement 1 to the «Guide to the expression of uncertainty in measurement» — Propagation of distributions using a Monte Carlo method / Joint Committee for Guides in Metrology, JCGM 101:2008

О КОРРЕКТНОСТИ ОДНОЙ АЛЬФА-МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ РАСТВОРОВ ПОЛИМЕРОВ[1]

М.И. Струков, А.В. Звягин (Воронеж, ВГУ)

mixail.strukov12@gmail.com, zvyagin.a@mail.ru

На $\Omega \in \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$ с достаточно гладкой границей, и на временном интервале $[0, T]$, $T > 0$, рассматривается задача (см. [1]–[5]):

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \mu_0 \Delta v - \mu_1 \frac{\partial \Delta v}{\partial t} - 2\mu_1 \mathrm{Div}\left(\sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial \mathcal{E}(v)}{\partial x_i}\right) -$$

$$-2\mu_1 \mathrm{Div}\Big(\mathcal{E}(v) W_\rho(v) - W_\rho \mathcal{E}(v)\Big) -$$

$$-\frac{\mu_2}{\Gamma(1-\lambda)} \mathrm{Div} \int_0^t (t-s)^{-\lambda} \mathcal{E}(v)\big(s, z(s; t, x)\big)\, ds + \nabla p = f, \qquad (1)$$

$$z(\tau; t, x) = x + \int_t^\tau v\big(s, z(s; t, x)\big)\, ds, \quad t, \tau \in [0, T], \quad x \in \Omega, \qquad (2)$$

$$v = (I - \alpha^2 \Delta) u, \quad \mathrm{div}\, v(t, x) = 0, \quad t \in [0, T], \quad x \in \Omega, \qquad (3)$$

$$v|_{t=0} = v_0, \qquad v|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0. \qquad (4)$$

Здесь $v(x,t) = (v_1, ..., v_n)$ — вектор–функция скорости движения частицы среды, u — вектор–функция модифицированной скорости движения частицы жидкости, $p = p(x,t)$ — функция давления, $f = f(x,t)$ — функция плотности внешних сил, $z(\tau, t, x)$ — траектория частицы среды, указывающая в момент времени τ расположение частицы жидкости, находящейся в момент времени t в точке x, $\mu_0, \mu_1 > 0$, $\mu_2 \geqslant 0$— некоторые константы. $\alpha > 0$ — скалярный параметр. $\mathcal{E}(v) = (\mathcal{E}_{ij}(v))_{j=1,\dots,n}^{i=1,\dots,n}$, $\mathcal{E}_{ij}(v) = \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial v_j}{\partial x_i}\Big)$ — тензор скоростей деформаций. $W(v) = (W_{ij}(v))_{j=1,\dots,n}^{i=1,\dots,n}$, $W_{ij}(v) = \dfrac{1}{2}(\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j} - \dfrac{\partial v_j}{\partial x_i})$ — тензор завихренности. $W_\rho(v) = \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x-y) W(y) dy$, где $\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — гладкая функция с компактным носителем, такая что $\int_{\mathbb{R}^n} \rho(y) dy = 1$ и $\rho(x) = \rho(y)$ для x и y с одинаковыми евклидовыми нормами.

Определение 1. *Пусть $f \in L_2(0, T; V^{-1})$ и $v_0 \in V^1$. Через $\Delta_\alpha : V^\beta \to V^{\beta-2}$ обозначим оператор $\Delta_\alpha = PI + \alpha^2 A$. Слабым решением*

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 23-71-10026).

© Струков М.И., Звягин А.В., 2025

начально–краевой задачи (1)–(4) называется функция $v \in W_1 = \{v : v \in L_\infty(0,T,V^1), v' \in L_2(0,T,V^1)\}$, *удовлетворяющая при любом* $\varphi \in V^3$ *и при почти всех* $t \in (0,T)$ *равенству*

$$\int_\Omega \frac{\partial v}{\partial t}\varphi\,dx - \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n (\Delta_\alpha^{-1}v)_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\,dx + \mu_0 \int_\Omega \nabla v : \nabla\varphi\,dx +$$

$$+\mu_1 \int_\Omega \nabla(\frac{\partial v}{\partial t}) : \nabla\varphi\,dx - \mu_1 \int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\,dx -$$

$$-\mu_1 \int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx +$$

$$+2\mu_1 \int_\Omega (\mathcal{E}(v)W_\rho(v) - W_\rho(v)\mathcal{E}(v)) : \nabla\varphi dx +$$

$$+\frac{\mu_2}{\Gamma(1-\lambda)}\Big(\int_0^t (t-s)^{-\lambda}\mathcal{E}(v)(s, z(v)(s;t,x))\,ds, \mathcal{E}(\varphi)\Big) = \langle f, \varphi \rangle$$

Теорема 1. *Пусть* $f \in L_2(0,T;V^{-1})$ *и* $v_0 \in V^1$. *Тогда начально–краевая задача (1)–(4) имеет хотя бы одно слабое решение* $v \in W_1$.

Литература

1. Звягин А.В. Разрешимость задачи термовязкоупругости для альфа-модели Лере / А.В. Звягин // Известия вузов. Математика. — 2016. Н. 10. — С. 70–75.

2. Звягин А.В. Разрешимость альфа-моделей гидродинамики / А.В. Звягин, В.Г. Звягин, Д.М. Поляков // Вестник ВГУ. Серия: Физика, Математика. — 2016. — Н. 2. — С. 72–93.

3. Звягин А.В. Оптимальное управление с обратной связью для альфа-модели Лере и альфа-модели Навье-Стокса / А.В. Звягин // Доклады Академии Наук. — 2019. — Т. 486, Н. 5. — С. 527–530.

4. Zvyagin A.V. Weak solvability and convergence of solutions for the fractional Voigt-α model of a viscoelastic medium / A.V. Zvyagin// Russian Mathematical Surveys. — 2019. — V. 74, H. 3. — С. 549–551.

5. Звягин А.В. О слабой разрешимости математической модели движения растворов полимеров, учитывающей память среды / А.В. Звягин, М.И. Струков // Дифференциальные уравнения. — 2024. — Т. 60, Н. 10. — С. 1422–1428.

ЗАДАЧА АВАЛОС—ТРИДЖИАНИ ДЛЯ ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ СИСТЕМЫ ОСКОЛКОВА НЕНУЛЕВОГО ПОРЯДКА И СИСТЕМЫ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ[1]

Т.Г. Сукачева, А.О. Кондюков (Великий Новгород, НовГУ)
Tamara.Sukacheva@novsu.ru, s181303@std.novsu.ru

Пусть Ω – ограниченная область в $R^n, n = 2, 3$, с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. Пусть $u = \mathrm{col}(u_1, u_2, ..., u_n)$ есть $n-$мерный вектор скорости $n = 2, 3$, скалярная функция p - давление, а вектор $w = \mathrm{col}(w_1.w_2, ..., w_n)$ - вектор смещения тела, занимающего область Ω_s, и погруженного в жидкость, занимающую область Ω_f.

Таким образом, $\Omega = \Omega_s \cup \Omega_f, \overline{\Omega}_s \cup \overline{\Omega}_f = \partial\Omega_s \equiv \Gamma_s$, – общая граница Ω_s и Ω_f. Внешнюю границу области Ω_f обозначим через Γ_f .

Исследуется задача Авалос - Триджиани [1], [2] для случая, когда жидкость в Ω_f является линеаризованной моделью несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина-Фойгта ненулевого порядка [3]. Рассматриваемая математическая модель определяется системой

$$(1 - \lambda\nabla^2)u_t - \eta\nabla^2 u - (\tilde{u} \cdot \nabla)u - (u \cdot \nabla)\tilde{u} + \nabla p = 0 \qquad (1)$$

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R} \times \Omega_f \equiv \Omega_{\mathbb{R}f},$$

$$\nabla \cdot u = 0, \qquad \forall (t, x) \in \Omega_{\mathbb{R}f}, \qquad (2)$$

$$w_{tt} - \nabla^2 w + w = 0 \qquad \forall (t, x) \in \mathbb{R} \times \Omega_s \equiv \Omega_{\mathbb{R}s} \qquad (3)$$

с краевыми условиями

$$u|_{\Gamma_f} \equiv 0, \qquad \forall (t, x) \in \mathbb{R} \times \Gamma_f \equiv \Gamma_{\mathbb{R}f}, \qquad (4)$$

$$u \equiv w_t, \qquad \forall (t, x) \in \mathbb{R} \times \Gamma_s \equiv \Gamma_{\mathbb{R}s}, \qquad (5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} - \frac{\partial w}{\partial \nu} = p\nu \qquad \forall (t, x) \in \Gamma_{\mathbb{R}s} \qquad (6)$$

и начальным условием

$$(w(0, \cdot), w_t(0, \cdot), u(0, \cdot)) = (w_0, w_1, u_0) \in \mathbf{H}, \qquad (7)$$

[1] Работа выполнена в рамках решения задач проекта 253/ИЭИС-с «Математическое моделирование природных процессов» Новгородского государственного университета имени Ярослава Мудрого..

© Сукачева Т.Г., Кондюков А.О., 2025

где $\mathbf{H} = (H^1(\Omega_s))^n \times (L^2(\Omega_s))^n \times \mathcal{H}_f$ и $\mathcal{H}_f = \{f \in (L^2(\Omega_f))^n : \nabla \cdot f = 0$ in Ω_f в $[f \cdot \nu]|_{\Gamma_f} = 0\}$.

В системе (1), параметры λ и η характеризуют упругие и вязкие свойства жидкости соответственно, параметры β_l, $l = \overline{1, K}$ определяют время ретардации (запаздывания) давления, ν - единичный ветор нормали. Заметим, что вектор-функция $\tilde{u} = \mathrm{col}(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, ..., \tilde{u}_n)$ соответствует стационарному решению исходной системы [3]. Линейная система Осколкова в задаче Авалос-Триджиани (1)-(7) в случае $K = 0, \lambda = 0$, исследовалась в работах [1], [2], а при $K = 0, \lambda \neq 0$ в [4], [5]. Результаты данной работы обобщают результаты, полученные в [6].

Литература

1. Avalos G. Higher regularity of a coupled parabolic-hyperbolic fluid-structure interactive system / G. Avalos, I. Lasiecka, R. Triggiani // Georgian Mathematical Journal. — 2008. — Vol. 15, № 3. — P. 403–437.

2. Avalos G. Backward uniqueness of the s.c. semigroup arising in parabolic-hyperbolic fluid-structure interaction / G. Avalos, R. Triggiani // Differential Equations. — 2008. — Vol. 245. — P. 737–761.

3. Осколков А.П. Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина–Фойгта и Олдройта / А.П. Осколков // Тр. Матем. ин-та АН СССР. — 1988. — Т. 179. — С. 126–164.

4. Свиридюк Г.А. Задача Авалос – Триггиани для линейной системы Осколкова и системы волновых уравнений / Г.А. Свиридюк, Т.Г. Сукачева // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2022. — Т. 62 № 3. — С. 437–441.

5. Sukacheva T. G. The Avalos–Triggiani problem for the linear oskolkov system and a system of wave equaions. II / T. G. Sukacheva, G. A. Sviridyuk // Journal of Computational and Engineering Mathematics. — 2022. — Vol. 9, № 2. — C. 67–72.

6. Sukacheva T. G. The linearized Oskolkov system in the Avalos–Triggiani problem / T.G. Sukacheva, A.O. Kondyukov // Journal of Computational and Engineering Mathematics. — 2024. — Vol. 11, № 1. — P. 17–23.

НЕКОТОРЫЕ СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОПЕРАТОРОВ КЛАССА K(H)

Л.И. Сухочева (Воронеж, ВГУ)
l.suhocheva@yandex.ru

Т.Я. Азизовым введен и описан [1], [2] класс операторов **K(H)**, действующих в пространствах с индефинитной метрикой {K, <.,.>}. Согласно определения, ограниченный оператор B, действующий в пространстве Крейна {K, <.,.>}, принадлежит классу **H**, если у него есть хотя бы одна пара N_+ (максимального неотрицательного), N_-(максимального неположительного) инвариантных подпространств, и каждые такие подпространства N_+,N_- допускают разложения:

$N_+ = N^0\ [+] N^{++}$, $N_- = N^0\ [+] N^{--}$,

где N^0 — изотропное подпространство, $dim N^0 < \infty$, N^{++}— равномерно положительное, N_{--} — равномерно отрицательное подпространства. Будем говорить, что самосопряженный оператор A из **K(H)**, если существует самосопряженный оператор $B \in$ **H**, который коммутирует с A. Здесь и далее используется общепринятая «индефинитная» терминология и обозначение [2].

В [3] предложен новый критерий принадлежности оператора этому классу.

Обозначим:

$E(A)$ - замкнутую линейную оболочку корневых векторов оператора A;

$E_0(A)$ - замкнутую линейную оболочку собственных векторов оператора A.

Теорема 1. *Пусть A — самосопряженный оператор в пространстве Крейна $\{K, <\ .,.\ >\}$, в котором существует базис Рисса $\{f_i\}$,составленный из корневых векторов оператора A. Кроме того, $dim(E(A)/E_0(A)) < \infty$, и невещественный спектр оператора A состоит не более, чем из конечного числа собственных значений с учетом кратности. Тогда A будет оператором класса* ***K(H)***.

Далее рассмотрим вырожденное пространство Крейна.

Определение. Пространство K с индефинитной метрикой $< .,. >$ будем называть вырожденным пространством Крейна, если его изотропное подпространство K^0 будет конечномерным и фактор-пространство

© Сухочева Л.И. , 2025

$$\widehat{K} = K/K^0, \quad [\widehat{x}, \widehat{y}] =< x, y >, \widehat{x}, \widehat{y} \in \widehat{K}, \quad x \in \widehat{x}, y \in \widehat{y}$$
является пространством Крейна относительно метрики $[.,.]$.

Все выше перечисленные понятия и определения естественным образом переносятся на случай вырожденного пространства Крейна.

Теорема 2. *Пусть A — самосопряженный оператор в вырожденном пространстве Крейна $\{K, < .,. >\}$,тогда:*
- спектр оператора A будет вещественным за исключением конечного числа невещественных нормальных собственных значений;
- существует не более конечного числа вещественных собственных значений λ, которым отвечают вырожденные ядра $Ker(A-\lambda)$;
- $\sigma_p(A) \cap \mathbb{R}$ содержит не более, чем конечное число точек, которым соответствуют нетривиальные жордановы цепочки.

Заметим, что в вырожденном пространстве Крейна $\{K, < .,. >\}$ в отличие от пространства Понтрягина и пространства Крейна полнота системы корневых векторов компактного самосопряженного оператора $A \in \mathbf{K(H)}$ не гарантирует базисность системы [4].

Литература

1. Азизов Т.Я. Об инвариантных подпространствах коммутативных семейств операторов в пространстве с индефинитной метрикой / Т.Я. Азизов // Укр. мат. журн., – 1976. – 28, №3. – С. 293-299.

2. Азизов Т.Я., Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой / Т.Я. Азизов, И.С. Иохвидов. – М.: Наука, 1986. – 352 с

3. Сухочева Л.И. Новый критерий принадлежности оператора классу K(H) / Л.И. Сухочва // Известия высших учебных заведений. – 1997. – №10 (425). – С. 64-66.

4. Azizov T.Ya., Suhotcheva L.I. Linear Operator in Almost Krein Spaces / T.Ya. Azizov, L.I. Suhotcheva// Operator Theory: Advances and Applications – 2007. – Vol.175.

О СВОЙСТВАХ ЗВЁЗДНОЙ ВЫСОТЫ ДЛЯ РАСШИРЕННЫХ РЕГУЛЯРНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

Ю.Д. Теляковская (Москва)
jldtjldt@mail.ru

Определение звёздной высоты [1]:

- Регулярные выражения строятся на основе констант
  (0, 1) — обозначние нейтральных относительно объединения и

© Теляковская Ю.Д., 2025

конкатенации элементов, букв алфавита, с применением операций объединения ($\cup$), конкатенации ($\cdot$), звёзды Клини (*).

- Звёздная высота: $h(s) = 0$, $h(\sigma \cup \omega) = h(\sigma\omega) = \max\{h(\sigma), h(\omega)\}$, $h(\sigma^*) = h(\sigma) + 1$.

- Звёздная ысота множества — минимальная высота среди описывающих его выражений [2].

Доказаны утверждения:

1. **Операции обращения и гомоморфизмы:** Добавление $\mathrm{rev}(a_1a_2...a_n) = a_n...a_2a_1$ и $\gamma(\alpha\beta) = \gamma(\alpha)\gamma(\beta), \gamma(\epsilon) = \epsilon$ не меняет звёздную высоту. Доказательство основано на индуктивном переходе к выражениям без этих операций (замкнутость множества регулярных языков относительно этих операций см. [3]).

2. **Операция деления множеств (приведено другое доказательство):** $XY^{-1} = \{z|\exists y \in Y : zy \in X\}$ не меняет звёздную высоту. Доказательство основано на разборе структуры слов и сведению к объединению конечных множеств.

3. **Перестановочная с объединением операция:** Существует α, для которой $\alpha(x_1 \cup x_2) = \alpha(x_1) \cup \alpha(x_2)$, при добавлении которой звёздная высота уменьшается на 1. Также существуют операции, снижающие звёздную высоту любого регулярного множества до 0 или до заданного натурального числа k.

Выводы:

- Обращение, гомоморфизм и деление множеств не меняют звёздную высоту.

- Существуют операции, уменьшающие звёздную высоту.

- Доказана возможность понижения высоты до 0 (или до любого k) при помощи специальной операции.

- Полученные результаты дают понимание о звёздной высоте при расширении набора операций.

Литература

1. Eggan L.C. Transition graphs and the star-height of regular events / L.C. Eggan // Michigan Math. J. — 1963. V. 10. — P. 385–397.

2. Pin Jean-Eric. Open problems about regular languages, 35 years later / Jean-Eric Pin The Role of Theory in Computer Science. Essays Dedicated to Janusz Brzozowski, World Scientifc — 2017.

3. Berstel J., Perrin D., Reutenauer C. / J. Berstel, D. Perrin, C. Reutenauer //Codes and Automata. Encyclopedia of mathematics and its applications. — 2009.

ОБ ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫХ МНОЖЕСТВАХ В ТЕОРЕМЕ ГРИНА

Д.С. Теляковский (Москва, НИЯУ МИФИ)
dtelyakov@mail.ru

Согласно теореме Грина, если функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ в достаточно хорошей области $G \subset \mathbb{R}^2$ удовлетворяют некоторым условиям дифференцируемости, то выполнено равенство

$$\int_{\partial G^+} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

Например достаточно, предполагать, что область G односвязна и имеет кусочно гладкую границу, а функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывно дифференцируемы в замыкании $\overline{G}$.

П. Коэн [1], 1959, и далее Р. Феск [2], 1965, ослабили условия на $P(x,y)$ и $Q(x,y)$, достаточные для справедливости формулы Грина. Р. Феск показал, что $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ достаточно предполагать линейно непрерывными, т. е. непрерывными по x при каждом фиксированном y и по y при каждом фиксированном x, причём в точках некоторого исключительного множества можно не предполагать как линейную непрерывность $P(x,y)$ и $Q(x,y)$, так и существование у этих функций частных производных. В настоящей работе показано, что если в точках исключительного множества наложить некоторые условия на модули непрерывности функций $P(x,y)$ и $Q(x,y)$, то исключительное множество может быть более массивным (по Хаусдорфу), чем в теореме Р. Феска. Полученное условие аналогично доказанному Е.П. Долженко [3], 1963, достаточному условию того, что функция комплексного переменного, аналитическая вне некоторого множества E, на котором a priori не предполагается существование производной, особенности на E не имеет.

Как и в работах П. Коэна и Р. Феска в качестве областей здесь рассматриваются только прямоугольники R со сторонами, парал-

© Теляковский Д.С., 2025

лельными осям координат, прямоугольники предполагаются заполненными и замкнутыми.

Хаусдорфову (внешнюю) φ-меру множества E будем обозначать $H_\varphi(E)$, а хаусдорфову длину множества E — $H_1(E)$. В качестве функции $\varphi(t)$ будем брать выпуклый вверх нелипшицевый модуль непрерывности, т.е. такой модуль непрерывности для которого $\lim\limits_{t\to+0}\dfrac{\varphi(t)}{t}=+\infty$.

Если функция $f(z)$ определена в некоторой окрестности точки ζ и для некоторого $L_\zeta>0$ во всех достаточно близких к ζ точках z выполнено неравенство

$$|f(z)-f(\zeta)|\leqslant L_\zeta\varphi(|z-\zeta|),$$

то будем говорить, что функция $f(z)$ удовлетворяет *условию Гёльдера с функцией $\varphi(t)$ в точке ζ*.

Доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть R — прямоугольник на плоскости $\mathbb{R}^2$ и множества $E_j\subset R$, $j\in\mathbb{N}_0$, замкнуты. Пусть функции $P(z)$ и $Q(z)$ ограничены в R, линейно непрерывны на $R\setminus E_0$, имеют все частные производные первого порядка в каждой точке $\zeta\in G\setminus\left(\bigcup_0^\infty E_j\right)$ и выполнены условия:*

1°. $H_1(E_0)=0$.

2°. *Для каждого E_j, $j\in\mathbb{N}$, выполнено одно из соотношений:*

   i. если $H_1(E_j)<+\infty$, то функции P и Q линейно непрерывны в точках множества E_j;

   ii. если $H_1(E_j)=+\infty$, то найдётся возрастающий выпуклый вверх нелипшицевый модуль непрерывности $\varphi_j(t)$ для которого $H_{t\varphi_j(t)}(E_j)=0$ и в точках $\zeta\in E_j$ функции $P(z)$ и $Q(z)$ удовлетворяют условию Гёльдера с функцией $\varphi_j(t)$.

3°. *Выражение $\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}$ суммируемо в R (относительно плоской меры Лебега).*

Тогда для прямоугольника R верна формула Грина.

Для сокращения записи точки (x,y) будут иногда обозначаться z, $z=x+iy$.

Р. Феск предполагал выполнение условий 1°, $2°i$ и 3°. В работе [2] он построил, пример, показывающий, что условие того, что исключительное множество E имеет σ-конечную длину невозможно заменить предположением, что $H_{r^\alpha}(E) = 0$ при некотором $\alpha > 1$.

В настоящей работе построен пример, показывающий, что условие $2°ii$ на массивность исключительного множества по Хаусдорфу невозможно заменить предположением, что $H_{t\varphi_j(t)}(E_j) < +\infty$. Действительно, для произвольного выпуклого вверх нелипшицева модуля непрерывности $\varphi(t)$ в единичном квадрате S построено замкнутое множество $E \subset S$ конечной положительной $t\varphi(t)$-меры Хаусдорфа и функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ из класса Никольского–Гёльдера $H^\varphi(S)$, имеющие нулевой дифференциал на множестве $S \setminus E$, для которых

$$\int_{\partial S^+} P\,dx + Q\,dy \neq 0 = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

Литература

1. Cohen P.J. On Green's theorem / P.J. Cohen // Proc. Amer. Math. Soc. — 1959. — V. 10. — P. 109–112.

2. Fesq R.M. Green's formula, linear continuity, and Hausdorff measure / R.M. Fesq // Trans. Amer. Math. Soc. — 1965. — V. 118. — P. 105–112.

3. Долженко Е.П. О «стирании» особенностей аналитических функций / Е.П. Долженко // УМН. — 1963. — Т. 18, вып. 4 (112). — С. 135–142.

НЕРАВЕНСТВО ХАРНАКА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ (p,q)-ЛАПЛАСА РАВНОМЕРНО ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ НА ЧАСТИ ОБЛАСТИ[1]

Р.Н. Тихомиров (Владимир, ВлГУ)
romat81@bk.ru

Рассмотрим в ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^n$, где $n \geqslant 2$, эллиптическое уравнение

$$\operatorname{div}\left(\omega_\varepsilon(x)|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\right) = 0 \tag{1}$$

[1] Работа выполнена в рамках государственного задания ВлГУ (проект FZUN-2023-0004).

© Тихомиров Р.Н., 2025

с двухфазным кусочно-постоянным показателем $p(x)$ и неотрицательным весом ω_ε. Предполагается, что область D разделена гиперплоскостью $\Sigma = \{x:\ x_n = 0\}$ на части $D^{(1)} = D \cap \{x:\ x_n > 0\}$ и $D^{(2)} = D \cap \{x:\ x_n < 0\}$, и

$$p(x) = \begin{cases} q \text{ в } D^{(1)}, \\ p \text{ в } D^{(2)}, \end{cases} \qquad 1 < q < p, \tag{2}$$

а вес таков, что

$$\omega_\varepsilon(x) = \begin{cases} \varepsilon,\ x_n > 0, \\ 1,\ x_n < 0, \end{cases} \qquad \varepsilon \in (0,1]. \tag{3}$$

Для определения решения, введём класс функций

$$W_{\mathrm{loc}}(D) = \{u:\ u \in W^1_{1,\mathrm{loc}}(D),\ |\nabla u|^{p(x)}\omega_\varepsilon \in L^1_{\mathrm{loc}}(D)\},$$

где $W^1_1(D)$ — классическое пространство Соболева. Под решением уравнения (1) понимается функция $u \in W_{\mathrm{loc}}(D)$, для которой справедливо интегральное тождество

$$\int\limits_D \omega_\varepsilon(x)|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \cdot \nabla\varphi\, dx = 0 \tag{4}$$

на финитных пробных функциях $\varphi \in W_{\mathrm{loc}}(D)$.

Если $p = q = 2$, то для уравнения (1) отсутствие классического неравенства Харанака с постоянной, независящей от ε, установлено в работе [1], а работе [2] приведён аналог неравенства Харнака с постоянной не зависящей от ε.

Для формулировки результатов обозначим через B_R открытый шар радиуса R, где $R \leqslant 1$, с центром на Σ такой, что $B_{4R} \subset D$ и $M = 1 + \sup\limits_{D'} u$, где $D' \subset D$ какая-либо строго внутренняя подобласть области D, содержащая шар B_{4R} и $D^{(2)}_R = D^{(2)} \cap B_R$.

Для постоянных показателей p и q из (2) в работе [3] установлено отсутствие классического неравенства Харнака (3) в шарах с центром на разделяющей гиперплоскости Σ вслучае $\omega_\varepsilon(x) \equiv 1$ и приведён аналог неравенства Харнака, а работе [4] для уравнения (1) с весом из (3) получен аналог неравенства Харнака

$$\inf_{B_R} u + R \geqslant C \sup_{B^-_R} u, \tag{5}$$

где $B_R^- = \{x \in B_R : \ x_n < -\frac{R}{2}\}$ и постоянная C не зависит от ε.

Настоящее сообщение посвящено обобщению результата [4] для уравнения (1) с весом из (2) и

$$p - q = h > 0. \tag{6}$$

Теорема 1. *Пусть u — неотрицательное в шаре B_{4R} решение уравнения (1) и выполнено условие (6). Тогда существует положительные постоянные $\nu(p,q,h)$ и $K(n,p,q,h)$ такие, что справедливо неравенство*

$$\inf_{D_R^{(2)}} u + MR^\nu \geqslant K \sup_{D_R^{(2)}} u, \tag{7}$$

где $\nu = O(h)$ и $K \to \infty$ при $h \to 0$.

Оценка (7) является аналогом классического неравенства Харнака в полушаре $D_R^{(2)}$. Следствием оценок (5) и (7) является следующее утверждение

Теорема 2. *Пусть u — неотрицательное в шаре B_{4R} решение уравнения (1) и выполнено условие (6), то справедлива оценка*

$$\inf_{B_R} u + MR^\nu \geqslant K \sup_{D_R^{(2)}} u,$$

где ν и K имеют тот же смысл, что и в теореме 1.

Литература

1. Алхутов Ю.А. Об одном классе вырожающегося / Ю.А. Алхутов, Е.А. Хренова // Труды МИАН. — 2012. — Т. 278. — С. 7–15.

2. Алхутов Ю.А. Неравенство Харнака для одного класса вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка / Ю.А. Алхутов, Е.А. Хренова // Труды МИАН. — 2012. — Т. 278. — С. 7–15.

3. Алхутов Ю.А. О неравенстве Харнака для эллиптического (p,q)-лапласиана / Ю.А. Алхутов, М.Д. Сурначёв // Докл. РАН. — 2016. — Т. 470, No. 6. — С. 623–627.

4. Aliev M.J. Harnack Inequality for Elliptic (p, q)-Laplacian with Partially Muckenhoupt Weight / M.J. Aliev, Yu.A. Alkhutov, R.N. Tikhomirov // Journal of Mathematical Sciences. 2022. — V. 262. — P. 233–245.

ОПТИМИЗАЦИЯ СИСТЕМ ВЫСОКОЙ И БЕСКОНЕЧНОЙ РАЗМЕРНОСТИ

В.К. Толстых (Донецк, ДонГУ)
mail@tolstykh.com

Рассматриваются новые экстремальные методы первого порядка для минимизации целевых функций и функционалов $J(u)$. Управление $u \in R^n$ или $u(\tau) \in L_2(S)$, где τ — пространственно-временная переменная. Размерность n вектора u может быть высокой или бесконечной, когда управление — функция $u(\tau)$.

Рассмотрим метод коллинеарных градиентов (МКГ) [1] для управления $u \in R^n$:

$$u^{k+1} = u^k + b^k d^k, \quad b^k = \left(1 - \frac{\langle \nabla J(u^{k_*}), d^k \rangle}{\langle \nabla J(u^k), d^k \rangle}\right)^{-1}, \quad k = 0, 1 \ldots,$$

где $d^k = (u^{k_*} - u^k)$ — направление минимизации для которого градинты $\nabla J(u^k)$ и $\nabla J(u^{k_*})$ коллинеарные. Шаговый множитель $b^k \in R$ находится из предположения квадратичности одномерной функции $J(u^k + bd^k)$. В этих условиях шаг МКГ совпадает с шагом метода Ньютона с гессианом H:

$$b^k d^k = -H^{-1} \nabla J^k.$$

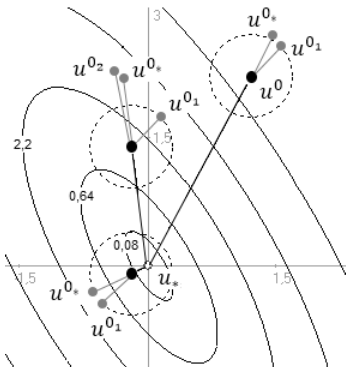


Рис. 1 Минимизация МКГ.

Приблизительное значение точки u^{k_*} можно найти в окрестности u^k подитерациями метода сопряжённых градиентов (решение системы n линейных уравнений в виде условия коллинеарности градиентов). Из-за вычислительных погрешностей в u^{k_*}, практическую реализацию МКГ следует отнести к семейству усечённых (truncated) методов Ньютона.

На рис. 1 показана суть метода на примере минимизации квадратичной функции при $n = 2$ из трёх начальных чёрных точек u^0. Серые точки — подитерации. После выбора d^k в окрестности u^0 (не более двух подитераций) потребовался всего один шаг к u_*, как и

© Толстых В.К., 2025

в методе Ньютона. Например, при $n = 1000$ МКГ требует 1–3 итерации с относительно небольшим количеством подитераций. Другие наглядные тесты минимизации как квадратичных, так и неквадратичных многоэкстремальных функций посредством МКГ в сравнении с другими экстремальными методами можно найти в [2].

Практическая реализация МКГ по скорости сходимости может немного уступать методу Ньютона второго опрядка. По сравнению с традиционными методами первого порядка, МКГ является очень экономичным по количеству вычислений J и ∇J благодаря формуле b^k квадратичного шага. МКГ не требует затратных вычислений шагового множителя посредством линейного поиска.

При $n \to \infty$ вычисление коллинеарности градиентов методом сопряжённых градиентов становится необоснованным. Зададим $d^k = -\overrightarrow{\alpha^k \nabla J^k}$, где стрелка означает векторизацию, а компоненты вектора $\alpha_i^k = |(u_i^{k_*} - u_i^k)/\nabla_i J^k|$ — это параметр регулирования направления спуска относительно градиента. Очевидно, что о совпадении с МКГ можно говорить только если $\nabla_i J^k \neq 0 \ \forall i, k$ и в случаях, когда МКГ делает шаги, удовлетворяющие $\alpha^k \in E_+^n$. Кроме этого, необходима эвристика для определения $(u_i^{k_*} - u_i^k)$.

Рассмотрим далее бесконечномерный вариант метода с ругулируемым направлением спуска (МРНС) для квадратичных (зачастую достаточно просто выпуклых) $J(u)$ [3–5]:

$$u^{k+1}(\tau) = u^k(\tau) + b^k \alpha(\tau) \nabla J(u^k; \tau), \quad k = 0, 1 \ldots$$

Здесь можно выбрать

$$\alpha(\tau) = \delta / \left| \nabla J(u^0; \tau) \right|, \quad \mathrm{sgn} \nabla J(u^0; \tau) = const \ \forall \tau,$$

где δ — положительное число, задающее глубину первого шага для обеспечения равномерного изменения функции $u^0(\tau)$ к $u^1(\tau)$.

Задача параметра α — это не формирование коллинеарности, что невозможно проконтролировать в бесконечномерном пространстве, а более слабое требование — формирование равномерной на S сходимости к $u_*(\tau)$. Шаговый множитель b^k, в отличии от МКГ, следует выбирать или методами линейного поиска, или адаптивными методами [6]. Отметим, что для определения $\nabla J \in L_2(S)$ особенно важно контролировать условия управляемости [7].

Увидеть различия между традиционным градиентным методом, когда $\alpha(\tau) = 1$, и МРНС можно на примере синтеза оптимального состояния v_* в задаче с простейшим параболическим уравнением [3]:

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_1} \big(v(x_a, t) - v_*(t)\big)^2 dt,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \quad (x,t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \tau \in (x_a, x_b) \times (t_0, t_1)\,.$$

Управление задано в правом граничном условии: $\lambda \frac{\partial v}{\partial x} = u$ на $S = x_b \times (t_0, t_1)$. На левой границе $\lambda \frac{\partial v}{\partial x} = q$ на $x_a \times (t_0, t_1)$, где q — заданный поток v.

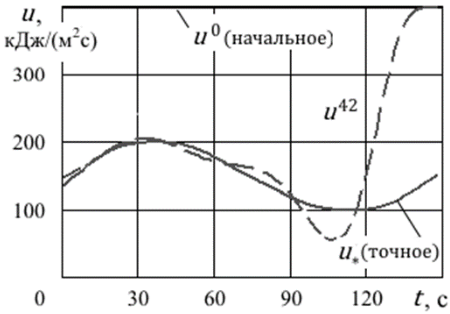


Рис.2 Оптимизация методом наискорейшего спуска

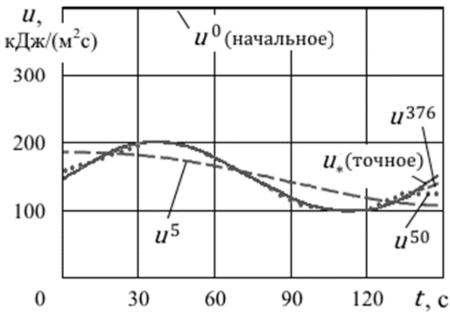


Рис. 3. Оптимизация МРНС.

На рис. 2 и 3 показаны результаты бесконечномерной оптимизации в виде сходимости управлений u^k к оптимуму u_* гадиентным методом наискорейшего спуска и МРНС, соответственно. Традиционный наискорейший спуск прекратил сходимость на итерации $k = 42$

с плохой неравномерной на S сходимостью. В тоже время МРНС с параметром $\alpha(t)$ обеспечил равномерное приближение и достиг визуально точное оптимальное значение $u_*(t)$.

Рассмотренные МКГ и МРНС можно использовать для эффективного решения высоко размерных и бесконечномерных задач оптимизации.

Литература

1. Tolstykh V.K. Collinear gradients method for minimizing smooth functions // SN Operations Research Forum. — 2023. — Vol. 4,20, No. 1. DOI: 10.1007/s43069-023-00193-9.

2.Толстых В.К. Метод коллинеарных градиентов // Wikipedia. — Электронные данные. Режим доступа к wiki: https://ru.wikipedia.org/wiki/ — (дата обращения 2.01.2025).

3. Толстых В.К. Прямой экстремальный подход для оптимизации систем с распределёнными параметрами. — Донецк: Юго-Восток, 1997. — 178 с.

4. Толстых В.К. О применении градиентного метода к задачам оптимизации систем с распределенными параметрами // Журн. вычисл. матем. и матем. физики — 1986. — Т. 26. — № 1. — С. 137–140.

5. Толстых В.К. Эффективный метод оптимизации физических процессов // Инженерно-физический журнал. — 2003. — Т. 76. — № 2. — С. 424-427.

6. Tolstykh V.K. Algorithms for Optimizing Systems with Multiple Extremum Functionals // Comput. Math. and Math. Phys. — 2024. — Vol. 64. — No. 3. — pp. 392–400.

7. Tolstykh V.K. Controllability of Distributed Parameter Systems // Comput. Math. and Math. Phys. — 2024. — Vol. 64. — No. 6. — pp. 1211–1223.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИФФУЗИИ ИНФОРМАЦИИ В СОЦИАЛЬНОЙ СЕТИ[1]

М.А. Толстых (Донецк, ДонГУ)
physicisto@yandex.ru

В социальных сетях информацией является уникальная публикация, которая распространяется от пользователя к пользователю путем репостов, пересылки, либо других форм взаимодействий, характерных для той или иной специфической интернет-реализации

[1] Исследование выполнено при финансовой поддержке Азово-Черноморского математического центра (Соглашение от 29.02.2024 № 075-02-2024-1446).

© Толстых М.А., 2025

социальной сети [1]. Распространение информации происходит под действием градиента информации, т.е. из областей, где информации больше, в области, где ее меньше. Передача информации между пользователями имеет случайный характер, аналогично диффузии молекул в среде. Вместо того, чтобы следить за каждым отдельным пользователем и его действиями, мы рассматриваем плотность информации — усредненную характеристику, показывающую среднее количество репостов на единицу расстояния в сети. Тогда для описания распределенного в пространстве динамического процесса диффузии информации предлагается следующая модель:

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}\right) + h(x)r(x,t)\theta(v(x,t)-\varepsilon).$$

Здесь x — это кибер-дистанция, представляющая собой кратчайший путь из дружеских связей от пользователя-источника информации к приемнику [2], $v(x,t)$ — плотность информации в точке x в момент времени t, определяет отношение количества репостов к расстоянию x, $p(x)$ — коэффициент диффузии информации, описывающий скорость проникания информации в сеть, θ — тета-функция Хевисайда. Свободный член $h(x)r(x,t)\theta(v(x,t)-\varepsilon)$ отвечает за работу пространственно-распределенного внутреннего источника информации. Функция $h(x)$ представляет собой количество пользователей, поделившихся информацией, на расстоянии x (пропускная способность кластера социальной сети). При этом на расстоянии $x = 0$ пропускная способность $h(x) = 1$, поскольку распространение информации начинается с одного пользователя. Затухающая функция $r(x,t)$ — скорость, с которой пользователи будут делиться информацией. Для учета анизотропии социальной сети параметр r зависит не только от t, но и от x, что означает разную скорость реакции пользователей на информацию на разном расстоянии. При этом параметры h и r начинают «работать» когда в точке x появляется достаточно значимая величина информации $v(x,t) \geqslant \varepsilon$, где ε — порог значимости информации.

Для предложенной модели предлагается спользовать граничные условия первого рода. На границе $x_a = 0$ (источник информации) $v(x_a,t) = 1$. Это означает, что в источнике информации плотность всегда равна единице (одна новость на данном расстоянии). На границе x_b (удаленная область) $v(x_b,t) = 0$. Это означает, что на большом расстоянии от источника плотность информации стремится к нулю. Это может моделировать ситуацию, когда информация не достигает удаленных частей сети, либо её влияние там пренебрежимо мало. Начальное условие соответствует отсутствию обсуждаемой новости в сети в момент $t = 0$: $v(x, 0) = 0$.

Для того чтобы предложенная модель диффузии отражала реальное распространение информации в социальной сети, необходима идентификация параметров данной модели на основании экспериментальных данных, что даст возможность оценивать и классифицировать кластеры социальной сети по идентифицированным параметрам.

Литература

1. Hu Y. Modeling for information diffusion in online social networks via hydrodynamics / Y. Hu, R.J. Song, M. Chen // IEEE Access. — 2017. — **5**. — P. 128–135.

2. Wang H. Modeling Information Diffusion in Online Social Networks with Partial Differential Equations / H. Wang, F. Wang, K. Xu // Springer Nature. — 2020.

ОПТИМАЛЬНАЯ ЭКСТРАПОЛЯЦИЯ МНОГОЧЛЕНОВ, ЗАДАННЫХ С ПОГРЕШНОСТЬЮ

Трембач А.А. (Екатеринбург, ИММ УрО РАН)
alex.trembach2015@yandex.ru

Исследуется задача оптимальной экстраполяции многочленов, заданных с погрешностью на компакте. Кратко приведем постановку этой задачи, пусть $\mathcal{P}_n$ — пространство многочленов степени не более n, K — компакт комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $C(K)$ — пространство непрерывных на K функций, $\mathfrak{R}$ — множество всех функционалов на $C(K)$. Тогда величина

$$U_n(K, \theta, z; \delta) := \sup\{|P_n(z) - \theta f_\delta| \,:\, P_n \in \mathcal{P}_n,\, f_\delta \in C(K),\\ \|P_n - f_\delta\|_{C(K)} \leqslant \delta\},$$

является погрешностью экстраполяции в точку z методом $\theta \in \mathfrak{R}$ многочленов степени не более чем n, приближенно заданных (с погрешностью δ) на компакте K.

В свою очередь нас будет интересовать метод с наименьшей погрешностью — *оптимальный метод экстраполяции* и, соответствен-

© Трембач А.А., 2025

но, его погрешность — *величина оптимальной экстраполяции*, которая определяется следующим образом

$$\mathcal{E}_n(K, z, \delta) := \inf \{U_n(\theta, z; \delta) \,:\, \theta \in \mathfrak{R}\}, \tag{1}$$

Задача состоит в вычислении (1), и является конкретным вариантом задачи оптимального восстановления, более подробную информацию можно найти в [1; 2]

Устанавливается взаимосвязь задачи оптимальной экстраполяции с задачей Чебышёва о многочлене, наименее уклоняющемся от нуля на компакте

$$\tau_n(K) := \inf \left\{ \|P_n\|_{C(K)} \,:\, P_n(z) = z^n + \sum_{k=0}^{n-1} p_k z^k,\, p_k \in \mathbb{C} \right\}.$$

Выписано точное решение задачи экстраполяции с отрезка $K = [-1, 1]$ на вещественную прямую $z \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$. Получено точное решение задачи оптимальной экстраполяции многочленов для случая, когда компакт является лемнискатой — теорема 1.

Теорема 1. *Пусть* Q_n — *произвольный многочлен степени* n *с единичным старшим коэффициентом и* $s > 0$, *а* $L = L(Q_n, s) := \{\zeta \in \mathbb{C} : |Q_n(\zeta)| = s\}$ — *определяемая ими лемниската, а* $D_0 := \{z \in \mathbb{C} \,:\, |Q_n(z)| < s\}$ *и* $D_\infty := \{z \in \mathbb{C} \,:\, |Q_n(z)| > s\}$ — *лемнискатные области. Тогда для произвольных точки* $z \in \mathbb{C}$ *и* $\delta > 0$ *справедливы равенства*

$$\mathcal{E}_n(L, z; \delta) = \max\left\{1;\, s^{-1}|Q_n(z)|\right\}\delta = \begin{cases} \delta, & z \in \overline{D_0}, \\ s^{-1}|Q_n(z)|\delta, & z \in \overline{D_\infty}; \end{cases}$$

Оптимальными методами в (1) *являются*

$$\Theta_{D_{0,j}} f = \int\limits_{L_j} \mathfrak{P}_{D_{0,j}}(z, \zeta)\, f(\zeta)\, |d\zeta| \quad \textit{в случае} \quad z \in D_{0,j},\, j = \overline{1, m},$$

$$\Theta_{D_\infty} f = \int\limits_{L} \mathfrak{P}_{D_\infty}(z, \zeta)\, \frac{Q_n(z)}{Q_n(\zeta)}\, f(\zeta)\, |d\zeta| \quad \textit{в случае} \quad z \in D_\infty,$$

где $D_{0,j}$, $j = \overline{1, m}, 1 \leqslant m \leqslant n$ — компоненты связности D_0, а $L_j = \partial D_{0,j}$ — их границы. $\mathfrak{P}_G$ — ядро Пуассона области G. (см. [3, Гл.6, §6])

Близкий оптимальный метод(интеграл Пуассоновского типа) возник ранее в работе [4].

Литература

1. Осипенко К.Ю. Введение в теорию оптимального восстановления / К.Ю. Осипенко. — СПб. : Лань, 2022. — 388 с.

2. Арестов В.В. Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи / В.В. Арестов // Успехи мат. наук. — 1996. — Т. 51, № 6. — С. 89–124.

3. Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного: уч. пос. / Г.М. Голузин — М.; Л. : Наука ГИТТЛ, 1952. — 628 с.

4. Акопян Р.Р. Оптимальное восстановление аналитической функции по заданным с погрешностью граничным значениям / Р.Р. Акопян // Матем. заметки. — 2016. — Т. 99, № 2. — С. 163–170.

ОГРАНИЧЕННОСТЬ ВЕСОВЫХ ЧАСТНО-ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ СО СЛАБОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ, ПОРОЖДЕННОЙ ОБОБЩЕННЫМ СДВИГОМ ПУАССОНА

Н.И. Трусова (Липецк, ЛГПУ имени П.П. Семенова-Тян-Шанского)
trusova.nat@gmail.com

Пусть $x=(x_\alpha,x_{\overline{\alpha}})\in D=D_{x_\alpha}\times D_{x_{\overline{\alpha}}}$ — конечный параллелепипед в $\mathbb{R}_n$, α и $\overline{\alpha}$ — мультииндексы, состоящие из m и $(n-m)$ различных натуральных чисел, дополняющих друг друга до набора $(1,2,\cdots,n)$.

Весовые частно-интегральные операторы (весовые Ч-И операторы) введены в диссертации [1], имеют следующий вид:

$$(K_\alpha u)(x)=\int\limits_{D_{t_\alpha}} k_\alpha(x;t_\alpha)u(t_\alpha,x_{\overline{\alpha}})\prod_{i=1}^{m} t_{\alpha_i}^{\gamma_{\alpha_i}}\,dt_{\alpha_i},$$

где $k=k_\alpha(x;t_\alpha)$ — ядро весового ЧИ-оператора и

$$d\mu_{\gamma_\alpha}(t_\alpha)=\prod_{i=1}^{m} t_{\alpha_i}^{\gamma_{\alpha_i}}\,dt_{\alpha_i},\ \gamma_{\alpha_i}>-1\,,$$

$\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)$, $1\leqslant m<n$. Мера $d\mu_{\gamma_\alpha}(t_\alpha)$ называется *интегральной мерой Лебега—Киприянова.* Число $m+|\gamma|$ (вообще говоря,

© Трусова Н.И., 2025

дробное) будем называть *трансцендентной размерностью* евклидовой области интегрирования D_{t_α} [2].

Пространство Лебега с мерой $d\mu_\gamma$ ($\gamma_i > -1$) будем обозначать $L_p^\gamma(D)$.

Пусть $p > 1$ и $q > 1$. Через $L_{(p,q)}^\gamma(D_{t_\alpha}, D_x) = L_p^\gamma(D_{t_\alpha}; L_q^\gamma(D_{x_\alpha}))$ обозначим анизотропное пространство функций с нормой

$$\|f\|_{L_{(p,q)}^\gamma} = \left(\int\limits_{D_{x_\alpha}} \left(\int\limits_{D_{t_\alpha}} |f(x_\alpha; t_\alpha)|^q d\mu_\gamma(t_\alpha) \right)^{p/q} d\mu_\gamma(x_\alpha) \right)^{1/p}.$$

Через $T_{t_\alpha}^{x_\alpha}$ будем обозначать обобщенный сдвиг Пуассона [3]:

$$T_{t_\alpha}^{x_\alpha} f(x, t_\alpha) = \prod_{i=1}^{m} T_{t_{\alpha_i}}^{\alpha_i} f(x, t_\alpha),$$

$$T_{t_{\alpha_i}}^{x_{\alpha_i}} f(x, t_\alpha) =$$

$$= C(\gamma) \int\limits_0^\pi f(x, \sqrt{t_{\alpha_i}^2 + x_{\alpha_i}^2 - 2x_{\alpha_i} t_{\alpha_i} \cos\beta_i}, t^{\alpha_i}) \ \sin^{\gamma_i - 1}\beta_i \ d\beta_i\,,$$

где $t_\alpha = (t_{\alpha_i}, t^{\alpha_i}),\ t^{\alpha_i} = (t_{\alpha_1}, \ldots, t_{\alpha_{i-1}}, t_{\alpha_{i+1}}, \ldots, t_{\alpha_m})$.

Теорема. *Пусть* $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ *и пусть* $u \in L_{(p,p^2)}^\gamma(D_{t_\alpha}, D_{x_{\overline{\alpha}}})$. *Если* $0 < \lambda < \frac{m+|\gamma|}{p}$, *то* $k_\alpha \in L_{(p', p, pp')}^{(\gamma_\alpha, \gamma_\alpha, \gamma_{\overline{\alpha}})}(D_{t_\alpha}, D_{x_\alpha}, D_{x_{\overline{\alpha}}})$. *При этом справедлива оценка:*

$$\|K_\alpha u\|_{L_p^\gamma(D)} \leqslant$$

$$\leqslant \|k_\alpha\|_{L_{(p', p, pp')}^{(\gamma_\alpha, \gamma_\alpha, \gamma_{\overline{\alpha}})}(D_{t_\alpha} \times D_{x_\alpha} \times D_{x_{\overline{\alpha}}})} \cdot \|u\|_{L_{(p, p^2)}^{(\gamma_\alpha, \gamma_{\overline{\alpha}})}(D_{t_\alpha} \times D_{x_{\overline{\alpha}}})}.$$

Литература

1. Трусова Н.И. Весовые частно-интегральные уравнения Фредгольма и Вольтерра второго рода в пространствах функций сос мешанной анизотропностью: дисс. ... канд. физ.-мат. наук: 1.1.1 / Н.И. Трусова. — Казань, 2023. — 127 с.

2. Ляхов Л.Н. Дифференциальные и интегральные операции в скрытой сферической симметрии и размерность кривой Коха / Л.Н. Ляхов, Е.Л. Санина // Математические заметки, 2023. — Т. 113, вып. 4. — С. 527–538.

3. Левитан Б.М. Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье / Б.М. Левитан. — УФМ, 1951. — Т. 6, вып. 2. — С. 102–143.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ[1]

В.И. Усков (Воронеж, ВГЛТУ)
vum1@yandex.ru

Рассмотрим задачу Коши:

$$\frac{d^2u}{dt^2} = A\frac{du}{dt} + Bu(t) + f(t), \tag{1}$$

$$u(0) = u^0 \in X, \quad \frac{du}{dt}(0) = u^1 \in X, \tag{2}$$

где A, B — ограниченные стационарные линейные операторы, действующие в банаховом пространстве X, $f(t)$ — заданная функция со значениями в X; $t \in \mathfrak{T} = [0; t_k]$.

Под решением задачи (1), (2) подразумевается функция $u(t) \in X$, дважды дифференцируемая; такая, что $\dfrac{du}{dt} \in X$; удовлетворяющая (1), (2) в $\mathfrak{T}$.

Цель работы: найти решение задачи (1), (2) в аналитическом виде.

Будем предполагать, что функция $f(t)$ достаточное количество раз дифференцируема. Получен следующий результат.

Теорема 1. *Решение задачи* (1), (2) *равно*

$$u(t) = D^{(1)}(t)u^1 + D^{(0)}(t)u^0 + \Psi(t), \tag{3}$$

где операторы $D^{(1)}(t), D^{(0)}(t)$ и функция $\Psi(t)$ определяются по формулам:

$$C_0^{(1)} = C_1^{(0)} = K_0^{(0)} = K_1^{(1)} = K_1^{(0)} = \Phi_0 = \Phi_1 = O, \quad C_0^{(0)} = C_1^{(1)} = I,$$

$$C_{n+1}^{(1)} = AC_n^{(1)} + BC_{n-1}^{(1)}, \quad C_{n+1}^{(0)} = AC_n^{(0)} + BC_{n-1}^{(0)},$$

$$K_{n+1}^{(n-1)} = I, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad K_{n+1}^{(n-2)} = AK_n^{(n-2)}, \quad n = 2, 3, \ldots,$$

$$K_{n+1}^{(j)} = AK_n^{(j)} + BK_{n-1}^{(j)}, \quad n = 3, 4, \ldots, \quad j = 0, 1, \ldots, n-3,$$

[1] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-20012, https://rscf.ru/project/24-21-20012/.

© Усков В.И., 2025

$$\Phi_n = \sum_{j=0}^{n-2} K_n^{(j)} \frac{d^j f}{dt^j}(0), \quad n = 2, 3, \ldots,$$

$$D^{(1)}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} C_n^{(1)}, \quad D^{(0)}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} C_n^{(0)}, \quad \Psi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \Phi_n.$$

Доказательство. Разложим решение $u(t)$ в ряд Маклорена: $u(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \frac{d^n u}{dt^n}(0)$, и вычислим значения $\frac{d^n u}{dt^n}(0)$, $n = 2, 3, \ldots$. При $n = 2$, взяв в (1) $t = 0$, получим $\frac{d^2 u}{dt^2}(0) = Au_1 + Bu_0 + f(0) = C_2^{(1)} u^1 + C_2^{(0)} u^0 + \Phi_2$. Покажем, что $\frac{d^n u}{dt^n}(0) = C_n^{(1)} u^1 + C_n^{(0)} u^0 + \Phi_n$, $n = 0, 1, \ldots$. Пусть при $n = N$ выполнено $\frac{d^N u}{dt^N}(0) = C_N^{(1)} u^1 + C_N^{(0)} u^0 + \Phi_N$. Продифференцируем (1) n раз. Тогда при $n = N + 1$ после приведения подобных получим

$$\frac{d^{N+1} u}{dt^{N+1}}(0) = A \frac{d^N u}{dt^N}(0) + B \frac{d^{N-1} u}{dt^{N-1}}(0) + \frac{d^{N-1} f}{dt^{N-1}}(0) =$$

$$= A(C_N^{(1)} + BC_{N-1}^{(1)}) u^1 + A(C_N^{(0)} + BC_{N-1}^{(0)}) u^0 +$$

$$+ \sum_{j=0}^{N-3} (AK_N^{(j)} + BK_{N-1}^{(j)}) \frac{d^j f}{dt^j}(0) + A_N^{(N-2)} \frac{d^{N-2} f}{dt^{N-2}}(0) + \frac{d^{N-1} f}{dt^{N-1}}(0) =$$

$$= C_{N+1}^{(1)} u^1 + C_{N+1}^{(0)} u^0 + \Phi_{N+1}.$$

Подставив это выражение в разложение, получим формулу (3).

Пример. Рассмотрим задачу (1), (2) с операторами $A, B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, функцией $f(t) \equiv O$, и начальными векторами $u^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}$, $u^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

По формуле (3), ограничившись частичной суммой до t^4 включительно, решение задачи равно

$$u(t) \approx \begin{pmatrix} \frac{71}{6} t^4 + \frac{67}{6} t^3 + \frac{23}{2} t^2 + 2t \\ \frac{77}{8} t^4 + \frac{28}{3} t^3 + \frac{9}{2} t^2 + 3t - 5 \end{pmatrix}.$$

ФРЕЙМЛЕТЫ НА ГРУППАХ ВИЛЕНКИНА

Ю.А. Фарков (Москва, РАНХиГС)
farkov-ya@ranepa.ru

По данному целому $p \geqslant 2$ группа Виленкина G с операциями $\oplus$ и $\ominus$, дискретная подгруппа $H \subset G$ и автоморфизм $A : G \to G$ определяются как в [1] (при $p = 2$ группа G совпадает с локально компактной группой Кантора). Пусть $\Psi = \{\psi^{(1)}, \ldots, \psi^{(r)}\} \subset L^2(G)$, где $r \geqslant p-1$. Для любых $j \in \mathbb{Z}$ и $h \in H$ положим

$$\psi_{j\,h}^{(\nu)}(x) := p^{j/2}\psi^{(\nu)}(A^j x \ominus h), \quad 1 \leqslant \nu \leqslant r, \quad x \in G.$$

Система функций

$$X(\Psi) := \{\psi_{j,h}^{(\nu)} \,:\, 1 \leqslant \nu \leqslant r,\ j \in \mathbb{Z},\ h \in H\}$$

называется *нормализованным жёстким фреймлетом* для $L^2(G)$, если равенство

$$\|f\|^2 = \sum_{g \in X(\Psi)} |\langle f\,, g\rangle|^2$$

справедливо для любой функции $f \in L^2(G)$ (см., например, [2]). В докладе будет сформулировано обобщение на фреймлеты теоремы 3.3 из [3] и показано, что по каждой ступенчатой масштабирующей функции с компактным носителем на группе G можно построить нормализованный жёсткий фреймлет для $L^2(G)$. Подробное изложение соответствующего метода дано в [4], где отмечены возможности его обобщений для локальных полей и $M-$множеств.

Литература

1. Фарков Ю.А. Ортогональные вейвлеты с компактными носителями на локально компактных абелевых группах / Ю.А. Фарков // Изв. РАН. Сер. матем. — 2005. — Т. 69, № 3. — С. 193–220.

2. Han B. Framelets and wavelets. Algorithms, analysis, and applications / B. Han. — N.Y. : Birkhauser/Springer, 2017. — 724 p.

3. Farkov Yu.A. Wavelet frames related to Walsh functions / Yu.A. Farkov // Eur. J. Math. — 2019. — V. 5, № 1. — P. 250-267.

4. Фарков Ю.А. Жёсткие фреймлеты в анализе Уолша // Матем. заметки (в печати).

© Фарков Ю.А., 2025

О ЛИНЕЙНОМ НЕОДНОРОДНОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ЗАМКНУТЫМИ ОПЕРАТОРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ В СЛУЧАЕ НЕГАТИВНОГО ОПЕРАТОРНОГО ДИСКРИМИНАНТА

В.И. Фомин (Тамбов, ТГУ им. Г.Р. Державина)
vasiliyfomin@bk.ru

Пусть E — вещественное банахово пространство; I, O — соответственно тождественный и нулевой операторы в пространстве E; $L(E)$ — вещественная банахова алгебра ограниченных линейных операторов, определённых на E со значениями в E; $GL(E) = \left\{A \in L(E) : \exists A^{-1} \in L(E)\right\}$; $G(E)$ — множество замкнутых линейных операторов, действующих в пространстве E; $P(E) = \Big\{A \in G(E) : \overline{D(A)} = E\Big\}$; $C\left([0,\infty);E\right)$ — линейное пространство непрерывных на $[0,\infty)$ функций со значениями в E; $C^2\left([0,\infty);E\right)$ — линейное пространство дважды непрерывно дифференцируемых на $[0,\infty)$ функций со значениями в E. Напомним, что $L(E) \subset G(E)$, точнее $L(E) \subset P(E)$([1, с. 208]).

Рассматривается уравнение

$$x''(t) + Bx'(t) + Cx(t) = f(t), \quad 0 \leqslant t < \infty, \tag{1}$$

и соответствующее ему однородное уравнение

$$x''(t) + Bx'(t) + Cx(t) = 0, \quad 0 \leqslant t < \infty. \tag{2}$$

Под решением уравнения понимается его сильное решение, т.е. функция $x(t) \in C^2\left([0,\infty);E\right)$, удовлетворяющая этому уравнению. Естественно, что любое решение $x(t)$ уравнения должно удовлетворять следующим условиям: $x(t) \in D(C)$, $x'(t) \in D(B)$ при каждом $t \in [0,\infty)$.

Случай $B, C \in L(E)$ изучен в [2 – 6]. В данной работе предполагается, что

1) оператор $B_1 = -2^{-1}B$ является генератором полугруппы $U(t)$ класса C_0;

2) оператор C имеет вид $C = 4^{-1}\left(B^2 + F^2\right)$, где $F \in GL(E)$;

3) $f(t) \in C\left([0,\infty);E\right)$.

© Фомин В.И., 2025

В силу условия 1) имеем $\overline{D\left(B_1^m\right)} = E$, $\forall m \in \mathbb{N}$, и оператор B_1 замкнут ([7, с. 90, 95]). Следовательно, в силу равенства $D\left(B^m\right) = D\left(B_1^m\right)$ получаем $\overline{D\left(B^m\right)} = E$, $\forall m \in \mathbb{N}$, в частности, $\overline{D\left(B\right)} = E$ и оператор $B = -2B_1$ замкнут как произведение замкнутого оператора на скаляр. Таким образом, $B \in P(E)$.

Покажем, что в случае непрерывной обратимости оператора B справедливо включение $C \in P(E)$. Для этого понадобятся следующие два утверждения.

Замечание 1. *Любой непрерывно обратимый линейный оператор $A : D(A) \subset E \to E$ замкнут.*

Действительно, согласно определению непрерывно обратимого оператора $R(A) = E$ и $\exists A^{-1} \in L(E)$, следовательно, в силу включения $L(E) \subset G(E)$ оператор A^{-1} замкнут, значит, $A = \left(A^{-1}\right)^{-1}$ замкнут как оператор, обратный замкнутому оператору ([1, с. 210]).

Замечание 2. *Квадрат любого непрерывно обратимого линейного оператора $A : D(A) \subset E \to E$ является замкнутым оператором.*

Действительно, согласно определению замкнутого оператора нужно убедиться в следующем:

$$x_n \in D\left(A^2\right), n \in \mathbb{N}; x_n \to x, A^2 x_n \to y \Rightarrow x \in D\left(A^2\right), y = A^2 x.$$

В силу включения $D\left(A^2\right) \subset D\left(A\right)$ имеем $x_n \in D\left(A\right)$, $n \in \mathbb{N}$. Покажем, что из условия $A^2 x_n \to y$ следует предельный переход $Ax_n \to A^{-1}y$. Имеем: $\left\|Ax_n - A^{-1}y\right\| = \left\|A^{-1}\left(A^2 x_n\right) - A^{-1}y\right\| = \left\|A^{-1}\left(A^2 x_n - y\right)\right\| \leqslant \left\|A^{-1}\right\| \left\|A^2 x_n - y\right\| \to 0$, следовательно, $\left\|Ax_n - A^{-1}y\right\| \to 0$, т.е. $Ax_n \to A^{-1}y$. Итак, $x_n \in D\left(A\right)$, $n \in \mathbb{N}$; $x_n \to x$, $Ax_n \to A^{-1}y$, значит, в силу замкнутости оператора A (см. замечание 1) имеем $x \in D\left(A\right)$ и $A^{-1}y = Ax$. Заметим, что $A^{-1}y \in D(A)$. Тогда $Ax \in D\left(A\right)$, т.е. $x \in D\left(A^2\right)$ и $y = A^2 x$. Справедливость замечания 2 установлена.

В силу условия 2) имеем $D\left(C\right) = D\left(B^2\right) \cap D\left(F^2\right) = D\left(B^2\right) \cap E = D\left(B^2\right)$, следовательно, $\overline{D\left(C\right)} = \overline{D\left(B^2\right)} = E$. Оператор C можно записать в виде $C = B_1^2 + F_1^2$, где $F_1 = 2^{-1}F$. Заметим, что в силу включения $F \in GL(E)$ существует $F_1^{-1} = 2F^{-1} \in L(E)$. Оператор B непрерывно обратим, т.е. $\exists B^{-1} \in L(E)$. Тогда $\exists B_1^{-1} = -2B^{-1} \in L(E)$, т.е. оператор B_1 непрерывно обратим. Следовательно, в силу замечания 2 оператор B_1^2 замкнут. Тогда оператор $C = B_1^2 + F_1^2$ замкнут как сумма замкнутого линейного оператора и ограниченного линейного оператора ([1, с. 209]). Показано, что $C \in P(E)$.

Замечание 3. *Для построения двупараметрического семейства решений уравнения (1) достаточно найти двупараметрическое се-*

мейство решений уравнения (2) и некоторое частное решение уравнения (1) и рассмотреть их сумму.

Вид решений уравнения (2) определяется видом корней соответствующего характеристического операторного уравнения

$$\Lambda^2 + B\Lambda + C = O. \tag{3}$$

В свою очередь вид корней уравнения (3) определяется видом операторного дискриминанта $\Delta = B^2 - 4C$. Случаи нулевого и позитивного операторного дискриминанта рассмотрены в [8,9]. В данной работе изучается случай негативного операторного дискриминанта. Этим обусловлен специальный подбор операторного коэффициента C.

В силу условия 2) имеем $\Delta = -F^2$ (операторный дискриминант такого вида условимся называть негативным). Значит, уравнение (3) имеет комплексно сопряжённые корни

$$\Lambda_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-B \pm \mathrm{J}F}{2} = B_1 \pm \mathrm{J}F_1, \tag{4}$$

где $\mathrm{J} = (O, I)$ — мнимая операторная единица (материал о неограниченных и полуограниченных комплексных операторах изложен в [10]; корректность применения формулы (4) обоснована в [11]).

Пусть $H \in L(E)$, H фиксирован. При построении решений уравнений (1), (2) потребуются операторные функции вида $\cos Ht$, $\sin Ht : \mathbb{R} \to L(E)$, определяемые суммами абсолютно сходящихся рядов:

$$\cos Ht = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k} H^{2k}}{(2k)!}, \quad \sin Ht = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1} H^{2k+1}}{(2k+1)!}. \tag{5}$$

Определения (5) корректны, ибо как известно ([12, с. 129]), из абсолютной сходимости ряда с членами из банахова пространства следует его сходимость, в частности, из абсолютной сходимости ряда с членами из алгебры $L(E)$ следует его сходимость. Известно ([6, 13]), что $\cos Ht$, $\sin Ht$ бесконечно дифференцируемы на $\mathbb{R}$ и для любого $m \in \mathbb{N}$ справедливы формулы

$$(\cos Ht)^{(m)} = \begin{cases} (-1)^l H^m \sin Ht, \ m = 2l - 1, \\ (-1)^l H^m \cos Ht, \ m = 2l; \end{cases}$$

$$(\sin Ht)^{(m)} = \begin{cases} (-1)^{l+1} H^m \cos Ht, \ m = 2l - 1, \\ (-1)^l H^m \sin Ht, \ m = 2l. \end{cases}$$

Операторная функция $C(t) = \cos Ht$ является бесконечно дифференцируемой косинус оператор-функцией (КОФ) с производящим оператором $A = -H^2$. Выполнимость свойства

$$C(t+s) + C(t-s) = 2C(t)\,C(s), \quad \forall t, s \in \mathbb{R},$$

из определения КОФ доказана с помощью следующих формул операторной тригонометрии ([14]): для любых $X_1, X_2 \in L(E)$, удовлетворяющих условию $X_1 X_2 = X_2 X_1$,

$$\cos(X_1 + X_2) = \cos X_1 \cos X_2 - \sin X_1 \sin X_2,$$

$$\cos(X_1 - X_2) = \cos X_1 \cos X_2 + \sin X_1 \sin X_2.$$

Напомним, ([15, с. 132]), что операторные функции $\cos X$, $\sin X$: $L(E) \to L(E)$ определяются суммами абсолютно сходящихся рядов:

$$\cos X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k X^{2k}}{(2k)!}, \quad \sin X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k X^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Ассоциированная с КОФ $C(t) = \cos Ht$ синус оператор-функция (СОФ) $S(t)$, т.е. операторная функция, определяемая на E равенством

$$S(t)\,x = \int\limits_0^t \cos(H\tau)\,x d\tau,$$

представима в случае $H \in GL(E)$ в виде $S(t) = H^{-1} \sin Ht$.

При выполнении некоторых дополнительных условий построено двупараметрическое семейство решений уравнения (2):

$$x(t) = U(t)\left((\cos F_1 t)\,x + (\sin F_1 t)\,y\right), \tag{6}$$

где x, y — произвольные элементы соответственно из множеств D_1, D_2; $D_1 = D(B) \cap M_1 \cap N_1$, $M_1 = \left\{h \in E : (\cos F_1 t)\,h \in D\left(B^2\right), t \in [0, \infty)\right\}$, $N_1 = \{h \in E : (F_1 \sin F_1 t)\,h \in D(B), t \in [0, \infty)\}$; $D_2 = M_2 \cap N_2 \cap \Omega_2$, $M_2 = \{h \in E : (F_1 \cos F_1 t)\,h \in D(B), t \in [0, \infty)\}$, $N_2 = \left\{h \in E : (\sin F_1 t)\,h \in D\left(B^2\right), t \in [0, \infty)\right\}$, $\Omega_2 = \{h \in E : F_1 h \in D(B)\}$.

Семейство решений (6) можно записать в виде

$$x(t) = U(t)\left(C(t)x + F_1 S(t)y\right)$$

где $S(t) = F_1^{-1} \sin F_1 t$ – СОФ, ассоциированная с КОФ $C(t) = \cos F_1 t$.

Решение задачи Коши для уравнения (2) с начальными условиями

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x'_0 \tag{7}$$

в предположении, что начальные значения x_0, x'_0 удовлетворяют следующим условиям:

$$x_0 \in D_1, \quad Bx_0 \in F_1\left(D_2\right), \quad x'_0 \in F_1\left(D_2\right), \tag{8}$$

получается из семейства решений (6) при значениях параметров

$$x = x_0, \quad y = F_1^{-1}\left(x'_0 + 2^{-1}Bx_0\right), \tag{9}$$

т.е. имеет вид

$$x(t) = U(t)\left((\cos F_1 t)\, x_0 + (\sin F_1 t)\, F_1^{-1}\left(x'_0 + 2^{-1}Bx_0\right)\right).$$

При некоторых дополнительных условиях на функцию $f(t)$ найдено частное решение $x_*(t)$ уравнения (1):

$$x_*(t) = \int\limits_0^t U\left(t-\tau\right)\left(\sin F_1\left(t-\tau\right)\right) F_1^{-1} f\left(\tau\right) d\tau, \tag{10}$$

удовлетворяющее нулевым начальным условиям $x_*(0) = 0$, $x'_*(0) = 0$.

Используя равенство $H \sin H\mu = (\sin H\mu)\, H$, $\forall \mu \in \mathbb{R}$, при $H = F_1$, $\mu = t - \tau$, а также следующий известный факт ([16, с. 55]): если $P \in L(E)$, $T \in GL(E)$ и $PT = TP$, то $PT^{-1} = T^{-1}P$, решение $x_*(t)$ можно записать в виде

$$x_*(t) = \int\limits_0^t U\left(t-\tau\right) S\left(t-\tau\right) f\left(\tau\right) d\tau.$$

В силу замечания 3 и формул (6), (10) уравнение (1) имеет двупараметрическое семейство решений

$$x(t) = U\left(t\right)\left((\cos F_1 t)\, x + (\sin F_1 t)\, y\right) +$$

$$+ \int\limits_0^t U\left(t-\tau\right)\left(\sin F_1\left(t-\tau\right)\right) F_1^{-1} f\left(\tau\right) d\tau, \tag{11}$$

где x, y — произвольные элементы соответственно из множеств D_1, D_2.

Решение задачи Коши (1), (7) при выполнении условий (8) получается из семейства решений (11) при значениях параметров x, y, задаваемых равенствами (9), т.е. имеет вид

$$x(t) = U(t)\left((\cos F_1 t)\, x_0 + (\sin F_1 t)\, F_1^{-1}\left(x_0' + 2^{-1}Bx_0\right)\right) +$$

$$+\int\limits_0^t U\left(t-\tau\right)\left(\sin F_1\left(t-\tau\right)\right) F_1^{-1} f\left(\tau\right) d\tau.$$

Учитывая важную роль $x_*(t)$ при построении двупараметрического семейства решений уравнения (1) и решения задачи Коши (1), (7), условимся называть $x_*(t)$ фундаментальным частным решением уравнения (1). Таким образом, по определению, фундаментальное частное решение уравнения (1) это его решение, удовлетворяющее нулевым начальным условиям.

Литература

1. Като Т. Теория возмущений линейных операторов / Т. Като. — М.: Мир, 1972. — 740 с.

2. Фомин В.И. О решении задачи Коши для линейного дифференциального уравнения второго порядка в банаховом пространстве / В.И. Фомин // Дифференциальные уравнения. — 2002. — Т. 38, №8. — С. 1140 — 1141.

3. Фомин В.И. Об общем решении линейного дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными ограниченными операторными коэффициентами в банаховом пространстве / В.И. Фомин // Дифференциальные уравнения. — 2005. — Т. 41, №5. — С. 656 – 660.

4. Фомин В.И. О случае кратных корней характеристического операторного многочлена линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка в банаховом пространстве / В.И. Фомин // Дифференциальные уравнения. — 2007. — Т. 43, №5. — С. 710 – 713.

5. Фомин В.И. О линейном дифференциальном уравнении n-го порядка в банаховом пространстве со специальной правой частью / В.И. Фомин // Дифференциальные уравнения. — 2009. — Т. 45, №10. — С. 1518 — 1520.

6. Фомин В.И. О случае комплексных корней характеристического операторного полинома линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка в банаховом пространстве / В.И. Фо-

мин // Дифференциальные уравнения. — 2020. — Т.56, №8. — С. 1045 — 1054.

7. Васильев В.В. Полугруппы операторов, косинус оператор-функции и линейные дифференциальные уравнения / В.В. Васильев, С.Г. Крейн, С.И. Пискарёв. — Итоги науки и техн. Сер. Матем. анализ. — ВИНИТИ, 1990. — Т.28. — С. 87 — 202.

8. Фомин В.И. О решении задачи Коши для линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными неограниченными операторными коэффициентами в банаховом пространстве / В.И. Фомин // Дифференциальные уравнения. — 2005. — Т.41, №8. — С. 1130 — 1133.

9. Фомин В.И. Об одном семействе решений линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными неограниченными операторными коэффициентами в банаховом пространстве / В.И. Фомин // Дифференциальные уравнения. — 2008. — Т.44, №3. — С. 427 — 428.

10. Фомин В.И. О неограниченных комплексных операторах / В.И. Фомин // Вестник российских университетов. Математика. — 2020. — Т. 25, №129. — С. 57 — 67.

11. Фомин В.И. О нулях операторной квадратичной функции / В.И. Фомин // Функциональные уравнения и математическое моделирование динамических систем: материалы Всероссийской открытой конференции, Воронеж, 25 мая 2023 г. / отв. ред. В.В. Зенина: Мн-во науки и высшего образования РФ, ФГБОУ ВО “ВЛГТУ”. — Воронеж, 2023. — С. 206 — 216.

12. Шварц Л. Анализ. Т.1 / Л. Шварц. — М.: Мир, 1972. — 824 с.

13. Фомин В.И. Об операторных функциях операторного переменного / В.И. Фомин // Вестник российских университетов. Математика. — 2023. — Т. 28, №141. — С. 68 — 89.

14. Фомин В.И. Об основном свойстве комплексной операторной экспоненциальной функции комплексного операторного аргумента / В.И. Фомин // Вестник российских университетов. Математика. — 2019. — Т. 24, №127. — С. 324 — 332.

15. Треногин В.А. Функциональный анализ / В.А. Треногин. — М.: Наука, 1980. — 496 с.

16. Треногин В.А. Задачи и упражнения по функциональному анализу / В.А. Треногин, Б.М. Писаревский, Т.С. Соболева. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. — 240 с.

О ПОЛУГРУППАХ КЛАССА C_0

В.И. Фомин (Тамбов, ТГУ им. Г.Р. Державина)
vasiliyfomin@bk.ru

Пусть E — банахово пространство; $L(E)$ — банахова алгебра ограниченных линейных операторов, определённых на E со значениями в E; $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$, $\bar{\mathbb{R}}_+ = [0, \infty)$; $C\left(\bar{\mathbb{R}}_+; E\right)$ – линейное пространство непрерывных на $\bar{\mathbb{R}}_+$ функций со значениями в E; $U(s)$, $s \in \bar{\mathbb{R}}_+$ — полугруппа класса C_0 операторов из $L(E)$ с производящим оператором A. Напомним ([1, с.90, 95]), что множество $D\left(A^k\right)$ плотно в E при любом $k \in \mathbb{N}$ и оператор A замкнут.

Согласно определению полугруппы класса C_0 имеем: $U(s)$ сильно непрерывна, т.е. при любом фиксированном $x \in E$ справедливо включение $U(s)x \in C\left(\bar{\mathbb{R}}_+; E\right)$. Следовательно, для любых фиксированных $x \in E$, $t \in \mathbb{R}_+$ определён элемент

$$y = y_{x,t} = \int_0^t U(\tau)x d\tau. \qquad (1)$$

Известно ([1, с. 94, 95]), что

$$y_{x,t} \in D(A), \quad \forall x \in E, \quad t \in \mathbb{R}_+ \qquad (2)$$

и множество $\Omega = \{y_{x,t} : x \in E, t \in \mathbb{R}_+\}$ плотно в E. Таким образом, при любом фиксированном $t \in \mathbb{R}_+$ равенство (1) задаёт оператор J_t, определённый на E со значениями в $D(A)$: $\mathrm{J}_t x = y_{x,t}$, $\forall x \in E$. Оператор J_t линеен. Это следует из линейности операторов $U(s)$, $s \in \bar{\mathbb{R}}_+$ и соответствующих свойств интеграла Римана для непрерывных абстрактных функций ([2, с.265]).

Покажем, что

$$y_{Ax,t} = Ay_{x,t}, \quad \forall x \in D(A), \quad t \in \mathbb{R}_+. \qquad (3)$$

Пусть $x \in D(A)$, $t \in \mathbb{R}_+$; x, t фиксированы. Используя определение (1), равенство $U(s)Ax = AU(s)x$, $\forall x \in D(A)$, $s \in \bar{\mathbb{R}}_+$ ([3, с.17]), замкнутость оператора A и тот факт, что замкнутый оператор можно выносить за знак интеграла ([4, с.28]), получаем

$$y_{Ax,t} = \int_0^t U(\tau)Ax d\tau = \int_0^t AU(\tau)x d\tau = A\int_0^t U(\tau)x d\tau = Ay_{x,t}.$$

© Фомин В.И., 2025

Равенство (3) установлено.

Теорема 1. *Для любых* $m \in \mathbb{N}$, $x \in D(A^m)$, $t \in \mathbb{R}_+$ *справедливо включение*

$$y_{x,t} \in D\left(A^{m+1}\right). \tag{4}$$

Доказательство. Применим метод математической индукции. Пусть $t \in \mathbb{R}_+$, t фиксировано. При $m = 1$ имеем $x \in D(A)$, значит, определён элемент $Ax \in E$. В силу (2) $y_{Ax,t} \in D(A)$, следовательно, в силу (3) $Ay_{x,t} \in D(A)$; кроме того, в силу (2) $y_{x,t} \in D(A)$. Из последних двух включений получаем $y_{x,t} \in D\left(A^2\right)$. Включение (4) при $m = 1$ установлено. Пусть включение (4) справедливо при $m = k$: для любого $x \in D\left(A^k\right)$

$$y_{x,t} \in D\left(A^{k+1}\right). \tag{5}$$

Покажем его справедливость при $m = k+1$: для любого $x \in D\left(A^{k+1}\right)$

$$y_{x,t} \in D\left(A^{k+2}\right). \tag{6}$$

Пусть $x \in D\left(A^{k+1}\right)$. В силу включения $D\left(A^{k+1}\right) \subset D\left(A^k\right)$ имеем $x \in D\left(A^k\right)$, следовательно, справедливо включение (5). В силу (2) $y_{Ax,t} \in D(A)$, значит, в силу (3)

$$Ay_{x,t} \in D(A). \tag{7}$$

В силу (5), (7) справедливо включение (6). Теорема доказана.

Теорема 1 полезна тем, что уточняя местонахождение элементов x, мы, тем самым, уточняем местонахождение элементов $y_{x,t}$.

В силу теоремы 1 равенство (1) при любых фиксированных $m \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}_+$ задаёт линейный оператор $\mathrm{J}_{t,m}$, определённый на $D(A^m)$ со значениями в $D\left(A^{m+1}\right)$: $\mathrm{J}_{t,m}x = y_{x,t}$, $\forall x \in D(A^m)$.

Утверждение теоремы 1 в случае $m = 1$ понадобилось автору при построении частного решения линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с замкнутыми операторными коэффициентами в банаховом пространстве.

Литература

1. Васильев В.В. Полугруппы операторов, косинус оператор-функции и линейные дифференциальные уравнения / В.В. Васильев, С.Г. Крейн, С.И. Пискарёв. — Итоги науки и техн. Сер. Матем. анализ. — ВИНИТИ, 1990. — Т.28. — С. 87 — 202.

2. Треногин В.А. Функциональный анализ / В.А. Треногин. — М.: Наука, 1980. — 496 с.

3. Иванов В.К. Дифференциально-операторные уравнения и некорректные задачи / В.К. Иванов, И.В. Мельникова, А.И. Филинков. — М.: Физматлит, 1995. — 176 с.

4. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / С.Г. Крейн. — М.: Наука, 1967. — 464 с.

ОБ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЧАСТНО-ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ СО СЛАБОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ В ПРОСТРАНСТВЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Е.В. Фролова (Липецк, ЛГПУ имени П.П. Семенова-Тян-Шанского)
lsnn48@mail.ru

Некоторые задачи математической физики, дифференциальных уравнений в частных производных [1] приводятся к уравнению вида

$$\varphi(x) - \lambda K\varphi(x) = f(x). \tag{1}$$

Здесь $D = \{x : a_i < x_i < b_i,\ i = \overline{1, n}\}$ — конечный параллелепипед в $\mathbb{R}_n$, α, $\overline{\alpha}$ — мультииндексы, дополняющие друг друга до полного мультииндекса $(1, 2, \ldots, n)$; m — размерность параллелепипеда D_α $(1 \leqslant m \leqslant n)$ и частно-интегральный оператор со слабой особенностью определяется равенством

$$(K_\alpha^{(m)} u)(x) = \int\limits_{D_\alpha} \kappa_\alpha(x; t_\alpha) u(t_\alpha; x_{\bar{\alpha}})\, dt_\alpha, \tag{2}$$

с ядром

$$\kappa_\alpha = \frac{k_\alpha(x; t_\alpha)}{|x_\alpha - t_\alpha|^\beta}, \quad \beta < m.$$

Уравнение (1) обычно называют частно-интегральным уравнением, так как неизвестная функция интегрируется по части переменных. Различные свойства таких уравнений и соответствующих им операторов в $\mathbb{R}_2$ изучены в [1]. Ранее ЧИ-операторы в пространствах непрерывных функций на $\mathbb{R}_2$ изучались в работе [2], где были получены условия обратимости одномерных частно-интегральных операторов. В данной работе изучались условия обратимости для m-мерных частно-интегральных операторов со слабой особенностью в пространстве непрерывных функций.

© Фролова Е.В., 2025

Через $C(D)$ обозначим пространство непрерывных функций с sup-нормой, а функцию $k_\alpha(x;t_\alpha)$ будем называть L_1-непрерывной, если она является непрерывной при каждом x функцией со значениями в пространстве L_1, т.е. выполнены условия:
$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$ такое, что из неравенства $|x' - x''| < \delta$ следует неравенство

$$\int\limits_{D_\alpha} |k(x'';t_\alpha) - k(x';t_\alpha)|dt_\alpha < \varepsilon;$$

и L_1-ограниченной, если

$$\sup_{x\in D} \int\limits_{D_\alpha} |k(x;t_\alpha)|dt_\alpha = K < \infty.$$

Соответствующее пространство функций, заданных на параллелепипеде D, с нормой

$$\|k_\alpha\|_{CL_1} = \sup_{x\in D} \int\limits_{D_\alpha} |k_\alpha(x;t_\alpha)|\, dt_\alpha$$

обозначим $CL_1 = C(D;\, L_1(D_\alpha))$.

Заметим, что для L_1-непрервыной и L_1-ограниченной функции $k_\alpha(x;t_\alpha)$ функция $\frac{k_\alpha(x;t_\alpha)}{|x_\alpha - t_\alpha|^\beta}$, $\beta < m$ также L_1-непрервына и L_1-ограничена. Пространство CL_1 является анизотропным пространством фнкций.

Теорема 1. *Пусть функция $k_\alpha(x;t_\alpha)$ L_1-непрервына и L_1-ограничена, тогда уравнение* (1) *однозначно разрешимо в $C(D)$ при условии обратимости оператора $K_\alpha^{(m)}$ и его решение имеет вид исходного оператора.*

Условия обратимости оператора $K_\alpha^{(m)}$ зависят от пространства, в котором он изучается. Спектральные свойства таких операторов в двумерном случае изучались в [2]. Аналогичные условия остаются справедливыми и в многомерном случае.

Литература

1. Appell J.M. Partial Integral Operators and Integro-differential Equations / J.M. Appell, A.S. Kalitvin, P.P. Zabrejko. — New York-Basel : Marcel Dekker, 2000. — 569 с.

2. Калитвин А.С. Линейные уравнения с частными интегралами. С-теория / А.С. Калитвин, Е.В. Фролова. — Липецк : ЛГПУ, 2004. — 195 с.

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ (НЕ)ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА РОСТ[1]

Б.Н. Хабибуллин (Уфа, Институт математики с вычислительным центром УФИЦ РАН)
khabib-bulat@mail.ru

Пусть M — функция на *комплексной плоскости* $\mathbb{C}$ со значениями в *вещественной прямой* $\mathbb{R}$ или её *расширении* $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Любую функцию $Z\colon \mathbb{C} \to \overline{\mathbb{N}}_0 := \{0, 1, 2, \dots, +\infty\}$ называем *распределением точек* на $\mathbb{C}$. Если для целой, т.е. голоморфной на $\mathbb{C}$, функции f с *распределением корней*

$$\mathsf{Zero}_f\colon z \underset{z\in\mathbb{C}}{\longmapsto} \sup\Bigl\{p \in \mathbb{R} \Bigm| \limsup_{z\neq w\to z} \frac{|f(w)|}{|w-z|^p} < +\infty\Bigr\} \in \overline{\mathbb{N}}_0$$

на $\mathbb{C}$ из неравенств $\ln|f| \leqslant M$ и $\mathsf{Zero}_f \geqslant Z$ на $\mathbb{C}$ следует, что $f = 0$, т.е. $\mathsf{Zero}_f = +\infty$, то Z — *распределение единственности по* M. В противном случае Z — *распределение <u>не</u>единственности по* M. Если *считающая радиальная функция*

$$Z^{\mathfrak{r}}\colon t \underset{t\geqslant 0}{\longmapsto} \sum_{|z|\leqslant t} Z(z) \in \overline{\mathbb{R}}^+ := \bigl\{x \in \overline{\mathbb{R}} \bigm| x \geqslant 0\bigr\},$$

принимает значение $+\infty$, то по одной из теорем Вейерштрасса Z — распределение единственности по любой функции $M\colon \mathbb{C} \to \overline{\mathbb{R}}$. Поэтому далее $Z^{\mathfrak{r}}(\mathbb{R}^+) \subset \mathbb{R}^+$, и, не умаляя общности, $Z(0) = 0$. Также требуем конечности *интегральных средних*

$$M_0^{\odot r}\colon r \underset{r\in\mathbb{R}^+}{\longmapsto} \int_0^{2\pi} M(re^{i\theta})\frac{d\theta}{2\pi}$$

функции M *по окружностям* радиуса r с центром в нуле.

Следующая теорема существенно развивает [1; теорема 1].

Теорема 1. *Если точная верхняя грань*

$$\sup_{0\leqslant r<R<+\infty} \frac{1}{\max\bigl\{M_0^{\odot r}, 1\bigr\}} \biggl(\int_r^R \frac{Z^{\mathfrak{r}}(t)}{t}\,dt - M_0^{\odot R}\biggr) \tag{1}$$

равна $+\infty$, то Z — распределение единственности по M. <u>Обратно, если</u> (1) $< +\infty$, то для любой убывающей на $\mathbb{R}^+$ выпуклой функции

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 24-21-00002).
© Хабибуллин Б.Н., 2025

$d > 0$ найдётся число $A_d > 0$, для которого Z — распределение неединственности по любой функции, не меньшей функции

$$z \underset{z\in\mathbb{C}}{\longmapsto} \frac{A_d}{d(|z|)} M_0^{\odot(1+d(|z|))|z|}. \tag{2}$$

Зазор между функциями M и (2) в теореме 1 может быть довольно велик. Для степенной функции имеет место следующее существенное уточнение нашего результата [2; теорема 1], разобранного в [3; теорема 3.3.1] с детальной историей вопроса.

Теорема 2. *Пусть $0 < \rho \in \mathbb{R}$ и $0 < b \in \mathbb{R}$. Если величина*

$$\sup_{R\geqslant 0}\left(\int_0^R \frac{Z^{\mathfrak{r}}(t)}{t}dt - bR^\rho\right) \tag{3}$$

равна $+\infty$, то Z — распределение единственности по любой функции $M(z) \underset{z\in\mathbb{C}}{\leqslant} b|z|^\rho$. Обратно, если (3) $< +\infty$, то Z — распределение неединственности по любой функции M, не меньшей функции

$$z \underset{z\in\mathbb{C}}{\longmapsto} P(\rho)b|z|^\rho, \text{ где } P(\rho) := \begin{cases} \pi\rho & \text{при } \rho \geqslant \frac{1}{2}, \\ \dfrac{\pi\rho}{\sin\pi\rho} & \text{при } \rho \leqslant \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Константа Пэли $P(\rho)$ здесь точна.

Новые продвижения в развитии упомянутых выше предыдущих результатов в теоремах 1, 2, установленных в 2024 г., достигнуты на основе наших недавних общих результатов из [4].

Литература

1. Хабибуллин Б.Н. Рост целых функций с заданными нулями и представление мероморфных функций / Б.Н. Хабибуллин // Матем. заметки. — 2003. — Т. 73, № 1. — 120–134.

2. Хабибуллин Б.Н. О типе целых и мероморфных функций / Б.Н. Хабибуллин // Матем. сб. — 1992. — Т. 183, № 11. — С. 35–44.

3. Хабибуллин Б.Н. Полнота систем экспонент и множества единственности / Б.Н. Хабибуллин. — 4-е изд., дополненное. — Уфа: РИЦ БашГУ, 2012. — xvi+176 с. — ISBN: 978-5-7477-2992-6. — http://www.researchgate.net/publication/271841461

4. Кудашева Е.Г.Двойственная конструкция и существование (плюри)субгармонической миноранты / Е.Г. Кудашева, Э.Б. Меньшикова, Б.Н. Хабибуллин // Уфимск. матем. журн. — 2024. — Т. 16, № 3. — 69–77.

АНАЛОГ ТЕОРЕМ ТИПА ВИХМАННА О СУММИРУЕМОСТИ ПО МЕРЕ

Ю.Х. Хасанов (Душанбе, РТСУ)
yukhas60@mail.ru

В работе приведены ряд утверждений, дающих критерий абсолютной p–суммируемости ($1 \leqslant p < \infty$) в пространстве измеримых по Лебегу конечных почти всюду на отрезке $[0,1]$ функций. Установлена теорема типа Вихманна о суммируемости, т.е. получены аналоги классических теорем о суммируемости в пространстве $M(S,\mu)$, где $S = [0,1]$ и μ – мера Лебега, а множество $M(S,\mu)$ состоит из измеримых почти всюду конечных на отрезке $[0,1]$ функций.

Пусть $\xi_k(t)$ $(k = 1,2,\ldots)$— измеримые функции и $A = (\alpha_{nk})$ — числовая матрица. Введем в рассмотрение преобразование вида

$$\eta_n(T) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{nk}\xi_k(t) \tag{1}$$

Определение 1. Говорят, что последовательность измеримых функций $f_n(x)$ $(n = 1,2,\ldots)$ сходится по мере к функции $F(x)$, если для любого $\sigma > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mu(x : |f_n(x) - F(x)| \geqslant \sigma) = 0.$$

Определение 2. Говорят, что последовательность $\chi = \xi_k$–суммируема по мере методом A или A–суммируема по мере, если сходится по мере последовательность $y(t) = (\eta_n(t))$, которая определена равенством (1).

Пространство всех A—суммируемых по мере последовательностей будем обозначать через $F_A(M)$:

$$F_A(M) = \chi = (\xi_k) : (\eta_n(t))\text{сходится по мере.}$$

В частности,

$$F_A^o(M) = \chi = (\xi_k) : \eta_n(t) \to \theta\text{по мере.}$$

Мэддокс [1] рассматривал суммируемость по мере последовательностей таких измеримых почти всюду конечных функция ξ_k, для которых найдется измеримая почти всюду конечная функция $\varphi(t)$,

© Хасанов Ю.Х., 2025

такая, что $|\xi_k(t)| \leqslant \varphi(t)$. Вихманн [2] получил ряд результатов по вопросам суммируемости в пространстве $M(S,\mu)$, где $S=[0,1]$ и μ – мера Лебега, а множество $M(S,\mu)$ состоит из измеримых почти всюду конечных на отрезке $[0,1]$ функций.

Теперь приводим основные результаты доклада, которые устанавливают необходимые и достаточные условия A—суммируемости по мере все сходящиеся по мере к нулю последовательности.

Теорема 1. *Пусть A является матрицей конечного типа и $F=F_A(R)$. Тогда для включения $F_A(M)\supset F^0(M)$ необходимо и достаточно, чтобы были выполнены следующие условия:*

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_{nk}=\alpha_k;\ \ \lim_{n\to\infty}\sum_k\alpha_{nk}=\alpha_k;\ \ \sup_{n\to\infty}\sum_k|\alpha_{nk}|<\infty. \tag{2}$$

Кроме того, существует натуральное число L такое, что число отличных от нуля элементов любой строки матрици A не превосходит числа L.

Теорема 2. *Пусть A является матрицей конечного типа и $\alpha_k=0\ \ (k=1,2,\ldots)$. Тогда для включения $F_A^0(M)\supset F^0(M)$ необходимо и достаточно, чтобы были выполнены условия (2)*

Если E — локально выпуклое пространство (в частности пространство Фреше), то включение $F_A(E)\supset F[E]$ для метода A равносильно включению $F_A(R)\supset F$. Отсюда следует, что это утверждение не верно для некоторых нелокально выпуклых пространств, в частности, для пространства $M(S,\Sigma,\mu)$. Поэтому большинство результатов теории суммируемости числовых последовательностей не переносятся на суммируемость по мере.

Литература

1. Maddox I.J. Toeplitz transformations and convergence in measure /I.J. Maddox// J. London Math. Soc. —1961. —V. 41, № 4. —P. 733—736.

2. Вихманн Ф. О консервативности матриц относительно сходимости по мере / Ф. Вихманн // Изв. АН Эстон. ССР, Физ, матем. — 1971. — Т. 20, № 3. —С.275—278.

НОВОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОВАРИАЦИИ НЕЧЕТКО СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

В.Л. Хацкевич, Н.А. Каплиева
(Воронеж, ВУНЦ ВВС «ВВА», ВГУ)
vlkhats@mail.ru, kaplieva@amm.vsu.ru

В последние десятилетия активно изучаются нечетко случайные величины (Н.С.В.) [1–3] в связи с различными приложениями. Как известно одной из важнейших характеристик вещественных случайных величин является ковариация между ними. В данной работе вводится новое определение ковариации Н.С.В., отличающееся от известных [1–3] рядом полезных свойств. В качестве приложения рассмотрена задача об оптимальной линейной регрессии Н.С.В.

Пусть J — множество нечетких чисел, обладающих стандартными свойствами [4], $(\Omega, \Sigma, \mathrm{P})$ — вероятностное пространство, где Ω — множество элементарных событий, Σ — σ-алгебра, состоящая из подмножеств множества Ω, P — вероятностная мера. Отображение $\tilde{X} : \Omega \to J$ называют нечетко случайной величиной, если его α-индексы $X^L(\omega, \alpha)$, $X^R(\omega, \alpha)$ квадратично суммируемые на $\Omega \times [0, 1]$.

Введем случайные величины

$$\begin{aligned} X_m(\omega) &= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(X^R(\omega,\alpha) + X^L(\omega,\alpha)\right) d\alpha, \\ X_r(\omega) &= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(X^R(\omega,\alpha) - X^L(\omega,\alpha)\right) d\alpha. \end{aligned} \tag{1}$$

определяющие центр $X_m(\omega)$ и радиус $X_r(\omega)$ Н.С.В. $\tilde{X}$ соответственно.

Дадим следующее определение ковариации Н.С.В. $\tilde{X}$ и $\tilde{Y}$

$$cov_2(\tilde{X}, \tilde{Y}) = cov(X_m, Y_m) + cov(X_r, Y_r), \tag{2}$$

При этом дисперсия $D(\tilde{X}) = cov(\tilde{X}, \tilde{X})$. Справедливо

Утверждение 1. Пусть $\tilde{X}$ и $\tilde{Y}$ — Н.С.В. Тогда:

1) $cov(\tilde{X}, \tilde{Y}) = cov(\tilde{Y}, \tilde{X})$;

2) $cov(\tilde{X} + \tilde{Z}, \tilde{Y}) = cov(\tilde{X}, \tilde{Y}) + cov(\tilde{X}, \tilde{Z})$;

© Хацкевич В.Л., Каплиева Н.А., 2025

3) $cov(\lambda\tilde{X}+\tilde{U},\mu\tilde{Y}+\tilde{V}) = \lambda\mu\, cov(\tilde{X},\tilde{Y})$ $(\forall\,\tilde{U},\tilde{V}\in J,\ \forall\,\lambda,\mu\in R,\ \lambda\mu\geqslant 0)$;

4) $D(\lambda\tilde{X}+\tilde{V}) = \lambda^2 D(\tilde{X})$;

5) $D(\tilde{X}+\tilde{Y}) = D(\tilde{X}) + D(\tilde{Y}) + 2cov(\tilde{X},\tilde{Y})$;

6) $|cov(\tilde{X},\tilde{Y})| \leqslant \sqrt{D(\tilde{X})}\sqrt{D(\tilde{Y})}$.

Рассмотрим вопрос об оптимальной линейной аппроксимации (прогнозируемой) Н.С.В. $\tilde{Y}$ по системе (прогнозирующих) Н.С.В. $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \ldots, \tilde{X}_n$.

Обозначим через $Y_m(\omega)$ и $Y_r(\omega)$ средние и размахи нечетко случайной величины $\tilde{Y}$, а через $X_{i,m}(\omega)$ и $X_{i,r}(\omega)$ средние и размахи нечетко случайных величин $\tilde{X}_i$, $i=1,\ldots,n$.

Рассмотрим задачу об аппроксимации Н.С.В. $\tilde{Y}$ линейными комбинациями $\sum_{i=1}^{n}\beta_i\tilde{X}_i$ с вещественными коэффициентами β_i, $i=1,\ldots,n$, по критерию минимизации следующего выражения:

$$F(\beta_1,\ldots,\beta_n) = D\left(Y_m(\omega) - \sum_{i=1}^{n}\beta_i X_{i,m}(\omega)\right) + \\ +D\left(Y_r(\omega) - \sum_{i=1}^{n}\beta_i X_{i,r}(\omega)\right) \to \min, \tag{3}$$

где $\beta_i\in R$, $i=1,\ldots,n$, а D означает дисперсию соответствующей вещественной случайной величины.

Теорема 1. *Пусть даны Н.С.В. $\tilde{Y}$ и Н.С.В. $\tilde{X}_1,\tilde{X}_2,\ldots,\tilde{X}_n$. Пусть $\tilde{X}_i$ попарно некоррелированы относительно (2) и имеют дисперсии $D_2(\tilde{X}_i)=\sigma_i^2\neq 0$, а β_i — произвольные вещественные числа. Тогда задача (3) имеет единственное решение, которое представимо в виде:*

$$\beta_i^* = \frac{cov_2(\tilde{Y},\tilde{X}_i)}{\sigma_i^2}, \qquad i=1,\ldots,n. \tag{4}$$

Следствие 1. В условиях теоремы 1 те оптимальные коэффициенты β_i^*, которые соответствуют неотрицательным ковариациям $cov_2(\tilde{Y},\tilde{X}_i)\geqslant 0$, неотрицательны, а те оптимальные коэффициенты β_i^*, которые соответствуют отрицательным ковариациям $cov_2(\tilde{Y},\tilde{X}_i)<0$, отрицательны.

Определим коэффициент корреляции между Н.С.В. $\tilde{Y}$ и $\tilde{Z}$ формулой

$$k(\tilde{Y},\tilde{Z}) = \frac{cov_2(\tilde{Y},\tilde{Z})}{\sqrt{D_2(\tilde{Y})}\sqrt{D_2(\tilde{Z})}}. \qquad (5)$$

Отметим, что согласно свойству 6) ковариации для коэффициента корреляции (5) справедливо неравенство $|k(\tilde{Y},\tilde{Z})| \leqslant 1$. При этом имеет место следующая

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1, причем* $D_2(\tilde{Y}) \neq 0$ *и* $cov_2(\tilde{Y},\tilde{X}_i) \geqslant 0$, $i = 1,\ldots,n$. *Тогда оценка* $\sum_{i=1}^{n} \beta_i^* \tilde{X}_i$, *где* β_i^* *определены формулами (4), имеет максимальный коэффициент корреляции (5) по сравнению с другими линейными оценками вида* $\sum_{i=1}^{n} \beta_i \tilde{X}_i$ *при* $\beta_i \geqslant 0$, $i = 1,\ldots,n$.

В качестве другого приложения можно рассмотреть задачу о преобразовании нечетко случайного сигнала (Н.С.С.) линейной динамической системой. Такого рода задача исследована в недавней работе одного из авторов [5]. В ней по числовым характеристикам входного Н.С.С. (ожиданию и ковариационной функции), а также параметрам системы определены соответствующие характеристики выходного Н.С.С.

Используя предложенный выше подход, можно по другим характеристикам, а именно центру и радиусу входного Н.С.С., а также параметрам системы определить центр, радиус и ковариационную функцию выходного Н.С.С.

Литература

1. Feng Yuhu. The variance and covariance of fuzzy random variables and their applications / Feng Yuhu, Hu Liangjian, Shu Huisheng // Fuzzy Sets and Systems. — 2001. — V. 120, No 3. P. 487–497. doi 10.1016/S0165-0114(99)00060-3

2. Colubi A. Statistical inference about the means of fuzzy random variables: Applications to the analysis of fuzzy- and real-valued data / A.Colubi // Fuzzy Sets and Systems. — 2009. — V. 160. — P. 344–356.

3. Шведов А.С. Оценивание средних и ковариаций нечетко-случайных величин / А.С.Шведов // Прикладная эконометрика. — 2016. — No 42. — P. 121–138.

4. Аверкин А.Н. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта./ А.Н.Аверкин // —М. : Наука, 1986.

5. Хацкевич В.Л. О непрерывных случайных процессах с нечеткими случайными состояниями / В.Л.Хацкевич // Автомат. и телемех. — 2023. — № 7. — P. 23–40.

О СВОЙСТВАХ ОДНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНОГО РЯДА, СВЯЗАННОГО СО СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕЙ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

А.П. Хромов (Саратов, СГУ)
KhromovAP@sgu.ru

В [1] исследовалось классическое решение по методу Фурье смешанной задачи для волнового уравнения:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u(x,t), \quad x \in [0,1], \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t'(x,0) = 0. \tag{3}$$

Считаем, что $q(x)$ и $\varphi(x)$ комплекснозначные функции, $q(x) \in L[0,1]$, $\varphi(x), \varphi'(x)$ абсолютно непрерывны и $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$.

В [1] был получен следующий результат о классическом решении

Теорема 1. *Если $u(x,t)$ классическое решение задачи (1)-(3), такое, что $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \in L[Q_T]$ при любом $T > 0$, $Q_T = [0,1] \times [0,T]$, то оно единственно и*

$$u(x,t) = A(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x,t).$$

Здесь $a_0(x,t) = \frac{1}{2}[\widetilde{\varphi}(x+t) + \widetilde{\varphi}(x-t)], \widetilde{\varphi}(x)$ нечетное 2-периодическое продолжение $\varphi(x)$ на всю ось,

$$a_n(x,t) = -\frac{1}{2}\int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \widetilde{q}(\eta) a_{n-1}(\eta,\tau)\, d\eta, \quad n \geqslant 1,$$

$\widetilde{q}(\eta)$ — четна, 2-периодична и $\widetilde{q}(\eta) = q(\eta)$ при $\eta \in [0,1]$.

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 2. *Пусть a — натуральное число. Тогда при $(x,t) \in [-a,a] \times [0,T]$ имеют место оценки:*

$$|a_n(x,t)| \leqslant \frac{t^n}{n!}\|q\|_1^n (m+a)^n \|\varphi\|_\infty, \quad n \geqslant 1,$$

где $\|q\|_1$ — норма $q(x)$ в $L[0,1]$, $\|\varphi\|_\infty$ — норма $\varphi(x)$ в $L_\infty[0,1]$, m — такое натуральное число, что $m-1 \leqslant T \leqslant m$.

© Хромов А.П., 2025

Теорема 3. *Ряд $A(x,t)$ сходится абсолютно и равномерно в любой ограниченной области переменных x,t из $(-\infty,\infty)\times[0,\infty]$*

Эта теорема обосновывает законность Замечания 1 из [1].

Привлекаем теперь работу [2]. С ее помощью получается

Теорема 4. *Сумма ряда $A(x,t)$ является классическим решением задачи* (1)–(3).

Рассмотрим следующую смешанную задачу:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \widetilde{q}(x)u(x,t), \quad x,t \in [-a,a]\times[0,T], \tag{4}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \tag{5}$$

$$u(x,0) = \widetilde{\varphi}(x), \quad u_t^{'}(x,0) = 0. \tag{6}$$

Здесь $\widetilde{q}(x)$ и $\widetilde{\varphi}(x)$ те же, что и в теореме 1.

Теорема 5. *Сумма ряда $A(x,t)$ является решением задачи* (4)–(6).

Теоремы 4 и 5 дополняют соответствующие результаты работы [1].

Литература

1. Хромов А.П. Необходимые и достаточные условия существования классического решения смешанной задачи для одномерного волнового уравнения в случае суммируемого потенциала / А.П. Хромов // Дифференциальные уравнения — 2019 — Т. 55 № 5 — С. 717–731.

2. Хромов А. П. Расходящиеся ряды и обобщенная смешанная задача для волнового уравнения простейшего вида / А.П. Хромов // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. — 2022. — Т. 22, вып. 3. — С. 322–331.

МОДИФИКАЦИЯ ОПЕРАТОРА ЛАНДАУ И ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ СПЛАЙНЫ

Г.В. Хромова (Саратов, СГУ)

Khromovagv@sgu.ru

На базе модификации оператора Ландау, предложенной А.П. Хромовым, строится последовательность полиномиальных сплайнов различных степеней, аппроксимирующая непрерывную функцию на отрезке.

Пусть $f(x) \in C[0,1]$ задана набором ее значений $\widehat{f} = \{f_i\}_0^n$, $f_i = f(x_i), i = 0,...,n,\ x_{i+1} = x_i + \frac{1}{n}$.

© Хромова Г.В., 2025

Построим указанную последовательность с помощью оператора:

$$T_n\varphi = \begin{cases} T_{n2}\varphi, & x \in [0, \frac{1}{2}], \\ T_{n1}\varphi, & x \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases} \tag{1}$$

где

$$T_{n1}\varphi = (n+1)\int_0^x (1-(x-t))^n \varphi(t)\, dt,$$

$$T_{n2}\varphi = (n+1)\int_x^1 (1-(t-x))^n \varphi(t)\, dt.$$

Значения этого оператора считаем элементами пространства $L_\infty[0,1]$ с нормой:

$$\|\cdot\|_{L_\infty[0,1]} = max\left\{\|\cdot\|_{C[0,\frac{1}{2}]}, \|\cdot\|_{C[\frac{1}{2},1]}\right\}.$$

Оператор (1) построен А.П. Хромовым на базе предложенного им оператора:

$$K_n\varphi = \frac{n+1}{2}\int_0^1 (1-|x-t|)^n \varphi(t)\, dt,$$

который можно рассматривать как модификацию оператора Ландау:

$$\widetilde{K}_n\varphi = \frac{1}{2J_n}\int_0^1 \left(1-(x-t)^2\right)^n \varphi(t)\, dt, \tag{2}$$

$$J_n = \int_0^1 \left(1-t^2\right)^n\, dt,$$

имеющую более простую конструкцию, чем (2) (см. [1]). Оператор K_n, как и $\widetilde{K}_n$, дает равномерные приближения к непрерывным функциям только на любом внутреннем отрезке из [0,1]. Оператор (1) вводится с целью устранить этот недостаток, и ранее использовался автором для решения некорректных задач [1].

Теорема 1. *Для любой $\varphi(x) \in C[0,1]$ выполняется сходимость:*

$$\|T_n\varphi - \varphi\|_{L_\infty[0,1]} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Теперь строим сплайны по схеме из работы [2], где получен новый класс полиномиальных A-сплайнов на базе разрывного оператора Стеклова.

Применяем оператор T_n к $L_n\widehat{f} : (L_n\widehat{f}(x_i) = f_i, i = 0, ..., n)$.

Теорема 2. *Функция $T_n L_n \widehat{f}$представляет собой полиномиальный сплайн степени n+2, разрывный в точке $x = \frac{1}{2}$. Коэффициенты его выражаются через значения f_k, где $k = i, ..., n$ для $x \in [0, \frac{1}{2}], k = 0, ..., i+1$ для $x \in [\frac{1}{2}, 1]$, и вычисляются из представлений:*

$$T_{n1} L_n \widehat{f} = (n+1)\Big\{\sum_{j=0}^{i-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} (1-(x-t))^n (a_j t + b_j)\, dt + \\ + \int_{x_i}^{x} (1-(x-t))^n (a_i t + b_i)\, dt\Big\};$$

$$T_{n2} L_n \widehat{f} = (n+1)\Big\{\int_{x}^{x_{i+1}} (1-(t-x))^n (a_i t + b_i)\, dt + \\ + \sum_{j=i+1}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} (1-(t-x))^n (a_j t + b_j)\, dt\Big\};$$

при $x \in [x_i, x_{i+1}]; a_i = n(f_{i+1} - f_i), b_i = n(f_i x_{i+1} - f_{i+1} x_i)$.

Теорема 3. *Для любой $f(x) \in C[0,1]$ выполняется сходимость:*

$$\|T_n L_n \widehat{f} - f\|_{L_\infty[0,1]} \to 0, n \to \infty.$$

Пусть вместо $\widehat{f}$ задан набор $\widehat{f_\delta}$ такой, что $\|\widehat{f_\delta} - \widehat{f}\|_{E_{n+1}} \leqslant \delta$, где E_{n+1} — евклидово пространство с нормой $\|\widehat{f}\|_{E_{n+1}} = (\sum_{i=0}^{n} f_i^2)^{\frac{1}{2}}$, либо $\|\widehat{f}\|_{E_{n+1}} = \max_i |f_i|$.

Теорема 4. *Для любой $f(x) \in C[0,1]$ выполняется сходимость:*

$$\|T_n L_n \widehat{f_\delta} - f\|_{L_\infty[0,1]} \to 0, \quad n \to \infty, \quad \delta \to 0. \tag{3}$$

Если норма в E_{n+1}, такова, что сходимость (3) не выполняется, то можно добиться этой сходимости, согласуя n с δ (см. [2]).

Литература

1. Хромов А.П. Об одном семействе операторов с разрывной областью значений в задачах приближения и восстановления непрерывных функций / А.П. Хромов, Г.В. Хромова // Журнал вычис. матем. и матем. физики — 2013. — Т.53, №10. — С. 1603–1609.

2. Хромова Г.В. Разрывный оператор Стеклова и полиномиальные сплайны // Современные проблемы теории функций и их приложения: Саратовский университет. — 2024. — Вып.22 : Материалы

22-ой международной Саратовской зимней школы, посвященной 300-летия РАН — (Саратов, 28.01–31.01 2024) — С. 296–299.

О СПЕКТРЕ СТЕПЕНЕЙ КОНЕЧНОМЕРНОГО ОПЕРАТОРА ФРЕДГОЛЬМА

Ж.Т. Хусенова (Бухара, БухГУ)
j.t.husenova@buxdu.uz

В этой заметке для конечномерного оператора Фредгольма T, действующего в гильбертовом пространстве $L^2[-\pi;\pi]$, определен T^n для любого натурального числа n. Найдены конечномерные и бесконечномерные собственные значения оператора T^n.

В гильбертовом пространстве $L^2[-\pi;\pi]$ рассмотрим интегральный оператор вида

$$(T_i f)(x) = v_i(x) \int_{-\pi}^{\pi} v_i(t) f(t) dt, \quad i = \overline{1,m},$$

где $v_i(\cdot)$, $i = \overline{1,m}$ – вещественнозначные линейно независимые непрерывные функции, определенные на отрезке $[-\pi;\pi]$.

Пусть

$$T := T_1 + \cdots + T_m.$$

Тогда по определению имеет место равенство

$$(Tf)(x) = \sum_{i=1}^{m} v_i(x) \int_{-\pi}^{\pi} v_i(t) f(t) dt.$$

Оператор T, определенный в гильбертовом пространстве $L^2[-\pi;\pi]$, называется n-мерным оператором Фредгольма [1] и это линейный, ограниченный и самосопряженный оператор.

Теорема 1. *Число $\lambda = 0$ является бесконечно кратным собственным значением оператора T.*

Чтобы определить ненулевые собственные значения оператора T введем функцию

$$\Delta(\lambda) := \det\left(\lambda\delta_{ij} - (v_i, v_j)\right), \quad \delta_{ij} := \begin{cases} 1, & \text{если} \quad i = j, \\ 0, & \text{если} \quad i \neq j. \end{cases}$$

Обычно функция $\Delta(\cdot)$ называется определителем Фредгольма оператора T.

© Хусенова Ж.Т., 2025

Следующая теорема устанавливает связь между собственными значениями оператора T и нулями функции $\Delta(\cdot)$.

Теорема 2. *Число $\lambda \neq 0$ является собственным значением оператора T тогда и только тогда, когда $\Delta(\lambda) = 0$.*

Из теорем 1-2 получаем следующие утверждения:

$$\sigma_{\text{ess}}(T) = \{0\}, \ \sigma_{\text{disc}}(T) = \{\lambda \neq 0 : \Delta(\lambda) = 0\},$$
$$\sigma(T) = \sigma_{\text{pp}}(T) = \{0\} \cup \{\lambda \neq 0 : \Delta(\lambda) = 0\}.$$

Таким образом, T - оператор с чисто точечным спектром.

При следующих исследованиях для удобства предположим, что

$$(v_i, v_j) = 0, \ i \neq j, \ i, j = \overline{1, m}. \tag{1}$$

Тогда функцию $\Delta(\cdot)$ можно записать в следующем виде:

$$\Delta(\lambda) = (\lambda - \|v_1\|^2)(\lambda - \|v_2\|^2) \cdots (\lambda - \|v_m\|^2)$$

и согласно теорем 1 и 2 имеем

$$\sigma(T) = \sigma_{\text{pp}}(T) = \{0, \|v_1\|^2, \|v_2\|^2, ..., \|v_m\|^2\}.$$

Можно легко проверит, что если выполняется условие (1), то для любого натурального $n \geqslant 2$ имеет место равенство

$$(T^n f)(x) = \sum_{i=1}^{m} \|v_i\|^{2(n-1)} v_i(x) \int_{-\pi}^{\pi} v_i(t) f(t) dt.$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 3. *Если условие* (1) *выполнено, то для произвольного натурального числа $n \geqslant 2$ оператор T^n имеет чисто точечный спектр и*

$$\sigma(T^n) = \sigma_{\text{pp}}(T^n) = \left\{0, \|v_1\|^{2n}, \|v_2\|^{2n}, ..., \|v_m\|^{2n}\right\}.$$

Теорема 3 важна при изучении числовой области значений оператора T и его степеней [2].

Литература

1. Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н.Колмогоров, С.В.Фомин. — 7-е изд. — М. : Физматлит, 2009. — 570 с.

2. Bahronov B.I. On the numerical range of a Friedrichs model with rank two perturbation: threshold analysis technique / B.I.Bahronov, T.H.Rasulov // AIP Conference Proceedings. — 2023. —**2764 (1)**, — 030007.

СЧЕТНО АППРОКСИМАТИВНО КОМПАКТНЫЕ МНОЖЕСТВА

И.Г. Царьков (Москва, МГУ, механико-математический факультет, Центр фундаментальной и прикладной математики)
tsar@mech.math.msu.su

В этой работе мы изучим свойства чебышевских множеств, состоящих их не более, чем счетного объединения аппроксимативно компактных множеств.

Нам понадобятся следующие обозначения. Для произвольного множества M в некотором линейном нормированном пространстве X через $\varrho(y, M)$ обозначим расстояние до множества M, т.е. величину

$$\inf_{z\in M}\|z-y\| \quad (y\in X).$$

Через P_Mx обозначим множество всех ближайших точек из M для $x\in X$, т.е. множество

$$\{y\in M \mid \|y-x\|=\varrho(x,M)\}.$$

Отображение P_M называют метрической проекцией на множество M. В случае, когда P_Mx одноточечно для всех точек $x\in X$, множество M называют чебышевским. Через

$$B(x,r)=\{y\in X \mid \|y-x\|\leqslant r\} \text{ и } S(x,r)=\{y\in X \mid \|y-x\|=r\}$$

обозначим соответственно шар и сферу с центром x радиуса $r\geqslant 0$. В случае $x=0$ и $r=1$ будем вместо указанных обозначений писать единичные шар и сферу: B и S соответственно. Через $\mathring{B}(x,r)$ обозначим открытый шар в линейном нормированном пространстве $(X,\|\cdot\|)$ с центром x радиуса r, т.е. множество $\{y\in X \mid \|y-x\|<r\}$. Для произвольных $x\in X$ и $\delta>0$ рассмотрим также метрические δ-проекции $P_M^\delta x$ и $\mathring{P}_M^\delta x$, представляющие собой соответственно множества $\{y\in M \mid \|y-x\|\leqslant \varrho(x,M)+\delta\}=M\cap B(x,\varrho(x,M)+\delta)$ и $\{y\in M \mid \|y-x\|<\varrho(x,M)+\delta\}=M\cap \mathring{B}(x,\varrho(x,M)+\delta)$. Для произвольного множества $M\subset X$ через $\operatorname{diam} M$ обозначим диаметр множества M, т.е. величину

$$\sup_{a,b\in M}\|a-b\|.$$

© Царьков И.Г., 2025

Впервые задача о связи аппроксимативной компактности и чебышевских множеств была рассмотрена в работе Н.В. Ефимова и С.Б. Стечкина. Непустое подмножество M из $(X, \|\cdot\|)$ называется аппроксимативно компактным, если любая точка $x \in X$ является точкой аппроксимативной компактности ($x \in AC(M)$), последнее означает, что для любой последовательности $\{v_n\} \subset X$: $\|v_n - x\| \to \varrho(x, M)$ $(n \to \infty)$ существует подпоследовательность $\{v_{n_k}\}$, сходящаяся в X к некоторой точке $v_0 \in M$. Отметим, что в этом случае $v_0 \in P_M(x)$.

Отметим, что для аппроксимативно компактных множеств M выполняется условие $\mathrm{cm}(P_M^\delta(x)) \to 0$ при $\delta \to 0+$, а, если дополнительно, M – чебышевское множество, то $\operatorname{diam} P_M^\delta(x) \to 0$ при $\delta \to 0+$, что отражает важное свойство таких множеств, а именно, свойство устойчивости наилучшего приближения, что безусловно важно в численных методах. Решать соответствующие задачи мы будем в классе пространств $(CLUR)$. Будем писать $X \in (CLUR)$, если для любой последовательности $\{s_n\} \subset X$: $\|s_n\| \to 1$ $(n \to \infty)$ и точки $s \in S$ из условия

$$\left\|\frac{s + s_n}{2}\right\| \to 1 \ (n \to \infty)$$

вытекает, что существует подпоследовательность $\{s_{n_k}\}$, сходящаяся к некоторой точке $s_0 \in S$. Если же из этого условия вытекает, что последовательность $\{s_n\}$ сходится к точке s, то пространство X называется локально равномерно выпуклым, и в этом случае пишут, что $X \in (LUR)$. Отметим, что $(LUR) = (CLUR) \cap (R)$, где через (R) обозначают класс строго выпуклых пространств (т.е. таких пространств, в которых сфера S не содержит нетривиальных отрезков).

Множество называется B-линейно связным ($\mathring{B}$-линейно связным), если его любое непустое пересечение с замкнутым (открытым) шаром является линейно связным множеством. Отметим, что если множество является B-линейно связным множеством, то оно является и $\mathring{B}$-линейно связным множеством, и, конечно, линейно связным.

Теорема 1. *Пусть $X \in (CLUR)$ – банахово пространство, $M = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} M_n$, где M_n – аппроксимативно компактное множество в X. Тогда, если M – чебышевское множество, то M аппроксимативно компактно.*

Следствие 1. *Пусть $X \in (CLUR)$ – банахово пространство, $M = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} M_n$, где M_n – аппроксимативно компактное множество в*

X $(n \in \mathbb{N})$. Тогда, если M – чебышевское множество, то метрическая проекция P_M непрерывное отображение на X.

Следствие 2. *Пусть $X \in (CLUR)$ – банахово пространство, $M = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} M_n$, где M_n – аппроксимативно компактное множество в X $(n \in \mathbb{N})$, и M – чебышевское множество. Тогда множество M является B-линейно связным, а если дополнительно X – гладкое пространство, то M выпукло.*

Следствие 3. *Пусть $X \in (CLUR)$ – банахово пространство, $M = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} L_n$, где L_n – плоскости существования $(n \in \mathbb{N})$, и ни одна из них не содержит другую. Тогда множество M не является чебышевским.*

К АППРОКСИМАТИВНОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ СИСТЕМ[1]

О.Б. Цехан (Гродно, ГрГУ)
tsekhan@grsu.by

The work was supported by state program of scientific research of the Republic of Belarus «Convergence-2025».

Рассмотрим линейную нестационарную сингулярно возмущенную систему управления (ЛНСВС)

$$\dot{z}(t) = A\,(t,\mu)\,z(t) + B\,(t,\mu)\,u(t),\ t \in T = [t_0, t_1],\ z(t_0) = z_0. \qquad (1)$$

Здесь μ — параметр, $\mu \in (0, \mu^0], \mu^0 \ll 1$, $z'(t) = \big(x'(t), y'(t)\big) \in \mathbb{R}^n$, $'$ — символ транспонирования, $n = n_1 + n_2$, $x \in \mathbb{R}^{n_1}$ — вектор медленных переменных, $y(t) \in \mathbb{R}^{n_2}$ — вектор быстрых переменных, $z_0' = (x_0', y_0')$, $x_0 \in \mathbb{R}^{n_1}$, $y_0 \in \mathbb{R}^{n_2}$, $u(t)$, $t \in T$, — скалярная функция управления, $M(t,\mu) = \left[M^0(t) + \mu^{-1}M^1(t)\right]$, $M \in \{A, B\}$, $A^0(t) = \left(\begin{smallmatrix} A_1(t) & A_2(t) \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $A^1(t) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ A_3(t) & A_4(t) \end{smallmatrix}\right)$, $B^0(t) = \left(\begin{smallmatrix} B_1(t) \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $B^1(t) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ B_2(t) \end{smallmatrix}\right)$, $A_i(t) \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_i}$, $A_{i+2}(t) \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_i}$, $B_i(t) \in \mathbb{R}^{n_i}$, $i = 1, 2$, — непрерывные на T матричные функции.

Пусть $F(t,\mu)$ — какая-либо фундаментальная матрица системы $\dot{z}(t) = A\,(t,\mu)\,z(t)$.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь в рамках реализации ГПНИ «Конвергенция-2025».

© Цехан О.Б., 2025

Определение 1. *ЛНСВС (1) имеет класс k на открытом множестве $\Delta \subset T$*, если $n-$вектор-функция $F^{-1}(t,\mu)B(t,\mu)$ k раз непрерывно дифференцируема на Δ.

Пусть $\det A_4(t) \neq 0,\ t \in T$. С ЛНСВС (1) связаны [1] независящие от параметра μ нестационарная «медленная», подсистема $\dfrac{d\overline{x}(t)}{dt} = A_s(t)\overline{x}(t) + B_s(t)\overline{u}(t), \overline{x} \in \mathbb{R}^{n_1}, \overline{u} \in \mathbb{R}, t \in T,\ A_s(t) \triangleq A_1(t) - A_2(t)A_4^{-1}(t)A_3(t),\quad B_s(t) \triangleq B_1(t) - A_2(t)A_4^{-1}(t)B_2(t)$, и σ-параметрическое ($\sigma \in T$) семейство стационарных «быстрых» подсистем $\dfrac{d\tilde{y}(\tau)}{d\tau} = A_4(\sigma)\tilde{y}(\tau) + B_2(\sigma)\tilde{u}(\tau)$, $\tilde{y} \in \mathbb{R}^{n_2}$, $\tilde{u} \in \mathbb{R}$, $\tau = \frac{t-\sigma}{\mu}$.

Пусть зафиксирована некоторая δ-последовательность функций (δ_i) [2; 3 стр. 237] и $\sigma \in T$. Обозначим через $\mathcal{U}_{(i)\sigma}(\mu), \mu \in (0,\mu^0]$, множество скалярных «псевдоимпульсных» функций [4], образующих последовательность $(u_{i\sigma}(t,\mu))$ «быстрых» [4] управлений вида $u_{i\sigma}(t,\mu) = \sum\limits_{j=0}^{n-1} a_j(\mu)\delta_i^{(j)}(t-\sigma)$, $t \in T$, где $a_j(\mu)$ – полиномы по μ.

Определение 2. При фиксированном μ *ЛНСВС (1) аппроксимативно управляема* относительно последовательности $(u_{i\sigma}(t,\mu))$ управлений из $\mathcal{U}_{(i)\sigma}(\mu)$, если она имеет класс $n-1$ на открытом множестве $\Delta \supset T$ и для любых $\sigma \in T$, $z_0 \in \mathbb{R}^n$ и $\varepsilon > 0$ найдется номер $i_0(z_0,\varepsilon)$, такой что решение ЛНСВС (1) удовлетворяет неравенству $||z(\sigma;\mu,z_0,u_{i\sigma}(\cdot,\mu))|| \leqslant \varepsilon$ для любого $i > i_0$.

По параметрам $A^i(t)$, $B^i(t)$, $i = 0,1$, ЛНСВС (1) определим n-вектор-функции $q_i^j(t)$, по параметрам $A_s(t), B_s(t)$, $A_4(t), B_2(t)$ ее подсистем — n_1- и n_2-вектор-функции $q_{si}(t)$, $q_{fi}(t)$, и матрицы $\bar{Q}(t) = \{q_{si}(t),\, i = \overline{0, n_1-1}\}$, $\tilde{Q}(t) = \{q_{fi}(t),\, i = \overline{0, n_2-1}\}$.

Аналогично [5,6] доказан следующий результат.

Теорема. *Если функции $q_i^j(t)$, $i = \overline{0, n-1}$, $j = \overline{0, i}$, непрерывно-дифференцируемы на T, то ЛНСВС (1) имеет класс $n-1$ для любого $\mu > 0$. Если к тому же $rank\,\bar{Q}(t) = n_1$, $rank\,\tilde{Q}(t) = n_2$, для любого $t \in T$, то ЛНСВС (1) аппроксимативно управляема на T при всех достаточно малых $\mu \in (0,\mu^0]$.*

Литература

1. Kokotović P.V. Singular perturbations methods in control: analysis and design / P.V. Kokotović, H.K. Khalil, J. O'Reilly, — NY. Academic Press, 1999. —386 p.

2. Антосик П. Теория обобщенных функций. Секвенциальный подход / П. Антосик, Я. Микусинский, Р. Сикорский. — М.: Мир, 1976. — 312 с.

3. Гайшун И.В. Введение в теорию линейных нестационарных систем / И.В. Гайшун — Мн.: ИМ НАН Беларуси, 1999. — 409 с.

4. Куржанский А.Б. О синтезе импульсных управлений и теории быстрых управлений / А.Б. Куржанский // Труды МИАН. — 2010. — Т. 268. — С.215–230.

5. Астровский А.И. Оценивание состояний линейных нестационарных систем наблюдения / А.И. Астровский, И.В. Гайшун // Дифференц. уравнения. — 2019. — Т. 55, № 3. — С. 370–379.

6. Цехан О.Б. Квазидифференцируемость и равномерная наблюдаемость линейных нестационарных сингулярно возмущенных систем / О.Б. Цехан // Дифференц. уравнения. — 2023. Т. 59, № 8. — С. 1123–1138.

ИССЛЕДОВАНИЕ СЛАБОЙ РАЗРЕШИМОСТИ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ НАВЬЕ-СТОКСА НА ОСНОВЕ МЕТОДА ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

М.В. Чирова (Воронеж, ВГУ)
rita.chirova@yandex.ru

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная, локально–липшицева область. На отрезке времени $[0, T]$, $0 < T < \infty$, рассматривается начально–краевая задача для системы Навье–Стокса:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} u_i \frac{\partial u}{\partial x_i} - \nu \Delta u + \nabla p = f, \ (x,t) \in \Omega \times [0,T]; \tag{1}$$

$$\operatorname{div} u = 0, \qquad (x,t) \in \Omega \times [0,T]; \tag{2}$$

В начальный момент времени задается:

$$u|_{t=0}(x) = a(x), \qquad x \in \Omega, \tag{3}$$

и на границе:

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{4}$$

Искомым решением является вектор-функция скорости u и функция давления $p(x,t)$. Внешние силы определяются функцией $f = f(x,t)$, а ν — положительный коэффициент вязкости.

Следующие пространства потребуются для введения понятия слабого решения. $\mathcal{V} = \{u(x) = (u_1, u_2, u_3) \in C_0^\infty(\Omega)^3 : \operatorname{div} u = 0\}$,

© Чирова М.В., 2025

причем такие пространства называют пространствами соленоидальных функций. V^0 — замыкание $\mathcal{V}$ по норме $L_2(\Omega)^3$, V^1 — замыкание $\mathcal{V}$ по норме $H^1(\Omega)^3$.

В пространстве $W_0 = \{u : u \in L_2(0,T;V^1) \cap L_\infty(0,T;V^0), u' \in L_{4/3}(0,T;V^{-1}) + L_1(0,T,V^0)\}$ сформулируем утверждение о слабой разрешимости первоначальной задачи при некоторых условиях на правую часть системы (1).

Для доказательства существования слабого решения используется аппроксимационно–топологический метод, предложенный в [1] и развитый в [2]–[5], вводится аппроксимационная задача, путем добавления к исходной задаче нового члена $\varepsilon\Delta^2 u$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} v_i \frac{\partial u}{\partial x_i} - \nu\Delta u + \varepsilon\Delta^2 u + \nabla p = f,$$

$$\operatorname{div} u = 0,$$

$$u(0) = a,$$

$$u|_{\partial\Omega} = \Delta u|_{\partial\Omega} = 0.$$

и доказывается её разрешимость, а затем делается предельный переход.

Сформулируем основную теорему.

Теорема 1. *Пусть $f = f_1 + f_2$, $f_1 \in L_2(0,T;V^{-1})$, $f_2 \in L_1(0,T;V^0)$, $a \in V^0$. Тогда начально-краевая задача (1)–(4) имеет, по крайней мере, одно слабое решение $u \in W_0$.*

Литература

1. Zvyagin V.G. Of a some method of investigation of weak solutions for equations of viscouselastic fluids / В. Г. Звягин // Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Проблемы математического образования. Тезисы докладов Международной конференции, посвященной 75-летию члена-корреспондента РАН, профессора Л. Д. Кудрявцева. — Москва, 1998. — 197 с.

2. Звягин В.Г. Аппроксимационно–топологический подход к исследованию математических задач гидродинамики / В. Г. Звягин // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2012. — Т. 46. — С. 92–119.

3. Zvyagin V.G. Topological approximation approach to study of mathematical problems of hydrodynamics / V. G. Zvyagin // Journal of Mathematical Sciences. — 2014. — V. 201, I. 6. — P. 830–858.

4. Звягин В.Г. Об одном варианте аппроксимационно–топологического метода исследования слабой разрешимости системы Навье–Стокса / В. Г. Звягин, А. В. Звягин, М. В. Турбин // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. — 2017. — Т. 3. — С. 104–124.

5. Звягин В.Г. Вариант аппроксимационно–топологического метода исследования слабой разрешимости системы Навье–Стокса на основе параболической регуляризации / В. Г. Звягин, А. В. Звягин, М. В. Турбин // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. — 2017. — Т. 3. — С. 125–142.

ИССЛЕДОВАНИЕ АСИМПТОТИК РЕШЕНИЙ НЕОДНОРОДНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА В НЕРЕЗОНАНСНОМ СЛУЧАЕ

Ш. Чэн (Москва, МГУ)
chengshiyao@cs.msu.ru

Рассмотрим неоднородных уравнений 2-го порядка вида:

$$\left(-r^2\frac{d}{dr}\right)^2 u + a_1(r)\left(-r^2\frac{d}{dr}\right) u + a_0(r)u = f(r), \tag{1}$$

где r — комплексная переменная, $a_0(r)$, $a_1(r)$ — голоморфные функции и удовлетворяющие $a_1^0 \neq 0$, $a_0^0 = 0$, $a_1(r) = a_1^0 + \sum_{i=1}^{\infty} a_1^i r^i$, $a_0(r) = \sum_{i=1}^{\infty} a_0^i r^i$. $f(r) = \exp\left(\frac{\alpha}{r}\right) r^{\sigma} \sum_{i=0}^{\infty} C_i r^i$, $f(r)$ — ресургентная функция. Основной символ $H_0(p) = p^2 + a_1^0 p = p\left(p + a_1^0\right)$ приводится с работы [1]. Число p_j – корни полинома $H_0(p)$. Рассматривается нерезонансный случай, когда α не совпадает с корнями полинома $H_0(p)$. На основе результата [2] даем следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть полином $H_0(p)$ имеет простые корни, тогда асимптотика решения неоднородного уравнения (1) имеет вид*

$$u(r) \approx \sum_{j=1}^{2} \exp\left(\frac{p_j}{r}\right) r^{\sigma_j} \sum_{i=0}^{\infty} b_i^j r^i + \exp\left(\frac{\alpha}{r}\right) r^{\sigma} \sum_{i=0}^{\infty} B_i r^i, \tag{2}$$

где сумма берется по объединению всех корней полинома $H_0(p)$. Числа σ_j и b_i^j определяются так же, как и в однородном случае.

Целью данной работе является вычисление коэффициентов B_i в асимптотиках (2).

© Чэн Ш., 2025

В первом случае $a_1^0 \neq 0$, тогда асимптотика решения имеет вид (2), наша задача состоит в том, чтобы найти коэффициенты B_i, $i = 0, 1, 2, 3, \ldots$, входящие в асимптотику.

Теорема 2.*Коэффициенты $B_i, i \in N_0$ в асимптотики (2) соответствующие простому корню определяются из системы уравнений*

$$B_0 = \frac{C_0}{\alpha^2 + a_1^0\alpha}; B_1 = \frac{C_1 + (2\alpha\sigma - a_1^1\alpha + a_1^0\sigma - a_0^1)B_0}{\alpha^2 + a_1^0\alpha};$$

$$\begin{aligned}
B_2 =& \frac{1}{\alpha^2 + a_1^0\alpha}(C_2 + (a_1^0 + 2\alpha + 2\alpha\sigma - a_1^1\alpha + a_1^0\sigma - a_0^1)B_1 + \\
&+(-\sigma - \sigma^2 - a_1^2\alpha + a_1^1\sigma - a_0^2)B_0; \\
B_3 =& \frac{1}{\alpha^2 + a_1^0\alpha}(C_3 + (2a_1^0 + 4\alpha + 2\alpha\sigma - a_1^1\alpha + a_1^0\sigma - a_0^1)B_2 + \\
&+(-2 + a_1^1 - 3\sigma - \sigma^2 - a_1^2\alpha + a_1^1\sigma - a_0^2)B_1 + \\
&+(-a_1^3\alpha + a_1^2\sigma - a_0^3)B_0); \\
B_m =& \frac{1}{\alpha^2 + a_1^0\alpha}(C_m + ((m-1)\left(a_1^0 + 2\alpha\right) + 2\alpha\sigma - a_1^1\alpha + a_1^0\sigma - \\
&-a_0^1)B_{m-1} + ((m-2)(m-1) + (m-2)\left(a_1^1 - 2\sigma\right) - \sigma - \sigma^2 - \\
&-a_1^2\alpha + a_1^1\sigma - a_0^2)B_{m-2} + ((m-3)\,a_1^2 - a_1^3\alpha + a_1^2\sigma - a_0^3)B_{m-3} + \\
&+ \cdots + (-a_1^{m-1}\alpha + a_1^{m-2}\sigma - a_0^{m-1})B_1 + \\
&+(-a_1^m\alpha + a_1^{m-1}\sigma - a_0^m)B_0, m \in N, m \geqslant 4.
\end{aligned}$$

Данная система разрешима, т.к. на знаменателе стоят ненулевые элемент $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq -a_1^0$.

Пусть теперь $a_1^0 = 0$, тогда рассмотрим ситуацию кратных корней.

Теорема 3.*Любое неоднородное уравнение младших вырождениях с кратным корнем можно привести либо к виду уравнения Фуксова типа, либо к виду уравнения с простыми корнями и его асимптотика решения будет имеет вид*

$$u(r) = \sum_{j=1}^{2} \exp\left(\frac{p_j}{r^{\frac{1}{2}}}\right) r^{\frac{\sigma_j}{2}} \sum_{i=0}^{\infty} b_i^j r^{\frac{i}{2}} + \exp\left(\frac{A}{r^{\frac{1}{2}}}\right) r^{\sigma} \sum_{i=0}^{\infty} B_i r^{\frac{i}{2}}, \qquad (3)$$

где $p_1 = 2\sqrt{a_0^0}$, $p_2 = -2\sqrt{a_0^0}$.

Литература

1. Коровина М.В. Дифференциальные уравнения с вырождением и ресургентный анализ / М.В. Коровина, В.Е. Шаталов // Дифференциальные уравнения. — 2010. — Т. 46, № 9. — С. 1259–1277.

2. Коровина М.В. Асимптотики решений неоднородных уравнений со старшими вырождениями / М.В. Коровина. // Дифференциальные уравнения. — 2013. — Т. 49, № 2. — С. 255–259.

АППРОКСИМАЦИЯ ВЕРОЯТНОСТИ РАЗОРЕНИЯ В МОДЕЛИ КРАМЕРА-ЛУНДБЕРГА МЕТОДАМИ ТЕЙЛОРА И ЛАГРАНЖА

Д.С. Шабалин (Москва, МГУ)

danilshabalin2002@mail.ru

В модели Крамера-Лундберга капитал страховой компании $U(t)$ описывается процессом $U(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$, где $u > 0$ — начальный капитал, c — скорость поступления премий; $N(t)$ — пуассоновский процесс с интенсивностью λ, характеризующий количество исков к моменту времени t; X_i — независимые одинаково распределённые положительные случайные величины с функцией распределения $F(x)$, представляющие размеры убытков.

Основная задача теории риска состоит в нахождении вероятности разорения $\psi(x)$, определяемой как

$$\psi(u) = P\big(\inf_{t\geqslant 0} U(t) < 0 \ \mid U(0) = u\big).$$

Известно [1, стр. 79], что вероятность неразорения $\varphi(x) = 1-\psi(x)$ в условиях чистой прибыли: $c = (1+\theta)\lambda\mu$, где $\mu = \mathbb{E}X_1 < \infty$ и $\theta > 0$, удовлетворяет следующему уравнению восстановления:

$$\varphi(u) = \varphi(0) + \frac{\lambda}{c}\int_0^u \varphi(x)\overline{F}(u-x)\mathrm{d}x, \text{ где } \varphi(0) = \frac{\theta}{1+\theta} \qquad (1)$$

и $\overline{F}(x) = 1 - F(x)$. Для приближённого решения уравнения (1) рассматриваются два подхода, связанных с разложением подынтегральных функций в ряд Тейлора и их аппроксимацией с помощью интерполяционных полиномов.

Интерполяционный многочлен Лагранжа $L_{n-1}(x)$ степени $n-1$, приближающий функцию $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, задаётся как

$$L_{n-1}(x) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Phi_i(x), \text{ где } \Phi_i(x) = \prod_{j=1,\, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}\,,$$

© Шабалин Д.С., 2025

а $\{x_i\}_{i=1}^n \subseteq [a,b]$ сетка узлов. Если интерполировать функцию $\overline{F}(u-x)$, то уравнение (1) сводится к линейному дифференциальному уравнению (ДУ) с постоянными коэффициентами:

$$\varphi^{(n)}(u) = \frac{\lambda}{c}\left(L_{n-1}(0)\varphi^{(n-1)} + L_{n-1}^{(1)}(0)\varphi^{(n-2)} + \ldots + L_{n-1}^{(n-1)}(0)\varphi\right)(u).$$

Решение полностью определяется заданными рекуррентными начальными условиями (2) и приближенно воспроизводит решение уравнения (1) на интервале $[a,b]$.

$$\varphi^{(n)}(0) = \frac{\lambda}{c}\varphi^{(n-1)}(0) - \frac{\lambda}{c}\sum_{k=1}^{n-1} F^{(k)}(0)\varphi^{(n-k-1)}(0),\ n \in \mathbb{N}. \qquad (2)$$

При интерполяции $\varphi(u)$ формируется система линейных уравнений вида $A\varphi^* = b$, где матрица $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ определяется элементами

$$a_{ij} = \delta_{ij} - \frac{\lambda}{c}\int_0^{u_i} \overline{F}(u_i - x)\Phi_j(x)\mathrm{d}x, \text{ где } \delta_{ij} \text{ – символ Кронекера,}$$

вектор $\varphi^* = (\varphi_1^*, \varphi_2^*, \ldots, \varphi_n^*)^T$, и вектор $b = \left(\frac{\theta}{1+\theta}, \ldots, \frac{\theta}{1+\theta}\right)^T$.

Во втором подходе исследуется интерполяция многочленами Тейлора в точке x_0. Так при разложении функции $F(u-x)$ в 0 уравнение принимает вид линейного ДУ с постоянными коэффициентами:

$$\varphi^{(n)}(u) = \frac{\lambda}{c}\left(\varphi^{(n-1)} - F^{(1)}(0)\varphi^{(n-2)} - \ldots - F^{(n-1)}(0)\varphi\right)(u).$$

В случае замены $\varphi(u-x)$ в точке u на многочлен Тейлора, составляется нелинейное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами:

$$\left((-1)^{n+1}\varphi^{(n)}m_n + (-1)^n\varphi^{(n-1)}m_{n-1} + \ldots + \varphi(\frac{c}{\lambda} - m_0)\right)(u) = \frac{\theta}{\mu},$$

где $m_n(u) = \frac{1}{n!}\int_0^u x^n\overline{F}(x)\mathrm{d}x$. Далее аналогичным образом можно вывести соответствующие дифференциальные уравнения для разложения в других точках, наиболее интересными из которых являются 0, x и u.

Доклад посвящён анализу выведенных уравнений, включая их решение в случае малых степеней n. Основное внимание уделяется сравнению полученных результатов с существующими приближениями [1, глава 5, параграф 7], а также с явными решениями (1). Проводится оценка погрешностей предложенных подходов.

Литература

1. Asmussen S., Albrecher H. Ruin Probabilities / S. Asmussen, H. Albrecher. — Princeton: World Scientific Publishing, 2010. — 620 p.

О ВОЗМОЖНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА ФУРЬЕ К СТИЛТЬЕСОВСКОЙ СТРУНЕ С НЕГЛАДКИМИ РЕШЕНИЯМИ И ВЯЗКОУПРУГИМ ОСНОВАНИЕМ

С.А. Шабров, Ж.И. Бахтина, Т.В. Гридяева, Ф.В. Голованёва (Воронеж, ВГУ)

shaspoteha@mail.ru, ioanna83@mail.ru, tatianavit99@mail.ru, gfainav@mail.ru

В работе рассматривается возможность применения метода Фурье для нахождения решения модели малых поперечных колебаний струны, которая помещена в вязкоупругую среду с локализованными особенностями:

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial\sigma}\left(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) -$$

$$-\beta(x,t)\left(u(x,t) - \int\limits_0^t Q(x,t,\tau)u(x,\tau)\,d\tau\right) - \gamma(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + F(x,t) \tag{1}$$

при начально–краевых условиях

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, u(x,0) = \varphi_0(x), \dot u(x,0) = \varphi_1(x), \tag{2}$$

которые приводят к потере гладкости у решения.

Функция $\sigma(x)$ является строго возрастающей функцией, у которой множество точек разрыва $S(\sigma)$ не пусто. Отметим, что в каждой точке $\xi \in S(\sigma)$ уравнение задается следующим образом:

$$\rho(\xi)\frac{\partial^2 u(\xi,t)}{\partial t^2} = \frac{\Delta\left(p\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\Delta\sigma(\xi)}(\xi,t) -$$

$$-\beta(\xi,t)\left(u(\xi,t) - \int\limits_0^t Q(\xi,t,\tau)u(\xi,\tau)\,d\tau\right) - \gamma(\xi,t)\frac{\partial u(\xi,t)}{\partial t} + F(\xi,t), \tag{3}$$

© Шабров С.А., Бахтина Ж.И., Гридяева Т.В., Голованёва Ф.В., 2025

где $\Delta\psi(x) = \psi(x+0) - \psi(x-0)$ — скачок функции $\psi(x)$ в точке x.

Решение задачи (1)–(2) мы ищем в классе E функций $u(x,t)$, непрерывных по совокупности переменных на квадрате $[0,l] \times [0,T]$, каждая из которых при фиксированном x имеет непрерывные частные производные по переменной t до второго порядка включительно; при каждом t функция $u(x,t)$ абсолютно непрерывна на $[0;l]$ по переменной x, производная по пространственной переменной σ-абсолютно непрерывна на $[0,l]$.

Следуя концепции работ [1, 2], нам удобно считать уравнение заданным на специальном расширенном отрезке $[0,l]$, которое строится следующим образом: обозначим через S_A множество всех точек, где $\sigma(x)$ имеет ненулевые простые скачки, то есть имеют несовпадающие левые и правые пределы. Выбросив S_A из $[0,l]$, заменим каждую точку $\xi \in S_A$ парой символов $\{\xi-0, \xi+0\}$. Множество, полученное из $[0,l]$ заменой точек $\xi \in S_A$ на соответствующие пары $\{\xi-0, \xi+0\}$, обозначим через $[0,l]_{(A)}$.

В работе получены достаточные условия возможности применения метода разделения переменных для нахождения решения изучаемой математической модели (1)–(2).

Литература

1. Покорный Ю.В. Осцилляционная теория Штурма-Лиувилля для импульсных задач / Ю.В. Покорный, М.Б. Зверева, С.А. Шабров // Успехи математических наук. — 2008. — Т. 63, № 1. — С. 111–154.

2. Осцилляционный метод Штурма в спектральных задачах / Ю.В. Покорный, Ж.И. Бахтина, М.Б. Зверева, С.А. Шабров. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2009. — 192 с.

ОБ АДАПТАЦИИ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ ОДНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПЯТОГО ПОРЯДКА

Е.А. Шайна (Воронеж, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина»)
katerinashaina@mail.ru

В работе метод конечных элементов адаптируется для нахождения приближенного решения математической модели пятого поряд-

© Шайна Е.А., 2025

ка

$$\begin{cases} \frac{d}{d\sigma}[((-pu'''_{xx\mu})'_x + ru''_{xx})'_x - gu'_x] + uq = f'_0; \\ u(0) = u'_x(0 = u''_{xx}(0) = 0); \\ u(f) = u'(f) = 0; \end{cases} \tag{1}$$

при выборе базисных функций соответствующим образом. Получены оценки близости приближенного решения, найденного с помощью этого метода, и точного.

При этом, на протяжении всей работы мы предполагаем выполненными следующие условия: 1) $\inf\limits_{[0;\xi_1)} p(x) > 0$; $p(x) \equiv 0$ на $[\xi_1; l]$; 2) $r(x) \geqslant 0$ для всех $x \in [0; l]$; $\inf\limits_{(\xi_2; l]} r(x) > 0$; 3) $g(x) \geqslant 0$ для всех $x \in [0; l]$; $\inf\limits_{(\xi_1;\xi_2)} g(x) > 0$; 4) функции x, $\mu(x)$, $p(x)$, $\pi(x)$, $g(x)$, $q(x)$, $\theta(x - \xi_i)$ $(i = 1, 2)$ — σ–абсолютно непрерывны на $[0; l]$, где $\theta(x)$ — функция Хевисайда, равная 0, если $x < 0$, и 1, если $x > 0$.

Мы считаем, что уравнение задано почти всюду на расширении отрезка $[0, \ell]$ в котором каждая точка ξ разрыва функции $\sigma(x)$ заменена на тройку собственных элементов $\{\xi - 0, \xi, \xi + 0\}$. Обозначим через $S(\sigma)$ — множество тоек разрыва функции $\sigma(x)$. Пусть $I = [0; \ell] \setminus S(\sigma)$, где $S(\sigma)$ — множество точек разрыва функции $\sigma(x)$ и $\rho(x, y) = |\sigma(x) - \sigma(y)|$ — метрика на I. Если $S(\sigma) \neq \varnothing$, то метрическое пространство (I, ρ) — неполное. Обозначим через $\overline{[0; \ell]}_S$ — стандартное пополнение (I, ρ) до полного метрического пространства. В $\overline{[0; \ell]}_S$ каждая точка $\xi \in S(\sigma)$ заменена на пару собственных элементов $\{\xi - 0; \xi + 0\}$. Уравнение (1) задано на $\overline{[0; \ell]}_\sigma = \overline{[0; \ell]}_S \cup S(\sigma)$. Отметим, что для первого уравнения в ξ_1 — точке соединения стержня, помещенного на «двойное» упругое основание и растянутой струны, должны выполняться четыре условия: $u(\xi_1 - 0) = u(\xi_1 + 0)$, $pu'''_{xx\mu}(\xi_1 - 0) = 0$, $\left(pu'''_{xx\mu}\right)'_x (\xi_1 - 0) - (ru''_{xx})(\xi_1 - 0) = 0$, $\left(pu'''_{xx\mu}\right)''_{xx} (\xi_1 - 0) - (ru''_{xx})'_x (\xi_1 - 0) + gu'_x(\xi_1 - 0) - gu'_x(\xi_1 + 0) + u(\xi_1)q(\xi_1) = 0$; а в ξ_2 — точке соединения натянутой струны и стержня три условия: $u(\xi_2 - 0) = u(\xi_2 + 0)$, $ru''_{xx}(\xi_2 + 0) = 0$, $(ru''_{xx})'_x (\xi_2 + 0) + gu'_x(\xi_2 - 0) - gu'_x(\xi_2 - 0) + u(\xi_2)q(\xi_2) = 0$; в точках $\xi \in S(\sigma) \bigcap (0; \xi_1)$ должны выполняться шесть условий: $u(\xi - 0) = u(\xi + 0)$, $u'_x(\xi - 0) = u'_x(\xi + 0)$, $pu'''_{xx\mu}(\xi - 0) = pu'''_{xx\mu}(\xi + 0) = 0$, $(pu'''_{xx\mu})'_x(\xi - 0) = (pu'''_{xx\mu})'_x(\xi + 0)$, $-\Delta(pu'''_{xx\mu})''_{xx}(\xi) + \Delta(ru''_{xx})'_x(\xi) - \Delta gu'_x(\xi) + u(\xi)q(\xi) = 0$, здесь и далее, $\Delta\varphi(x) = \varphi(x + 0) - \varphi(x - 0)$ — полный скачок функции $\varphi(x)$ в точке x; если $\xi \in S(\sigma) \bigcap (\xi_1; \xi_2)$, то два условия: $u(\xi - 0) = u(\xi + 0)$, $-\Delta(gu'_x)(\xi) + u(\xi)q(\xi) = 0$; и, наконец, если $\xi \in S(\sigma) \bigcap (\xi_2; \ell)$, то четыре условия: $u(\xi-0)=u(\xi+0)$, $ru''_{x\mu}(\xi-0)=ru''_{x\mu}(\xi+0)=0$, $\Delta r(u''_{x\mu})'_x(\xi)-\Delta(gu'_x)(\xi)+u(\xi)q(\xi)=0$.

Решение задачи (1) мы ищем в классе E: абсолютно непрерывных на $[0;\ell]$ функций, первая производная которых абсолютно непрерывны на $[0;l]$, первая производная $u'_x(x)$ непрерывно дифференцируемая на $[0;\xi_1]$, u''_{xx} — μ–абсолютно непрерывная на $[0;\xi_1]$, $pu'''_{xx\mu}(x)$ — абсолютно непрерывная на $[0;\xi_1]$; $-(pu'''_{xx\mu})'_x(x)+ru''_{xx}(x)$ — абсолютно непрерывная $[0;\xi_1]$, $(-(pu'''_{xx\mu})'_x+ru''_{xx})'_x(x)-g(x)u(x)$ — абсолютно непрерывна на $[0;\xi_1]$; $u'_x(x)$ абсолютно непрерывна на $[\xi_2;l]$, $(ru''_{xx})(x)$ — абсолютно непрерывна на $[\xi_2;\ell]$; $(ru''_{xx})'_x(x)-g'_xu$ — σ-абсолютно непрерывна на $[\xi_2;\ell]$; $u'_x(x)$ — σ-абсолютно непрерывна на $[\xi_1;\xi_2]$.

Литература

1. Об адаптации метода конечных элементов для математической модели шестого порядка / А. Д. Баев, Е. А. Бородина, Ф. В. Голованева, С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2018. — № 3. — С. 77–90.

2. Шабров, С. А. Адаптация метода конечных элементов для математической модели с негладкими решениями / С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2016. — № 2. — С. 153–164.

ИНВАРИАНТНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ ДЛЯ СИСТЕМ С ДИССИПАЦИЕЙ

М.В. Шамолин (Москва, МГУ имени М. В. Ломоносова)
shamolin@rambler.ru, shamolin.maxim@yandex.ru

Получены новые случаи интегрируемых однородных по части переменных динамических систем, в которых может быть соответственно выделена система на касательном расслоении к конечномерному многообразию. При этом силовое поле разделяется на внутреннее (консервативное) и внешнее, которое обладает диссипацией разного знака. Внешнее поле вводится с помощью некоторого унимодулярного преобразования и обобщает ранее рассмотренные поля. Приведены полные наборы как первых интегралов, так и инвариантных дифференциальных форм (и максимального ранга, являющихся плотностью меры фазового пространства, и линейных, позволяющих получить первые интегралы).

© Шамолин М.В., 2025

Нахождение достаточного количества тензорных инвариантов (не только автономных первых интегралов), как известно [1, 2], облегчает исследование, а иногда позволяет точно проинтегрировать систему дифференциальных уравнений. Например, наличие инвариантной дифференциальной формы фазового объема позволяет уменьшить количество требуемых первых интегралов. Для консервативных систем этот факт естествен, когда фазовый поток сохраняет объем с постоянной плотностью. Но для систем, обладающих притягивающими или отталкивающими предельными множествами, коэффициенты имеющихся инвариантов должны, вообще говоря, включать функции, обладающие существенно особыми точками (см. также [3, 4, 5]). Наш подход состоит в том, что для точного интегрирования автономной системы порядка m надо знать $m-1$ независимый тензорный инвариант. При этом для достижения точной интегрируемости приходится соблюдать также ряд дополнительных условий на эти инварианты.

Важные случаи интегрируемых систем с малым числом степеней свободы в неконсервативном поле сил рассматривались в работах автора [5, 6]. Настоящее исследование распространяет результаты этих работ на более широкий класс динамических систем.

В данной работе приведены первые интегралы, а также инвариантные дифференциальные формы классов однородных по части переменных динамических систем, в которых может быть выделена система с конечным числом степеней свободы на своем фазовом многообразии. При этом силовое поле разделяется на внутреннее (консервативное) и внешнее, которое обладает так называемой знакопеременной диссипацией. Внешнее поле вводится с помощью некоторого унимодулярного преобразования и обобщает силовые поля, рассматриваемые ранее.

Литература

1. Колмогоров А.Н. О динамических системах с интегральным инвариантом на торе / А.Н. Колмогоров // Доклады АН СССР. — 1953. — Т. 93, № 5. — С. 763–766.

2. Козлов В.В. Тензорные инварианты и интегрирование дифференциальных уравнений / В.В. Козлов // Успехи матем. наук. — 2019. — Т. 74, № 1. — С. 117–148.

3. Шамолин М.В. Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия / М.В. Шамолин // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. — 2020. — Т. 495, № 1. — С. 84–90.

4. Шамолин М.В. Инвариантные формы геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении конечномерного многообразия / М.В. Шамолин // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. — 2023. — Т. 512, № 1. — С. 10–17.

5. Шамолин М.В. Инвариантные формы объема геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении четырехмерного многообразия / М.В. Шамолин // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. — 2023. — Т. 509, № 1. — С. 69–76.

6. Шамолин М.В. Инвариантные формы объема систем с тремя степенями свободы с переменной диссипацией / М.В. Шамолин // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления — 2022. — Т. 507, № 1. — С. 86–92.

ОБ ОДНОЗНАЧНОЙ ОПРЕДЕЛЕННОСТИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Н.А. Шананин (Москва, ГУУ)
nashananin@inbox.ru

Пусть

$$P = \sum_{k,j=1}^{n} a_{k,j}(x) D_k D_j + \sum_{k=1}^{n} a_k(x) D_k + a_0(x)$$

— линейный дифференциальный оператор с вещественно аналитическими коэффициентами, определенный в открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $a_{k,j}(x) = a_{j,k}(x)$, $D_k = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_k}$ (обозначения см. [1]). Предположим, что коэффициенты $a_{k,j}(x)$ вещественнозначны и

(1) матрица $(a_{k,j}(x))_{k,j=1}^{n}$ имеет постоянный ранг при $x \in \Omega$;

(2) квадратичная форма $Q_x(\xi) = \sum_{k,j=1}^{n} a_{k,j}(x)\xi_k\xi_j$ не строго знакоопределена $\xi \in T_x^*\Omega$.

Если коэффициенты старшего символа оператора удовлетворяют условиям (1) и (2), то множество $L(P) = \{(x,\tau) \in T\Omega \,|\, x \in \Omega \text{ и } \xi(\tau) = 0 \text{ при } Q_x(\xi) = 0\}$ образует подрасслоение в касательном расслоении $T\Omega$. Через $\mathcal{L}(P)$ обозначим дифференциальную систему, порожденную $L(P)$, то есть подмодуль C^∞-сечений подрасслоения

© Шананин Н.А., 2025

$L(P)$ модуля C^∞-сечений $\mathcal{T}\Omega$ касательного расслоения $T\Omega$. Дифференциальная система $\mathcal{L}(P)$ порождает в C^∞-модуле $\mathcal{T}\Omega$ сечений касательного расслоения фильтрацию C^∞-подмодулей $\mathcal{H}^j$, в которой первый элемент $\mathcal{H}^1 = \mathcal{L}(P)$, а последующие подмодули $\mathcal{H}^{j+1}$ порождаются векторными полями из $\mathcal{L}(P)$ и коммутаторами векторных полей вида $[\mathcal{L}(P), \mathcal{H}^j]$. Дифференциальную систему $\mathcal{L}(P)$ называют вполне неголономной, если найдется такое натуральное число m, что $\mathcal{L}(P) = \mathcal{H}^1 \subset \mathcal{H}^2 \subset \ldots \subset \mathcal{H}^m = \mathcal{T}\Omega$. Дополнительно к условиям (1) и (2) предположим, что

(3) дифференциальная система $\mathcal{L}(P)$ вполне неголономна.

Говорят, что обобщенные функции $u^1(x)$ и $u^2(x) \in \mathcal{D}'(\Omega)$ равны на открытом множестве $U \subset \Omega$, если $\langle u^1, \varphi\rangle = \langle u^2, \varphi\rangle$ для любой основной функции $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\Omega)$ с носителем, содержащимся в U. Говорят, что ростки функций $u^1(x)$ и $u^2(x)$ равны в точке $x^0 \in \Omega$ и пишут $u^1_{x^0} \cong u^2_{x^0}$, если $u^1(x) = u^2(x)$ в некоторой открытой окрестности точки x^0.

Теорема 1. *Пусть оператор P удовлетворяет условиям* (1), (2) *и* (3). *Тогда, если $u^1_{x^0} \cong u^2_{x^0}$ в некоторой точке $x^0 \in \Omega$, то $u^1(x) = u^2(x)$ в линейно связной компоненте $\mathcal{V}_{x^0}$ открытого множества $\{x \in \Omega \,|\, Pu^1 = Pu^2\}$, содержащей x^0.*

Главный символ оператора второго порядка

$$L = D^2_{x_1} + (D_{x_2} - x_1 D_{x_3})^2 - D_{x_3} + d(x),\ x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,$$

удовлетворяет условиям (1) и (2). Дифференциальная система $\mathcal{L}(P)$ порождается векторными полями $X^1 = \frac{\partial}{\partial x_1}$ и $X^2 = \frac{\partial}{\partial x_2} - x_1\frac{\partial}{\partial x_3}$. Поскольку коммутатор $[X^1, X^2] = -\frac{\partial}{\partial x_3}$, то $\mathcal{L}(P) = \mathcal{H}^1 \subset \mathcal{H}^2 = \mathcal{T}\mathbb{R}^3$, то есть дифференциальная система $\mathcal{L}(P)$, индуцированная главным символом оператора, вполне неголономна. Из теоремы 1 следует, что равенство нулю ростка решения уравнения $Lu = 0$ в некоторой точке влечет равенство $u = 0$ в $\mathbb{R}^3$, если коэффициент $d(x)$ является вещественно аналитической функцией. Если последнее условие нарушено, то утверждение не верно. Точнее

Теорема 2. *Существует коэффициент $d(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, такой, что уравнение $Lu = 0$ имеет нетривиальное решение $u(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, равное нулю при $x_1 \leqslant 0$, носитель которого содержит гиперплоскость $x_1 = 0$.*

Теоремы о продолжении решений линейных уравнений высокого порядка с вещественно аналитическими коэффициентами опубликованы в статье [2]. В статье [3] построен контрпример к продолжению для случая гладких коэффициентов.

Литература

1. Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. (т. 1)/ Л. Хермандер. — М. : Мир, 1986. — 464 с.

2. Шананин Н.А. О продолжении решений линейных уравнений с аналитическими коэффициентами / Н.А. Шананин // Матем. заметки — 2022. — Т. 111, № 6. — С. 921–928.

3. Шананин Н.А. К продолжению ростков решений / Н.А. Шананин // Матем. заметки — 2024. — Т. 115, № 4. — С. 619–625.

ИССЛЕДОВАНИЕ СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ФУНКЦИЯМИ ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ[1]

А.Н. Шелковой (Воронеж, ВГТУ)
shelkovoj.aleksandr@mail.ru

Пусть $L_2[0,2\pi]$ — гильбертово пространство комплексных измеримых (классов) функций, суммируемых с квадратом модуля со скалярным произведением вида $(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} x(\tau)\overline{y(\tau)}d\tau$. Через $W_2^2[0,2\pi]$ обозначим пространство Соболева $\{x \in L_2[0,2\pi] : x'$ абсолютно непрерывна, $x'' \in L_2[0,2\pi]\}$.

Рассматривается дифференциальный оператор

$$\mathcal{L}\colon D(\mathcal{L}) \subset L_2[0,2\pi] \to L_2[0,2\pi],$$

задаваемый дифференциальным выражением вида

$$(\mathcal{L}y)(t) = -\ddot{y}(t) \ + \ y(t)$$

с областью определения $D(\mathcal{L}) = \{x \in W_2^2[0,2\pi],\ x(0) = x(2\pi),\ \dot{x}(0) = \dot{x}(2\pi)\}$ и нелокальными краевыми условиями

$$y(0) = y(2\pi) \ + \ \int\limits_0^{2\pi} a_0(t)y(t)dt;\ y(1) = \dot{y}(2\pi) \ + \ \int\limits_0^{2\pi} a_1(t)y(t)dt,$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00732).

© Шелковой А.Н., 2025

где a_0 и a_1 — функции из $L_2[0, 2\pi]$. Считается, что функции a_0 и a_1 являются функциями ограниченной вариации на отрезке $[0, 2\pi]$.

Так как собственные значения оператора $\mathcal{L}$ и ему сопряжённого оператора $\mathcal{L}^*$ связаны соотношением $\lambda = \overline{\lambda}$, то для исследования спектра оператора $\mathcal{L}$ рассматривается сопряжённый ему оператор

$$(\mathcal{L}^* x)(t) = -\ddot{x}(t) \ + \ x(t) \ - \ [\dot{x}(2\pi)a_0(t) \ - \ x(2\pi)a_1(t)] \qquad (1)$$

с краевыми условиями $x(0) = x(2\pi),\ \dot{x}(0) = \dot{x}(2\pi)$.

Методом изучения спектральных свойств данного класса является метод подобных операторов, рассматриваемый в работах [1-5].

Для исследования спектральных свойств сопряжённого оператора (1) представим его в виде $\mathcal{L}^* x = Ax - Bx$. Оператор A является самосопряжённым оператором с дискретным спектром, собственное значение которого $\lambda_0 = 1$ является простым, а остальные собственные значения $\lambda_n = n^2 + 1,\ n \geqslant 1$, двукратны, соответствующие собственные функции $e_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ e_{2n-1}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nt,\ e_{2n}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nt,\ n \in \mathbb{N}$, образуют ортонормированный базис в $L_2[0, 2\pi]$.

Будем считать оператор A невозмущённым оператором, а оператор B — возмущением. Оператор B задаётся соотношением

$$(Bx)(t) = \dot{x}(2\pi)a_0(t) \ - \ x(2\pi)a_1(t),\ x \in D(A),\ t \in [0, 2\pi].$$

Методом подобных операторов получены оценки собственных значений, а также доказана сходимость спектральных разложений исследуемого класса операторов.

Литература

1. Баскаков А.Г. Гармонический анализ линейных операторов / А.Г. Баскаков. — Воронеж : Изд-во ВГУ, 1987. — 165 с.

2. Шелковой А.Н. Спектральные свойства дифференциального оператора, определяемого нелокальными краевыми условиями / А.Н. Шелковой // Математическая физика и компьютерное моделирование. — 2018. — Т. 21, № 4. — С. 18–33.

3. Шелковой А.Н. Спектральный анализ интегро-дифференциального оператора с вырожденным ядром / А.Н. Шелковой // Математическая физика и компьютерное моделирование. — 2020. — Т. 23, № 3. — С. 76–89.

4. Шелковой А.Н. Метод подобных операторов в исследовании интегро-дифференциальных операторов с квадратично суммируемым ядром / А.Н. Шелковой // Вопросы науки. — 2016. — Т. 2. — С. 68–80.

5. Шелковой А.Н. Спектральные свойства дифференциальных операторов, определяемых нелокальными краевыми условиями / А.Н. Шелковой // Вопросы науки. — 2016. — Т. 3. — С. 83–90.

ДВЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МЕЙЕРА: НОВЫЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА И ОБОБЩЕНИЯ

И.А. Шилин (Москва, НИУ МЭИ)
ilyashilin@li.ru

Найдены [1] принципиально новые доказательства известных ранее формул

$$\int_0^{+\infty} K_{-\sigma-1/2}(\mu)\, J_{-\sigma-1/2}(\mu)\, \mathrm{d}\mu = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(-\sigma/2)}{4\,\Gamma\left(\frac{1-\sigma}{2}\right)} \tag{1}$$

и

$$\int_0^{+\infty} \mu^{-1/2}\, K_{\sigma+1/2}(\mu)\, \mathrm{d}\mu = 2^{-3/2}\,\Gamma(-\sigma/2)\,\Gamma\left(\frac{1+\sigma}{2}\right), \tag{2}$$

в которых $-1 < \Re(\sigma) < 0$, J_ν — функция Бесселя первого рода, K_ν — модифицированная функция Бесселя второго рода (функция Макдональда). В отличие от известных ранее доказательств, эти формулы выводятся из формул перехода от одного из базисов пространства представления связной компоненты G нейтрального элемента группы $\mathrm{diag}(1,-1,-1)$-матриц к другому базису того же пространства при применении линейного оператора Q, сплетающего это представление с представлением в другом линейном пространстве. Здесь a-матрицей для всякой квадратной матрицы a называется невырожденная квадратная матрица b, удовлетворяющая условию $bab^{\mathrm{T}} = a$.

Например, формула (1) получается при $\lambda = \rho = 0$ из формулы для интегрального оператора

$$Q\, f^{(3)*}_{\lambda,+}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} k_2(\lambda,+,\mu)\, Q\, f^{(4)*}_{\mu}(y),\, \mathrm{d}\mu \tag{3}$$

где $f^{(3)*}_{\lambda,+}$ — функции, принадлежащие «гиперболическому» базису пространства представления, $f^{(4)*}_{\mu}$ — функции, принадлежащие другому базису того же линейного пространства, ядро $k_2(\lambda,+,\mu)$ выполняет роль коэффициента, матричного элемента оператора перехода

© Шилин И.А., , 2025

между базисами, а $y = (\cosh\rho, \sinh\rho\cos\mu, \sinh\rho\sin\mu)$ — точка гиперболоида $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 = 1$, на котором определены функции, являющиеся элементами второго пространства представления. При нашем подходе формула (1) получается в виде

$$\int\limits_0^{+\infty} K_{-\sigma-1/2}(\mu)\, J_{-\sigma-1/2}(\mu)\, \mathrm{d}\mu = \frac{\Gamma^2(-\sigma/2)}{2^{\sigma+3}\,\Gamma(-\sigma)}, \tag{4}$$

но

$$\frac{\Gamma^2(-\sigma/2)}{2^{\sigma+3}\,\Gamma(-\sigma)} = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma^2(-\sigma/2)}{2^{\sigma+3}\cdot 2^{-\sigma-1}\,\Gamma(-\sigma/2)\,\Gamma\left(\frac{1-\sigma}{2}\right)} = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(-\sigma/2)}{4\,\Gamma\left(\frac{1-\sigma}{2}\right)},$$

то есть наш результат (3) совпадает с известным равенством (1)

Кроме того, выведены обобщения формул (1) и(2). Они получаются, если от частных (нулевых) значений параметров в формулах интегральных операторов с участием сплетающего оператора Q перейти к общим значениям. Так, из формулы (2) для любых действительных значений λ и ρ получено следующее обобщение формулы (1):

Теорема 1. *При* $-1 < \Re(\sigma) < 0$

$$\int\limits_0^{+\infty} \mu^{-1/2}\,\cos(\mu\,\tanh\rho)\,F_{-\lambda,-\sigma-1}(\mu)\,K_{\sigma+1/2}(\mu/\cosh\rho)\,\mathrm{d}\mu$$
$$= \frac{\sqrt{\pi}\,\mathrm{e}^{\lambda\pi/2}\,\Gamma\left(\frac{\mathbf{i}\rho-\sigma}{2}\right)\,\Gamma\left(-\frac{\mathbf{i}\rho+\sigma}{2}\right)\,\sqrt{\Gamma(-1-\sigma-\mathbf{i}\lambda)\,\Gamma(-1-\sigma+\mathbf{i}\lambda)}}{\sqrt{2\cosh\rho}\,\Gamma(-\sigma-\mathbf{i}\lambda)\,\Gamma(-\sigma+\mathbf{i}\lambda)},$$

где $F_{-\lambda,-\sigma-1}$ *— волновая функция Кулона.*

Аналогичное обобщение формулы (2) имеет вид:

Теорема 2. *При* $-1 < \Re(\sigma) < 0$

$$\int\limits_0^{+\infty} \mu^{\mathbf{i}\lambda-1/2}\,K_{\sigma+1/2}(\mathrm{e}^{-\rho}\,\mu)\,\mathrm{d}\mu = \frac{\sqrt{\pi}\,\sec\frac{(\sigma+\mathbf{i}\lambda)\pi}{2}\,\Gamma\left(\frac{\mathbf{i}\rho-\sigma}{2}\right)\,\Gamma\left(-\frac{\mathbf{i}\rho+\sigma}{2}\right)}{2^{\sigma+5/2}\,\mathrm{e}^{\rho(1.2-\mathbf{i}\lambda)}\,\Gamma(-\sigma-\mathbf{i}\lambda)}.$$

Литература

1. Shilin I.A. Some formulas for Bessel functions related to $\mathrm{diag}(1,-1,-1)$-matrices and an intertwining operator / I.A. Shilin, J. Choi // Integral Transforms and Special Functions. — 2025.

О ЦЕЛЯХ И КРИТЕРИЯХ

В.А. Шишкин (Пермь, ПГНИУ)
vsh1791@mail.ru

Одним из самых первых этапов при построении (или даже перед построением) математической модели исследуемой системы S является определение цели или, вернее, даже группы целей. Во-первых, требуется определить цель самой системы G_S, так как именно она определяет её поведение. Во-вторых, обязательно следует указать цель исследователя (наблюдателя) G_O — для чего он хочет построить модель, какую проблему, связанную с S, он хочет решить, исследуя данную модель. Сам вид модели существенно зависит от точки зрения наблюдателя.

Заметим, что цели можно разделить на объективные G', субъективные G'' и декларируемые G'''. Совершенно необязательно эти цели будут совпадать, однако именно объективная цель G'_S определяет поведение системы.

При определении цели исследователя G_O, а также возможности её достижения, следует учитывать, где находится наблюдатель по отношению к системе. Это определяется объёмом доступной ему информации, а также множество доступных управляющих воздействий на неё. При этом следует различать случаи, когда исследователь O строит модель для собственного потребления, и когда он работает по заказу некоторого другого лица O'. Во втором случае, очевидно, следует ориентироваться уже на цели $G_{O'}$.

После опреления множеств G_S и G_O (или $G_{O'}$) следует определить наборы соответствующих критериев. Известно, что нельзя управлять тем, что невозможно измерить (или хотя бы оценить). Предпожим, что состояние системы S в момент времени t описывается набором значений $S(t)$, а также известно целевое состояние S_G. Требуется построить некоторый функционал $F\colon S \times T \to \mathbb{R}^m$, $m \geqslant 1$, позволяющий оценить, например, качество системы или расстояние до цели в определённый момент времени t, а может быть интегральное качество поведения системы на заданном временном интервале $[t_1, t_2]$. При этом следует учитывать различие между реальной (объективной) системой S и её моделью (идеальным, субъективным представлением наблюдателя) $\mathrm{Ideal}_O\, S$ — в ходе исследования рассматривается не S_G, а $\mathrm{Ideal}_O\, S_G$ и, следовательно, используется $F(\mathrm{Ideal}_O\, S)$.

© Шишкин В.А., 2025

Предположим, что решение проблемы (например, набор значений управляющих воздействий, обеспечивающих достижение $\mathrm{Ideal}_O\, S_G$ из $\mathrm{Ideal}_O\, S(t_0)$) найдено. Тогда при реализации этого решения в реальности будет получено некоторое приближение $\tilde{S}_G$, не совпадающее с S_G, причём оценка полученного (объективного) результата выполняется по (субъективному) представлению $\mathrm{Ideal}_O\, \tilde{S}_G$ о нём.

Таким образом *мнение* о результате (объективного) преобразования $S(t_0) \to S_G$ зависит от разницы (субъективных) представлений $\mathrm{Ideal}_O\, S_G$ (что ожидалось) и $\mathrm{Ideal}_O\, \tilde{S}_G$ (что было получено).

Если функционал F содержит *объективные* инструменты, позволяющие *измерить* значения переменных и параметров, определяющих состояние S, то в этом случае можно определить разницу между $\mathrm{Ideal}_O\, S_G$ и S_G. Если же F использует *качественные* оценки, значения которых зависят от субъекта O, то сравниваться будут именно субъективные представления $\mathrm{Ideal}_O\, S_G$ и $\mathrm{Ideal}_O\, \tilde{S}_G$. Заметим, что при оценке другими субъектами $O_1, \ldots, O_n$ результата реализации $\tilde{S}_G$, с $\mathrm{Ideal}_O\, S_G$ (результат, декларируемый O) сравниваться будут уже представления $\mathrm{Ideal}_{O_i}\, \tilde{S}_G$. При этом в качестве оценочного функционала каждый субъект O_i будет использовать свой набор критериев F_i.

Дополнительно заметим, что при определении целей G_S и G_O следует учитывать возможность использования нескольких горизонтов планирования (динамическое программирование), а также то, что система S может быть (и даже наверняка является) составной частью надсистемы $\mathbf{S}$ (многоуровневая оптимизация). При этом определение G_S (цель первого порядка) может существенно зависеть от определения $G_{\mathbf{S}}$ (цель второго порядка), а также от наличия целей более высоких порядков.

Литература

1. Акофф Р. О целеустремлённых системах / Р. Акофф, Ф. Эмери. — М. : Советское радио, 1974. — 272 с.

2. Гастев Ю.А. Гомоморфизмы и модели (Логико-алгебраические аспекты моделирования) / Ю.А. Гастев. — М. : Наука, 1975. — 152 с.

3. Пегат А. Нечёткое моделирование и управление / А. Пегат. — 2-е изд. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2013. — 798 с.

4. Трухаев Р.И. Модели принятия решений в условиях неопределённости / Р.И. Трухаев. — М. : Наука, 1981. — 258 с.

ПРЕПОДАВАНИЕ МАТЕМАТИКИ: О ЦЕЛЯХ И КРИТЕРИЯХ

В.А. Шишкин (Пермь, ПГНИУ)
vsh1791@mail.ru

С точки зрения общей теории систем проблему обучения математике можно формально представить в виде упорядоченного набора

$$\langle S, G, E, T, O \rangle$$

где под S будем понимать ученика, а G — его цель; E — среда, в которой находится S (то, что влияет на S или испытывает влияние S); $T = [t_0, t_1]$ — временной интервал, на котором рассматривается обучение; O — наблюдатель, в частности учитель.

При формировании цели (и G, и цели наблюдателя G_O) следует учитывать, что:

1. поведение системы определяется *объективной* целью G, в то время как *субъективная* цель G', отвечающая за внутреннюю мотивацию, и *декларируемая* цель G'' могут отличаться от G;
2. цель зависит от момента её формулирования и от горизонта планирования;
3. цель системы G зависит от воздействия внешней среды (другими словами, цель системы S определяется влиянием надсистемы $\mathbf{S}$, в которую S входит как подсистема).

Возможно, начинать целеполагание нужно с определения (объективной!) цели надсистемы $G_{\mathbf{S}}$: для чего с точки зрения $\mathbf{S}$ нужно математическое образование. При этом S может быть подсистемой нескольких надсистем $\mathbf{S}_1, \ldots, \mathbf{S}_n$, цели которых могут быть сонаправлены, а могут противоречить друг другу.

Внутренняя мотивация при обучении определяется субъективной целью G' — пониманием того, для чего нужны эти знания. Это понимание есть далеко не всегда, даже у студентов вузов.

Неразвивающиеся системы деградируют — только постоянное использование знаний позволят сохранить их в памяти. Не только во время обучения, но и в дальнейшей жизни.

Для оценивания качества S в момент времени t используется набор критериев $F\colon S \to X$, где $X = \{0, 1\}$ (зачёт/незачёт) или $X \subset \mathbb{N}$

© Шишкин В.А., 2025

(дифференцированный зачёт). Заметим, что F не *измеряет* объём знаний, а *оценивает* $S(t)$. Это *качественная* (порядковая) величина и к ней нельзя применять арифметические операции.

> Вычисление среднего балла как среднего арифметического значения — грубейшая ошибка!!!

При формулировании критериев оценивания, возможно, следует использовать методы принятия решений в условиях неопределённости. Представляется полезным применение подходов, предназначенных для работы с субъективной неопределённостью: нечёткой логики, теории Демпстера-Шефера и т.п.

Заметим, что не всегда понятно, как оценить результаты обучения, сформулированные в федеральных программах и образовательынх стандартах. Даже не всегда очевидно, *как* достичь эти результаты.

Литература

1. Тарасенко Ф.П. Прикладной системный анализ (Наука и искусство решения проблем): Учебник / Ф.П. Тарасенко. — Томск: Изд-во Том. ун-та, 2004. — 186 с.

2. Волкова В.Н. Теория систем / В.Н. Волкова, А.А. Денисов. — М. : Высш.шк., 2006. — 511 с.

3. Федеральная рабочая программа среднего общего образования. Математика (углублённый уровень) (для 10–11 классов образовательных организаций) [Электронный ресурс] / М. : ФГБНУ Институт стратегии развития образования, 2023. — 81 с. URL : https://edsoo.ru/rabochie-programmy (дата обращения 10.01.2025)

4. Приказ Минобранауки России от 07.08.2014 N 943 «Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению подготовки 01.03.01 Математика (уровень бакалавриата)» [Электронный ресурс] / Портал федеральных государственных образовательных стандартов высшего образования. URL : https://fgosvo.ru/fgosvo/index/4/28 (дата обращения 10.01.2025)

О ВАРИАЦИОННОЙ ФОРМУЛИРОВКЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ[1]

С.Г. Шорохов (Москва, РУДН)
shorokhov-sg@rudn.ru

Квазиклассические функционалы краевых задач для уравнений математической физики [1] могут быть использованы в качестве функционалов потерь при обучении нейронных сетей, аппроксимирующих решения этих краевых задач [2].

Рассмотрим уравнение теплопроводности

$$u_t - k^2 u_{xx} = 0,\, (x,\, t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 \tag{1}$$

в ограниченной области $\Omega = \{(x, t) : a < x < \gamma\,(t)\,, 0 < t < T\} \subset \mathbb{R}^2$ с граничными условиями

$$\begin{cases} u\,|_{\Gamma_0} = \varphi\,(x)\,, & \Gamma_0 = \{(x,\, t) :\, a \leqslant x \leqslant \gamma\,(0)\,,\, t = 0\}\,, \\ u_x\,|_{\Gamma_1} = \psi\,(t)\,, & \Gamma_1 = \{(x,\, t) :\, x = a,\, 0 \leqslant t \leqslant T\}\,, \\ u\,|_{\Gamma_2} = 0, & \Gamma_2 = \{(x,\, t) :\, x = \gamma\,(t)\,,\, 0 \leqslant t \leqslant T\}\,, \end{cases} \tag{2}$$

где $\varphi \in L_2\,(\Gamma_0)\,, \psi \in L_2\,(\Gamma_1)\,, k > 0$. Функция $\gamma\,(t)$ является кусочно гладкой на $[0,\, T]$, $\gamma\,(t) > a$ для $t \in [0,\, T]$, причем ни одна прямая $t = \tau$ не является касательной к Γ_2 для $0 < \tau < T$ [3]. Здесь и далее буквенные нижние индексы означают дифференцирование по соответствующей переменной.

Следуя подходу работы [3], построим для краевой задачи (1)-(2) вариационный функционал в отличном от классического классе функционалов вида

$$D\,[u] = \int\limits_{\Omega} F\left(x, t, u, u_x, \int\limits_a^x u_t\,(\xi,\, t)\,d\xi\right) dxdt,$$

при этом преобразуем функционал в форму, максимально удобную для оценки методом интегрирования Монте-Карло. Справедливо следующее утверждение.

---

[1] Работа выполнена в рамках проекта № 002092-0-000 Российского университета дружбы народов имени Патриса Лумумбы.

© Шорохов С.Г., 2025

Теорема. *Вариационный функционал для краевой задачи (1)-(2) имеет следующий вид*

$$
\begin{aligned}
D[u] = \int\limits_{\Omega} \Biggl[\left(u^2\right)_t + \frac{1}{k^2} \left(\int\limits_a^x u_t(\xi, t)\, d\xi \right)^2 + \\
+ 2\psi(t) \int\limits_a^x u_t(\xi, t)\, d\xi + k^2 u_x^2 \Biggr] dxdt + \\
+ \int\limits_{\Gamma_0} u\,(u - 2\varphi)\, ds + 2k^2 \int\limits_{\Gamma_1} \psi\, u\, ds,
\end{aligned}
\tag{3}
$$

а именно, уравнение теплопроводности (1) является уравнением Эйлера-Лагранжа для функционала (3) и функционал (3) достигает минимума на решении краевой задачи (1)-(2).

Функционал (3) может быть использован для обучения нейронной сети, аппроксимирующей решение краевой задачи (1)-(2), при помощи алгоритма обратного распространения ошибки, при этом для вычисления градиента от оператора $\int_a^x u_t(\xi, t)\, d\xi$ можно применить метод сопряженных переменных из работы [4].

Литература

1. Филиппов В.М. Вариационные принципы для непотенциальных операторов / В.М. Филиппов, В.М. Савчин, С.Г. Шорохов // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Нов. достиж. — 1992. — Т. 40. — С. 3–176.

2. Шорохов С.Г. Обучение нейронной сети для гиперболического уравнения при помощи квазиклассического функционала / С.Г. Шорохов // Итоги науки и техн. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. — 2024. — Т. 237. — С. 76–86.

3. Филиппов В.М. О квадратичном функционале для уравнения теплопроводности / В.М. Филиппов, А.Н. Скороходов // Дифференц. уравнения. — 1977. — Т. 13, № 6. — С. 1113–1123.

4. Chen R.T.Q. Neural ordinary differential equations / R.T.Q. Chen, Y. Rubanova, J. Bettencourt, D. Duvenaud // Proceedings of the 32nd International Conference on Neural Information Processing Systems, NIPS'18. — Red Hook, NY : Curran Associates Inc., 2018. — С. 6572–6583.

О КЛАССИЧЕСКОМ ПРИЗНАКЕ СХОДИМОСТИ ДИНИ ДЛЯ СИСТЕМ ТИПА ХААРА

В.И. Щербаков (Жуковский Московской области, МТУСИ)
kafmathan@mail.ru

Пусть $p_0 = 1, \{p_n\}_{n=1}^{\infty}-$ целочисленная последоватклыность с $p_n \geqslant 2$ и $m_n = \prod\limits_{k=o}^{n} p_k (n = 0, 1, \ldots)$. Всякое натуральное число n единственным образом можно представить в виде

$$n = \sum_{k=0}^{s} a_k m_k = a_s m_s + n' \qquad (1),$$

где a_k и $s-$ целые с $0 \leqslant a_k < p_{k+1}, m_s \leqslant n < m_{s+1}, 1 \leqslant a_s < p_{s+1}$ и $0 \leqslant n' < m_s$, а любое число $x \in [0, 1]$ можно разложить по формуле

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{m_n}, \text{ где } x_n - \text{ целые с } 0 \leqslant x_n < p_n \qquad (2).$$

Если $x - \{p_n\}$-иррационально, а также $x = 0$ или $x = 1$, то его разложение по формуле (2) единственно; для $x = \frac{l}{m_n}$ существует два его представления в виде равенства (2), одно из которых конечно ($x_k = 0$ для всех $k > n$); его мы обозначим за $\frac{l}{m_n}$, а другое — бесконечно ($x_k = p_k - 1$ при $k > n$), которое будем обозначать как $\frac{l}{m_n} -$. Получилась абелева группа последовательностей $G = \{\{x_n\}_{n=1}^{\infty} | x_n = 0, 1, \ldots, p_n - 1\}$ с операцией $\dot{+}$ покоординатного сложения по можулю p_n и обратной операцией $\dot{-}$, в которой все $\{p_n\}$-рациональные точки "раздвоились".

Положив $\frac{l}{m_n} - < \frac{l}{m_n}$, с [0, 1] на G переносится упорядочивание точек и, следовательно, понятие вариации функции (под функцией будем понимать отображение группы последовательностей G во множество комплексных чисел $\mathbb{C}$).

Подгруппы $G_n = [0, \frac{1}{m_n} -]$ задают систему окрестностей нуля в G, и тогда на G задана топология, относительно которой на G определяются предел и непрерывность.

С [0, 1] на G переносятся понятия меры и интеграла Лебега, ортогональных и ортонормированных систем функций. Обозначим за $L(G)$ множество интегрируемых на G функций. Пусть $\{\chi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}-$ обобщённая система Хаара: $\chi_0(x) \equiv 1$;

© Щербаков В.И., 2025

$$\chi_{m_k}(x) = \begin{cases} \sqrt{m_k} \exp \frac{2i\pi x_{k+1}}{p_{k+1}} & \text{, если } x \in [0, \frac{1}{m_k} -] \\ 0 & \text{для остальных } x. \end{cases} \quad \text{и}$$

$\chi_n(x) = (\chi_{m_s}(x \dot{-} \frac{n'}{m_s})^{a_s}$, где x_{k+1} определены равенством (2), а n', s, a_s и m_s- в формуле (1). Имеют место следующие теоремы:

Теорема 1. (Классический признак сходимости Дини для обобщённых систем Хаара (см. [1])) *Если справедливы оба условия*

$$\int\limits_{G_n \setminus G_{n+1}} \frac{|f(x \dot{+} t) - f(x)|}{t} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ и } \int\limits_{G_n \setminus G_{n+1}} \frac{|f(x \dot{-} t) - f(x)|}{t} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{3}$$

то ряд Фурье от функции $f(t) \in L(G)$ *по системе типа Хаара* $\{\chi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ *сходится к ней в точке* $x \in G$.

Простым следствием теоремы 1 является сходимость рядов Фурье по (классическим) системам Хаара, а также по обобщённым системам Хаара в случае $\sup\limits_n p_n < \infty$.

Отметим также, что, как показано в [1], ни одно из условий в (3) в отдельности содимости ряда Фурье по системам типа Хаара от функции $f(t)$ не гарантирует; они должны работать "в совокупности".

Имеются также (см.[1]) классический симметричный признак сходимости Дини, а также, в зависимости от мажорант ядер Дирихле, признаки Дини-Виленкина и S-признаки Дини. Однако, за неимением места, здесь мы мх не формулируем.

Литература

1. Щербаков В.И. Мажоранты ядер Дирихле и поточечные признаки Дини для обобщённых систем Хаара / В. И. Щербаков // Математические заметки — 2017. — Т.101, вып. 3. — С. 446—473.

О СУЩЕСТВОВАНИИ СОВЕРШЕННОГО МНОЖЕСТВА

И.С. Юрченко (Саратов, СГУ)
hamsterchik@mail.ru

Лукомский С. Ф. [1] доказал, что пустое множество есть множество единственности для системы Уолша в случае сходимости по кубам. Плотниковым М. Г. [3] было доказано, что любое конечное множество является множеством единственности, а также построены примеры счетных множеств единственности для системы Уолша

© Юрченко И.С., 2025

в случае сходимости по кубам. В [4] доказано, что данные результаты справедливы и для кратных рядов по системе характеров на произвольной нуль-мерной группе в смысле сходимости по кубам.

В статье [3] Плотников М. Г., рассматривая функции Уолша на двоичной группе, показал, что существует совершенное множество единственности для кратных рядов Уолша, сходящихся по кубам. Мы покажем, что данный результат справедлив для кратных рядов по системе характеров на произвольной нуль-мерной группе.

Пусть $(G, \oplus)$ - компактная нуль-мерная группа. Топология на группе G определяется с помощью цепочки вложенных подгрупп $G = G_0 \supset G_1 \supset ...$, где $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} G_n = G$, $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} G_n = \{0\}$ (0 - нулевой элемент группы G).

Обозначим $p_k = (G_k/G_{k+1})^{\sharp}$. Будем считать, что $\{p_k\}$ - последовательность простых чисел. По последовательности $\{p_k\}_{k=0}^{\infty}$ построим последовательность $\{m_k\}_{k=0}^{\infty}$ следующим образом: $m_0 = 1, m_{k+1} = p_k m_k$.

Элементы $g_n = G_n \setminus G_{n+1}$ образуют базисную систему в G, т.е. любой элемент $x \in G$ однозначно представим в виде ряда $x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n g_n,\ a_n = \overline{0, p_n - 1}$.

Характеры $r_k(z) \in G_{k+1}^{\perp} \setminus G_k^{\perp}$ назовем функциями Радемахера. Пусть

$$n = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k m_{k+1} \in \mathbb{N}_0, \varepsilon_k = \overline{0, p_k - 1},$$

$$z = \sum_{k=0}^{\infty} z_k g_k \in G, z_k = \overline{0, p_k - 1}.$$

Положим по определению $\chi_n(z) = \prod\limits_{k=0}^{\infty} (r_k(z))^{\varepsilon_k}$ [2].

Такую нумерацию характеров называют нумерацией Пэли.

Обозначим через $\mathfrak{G} = G^N$ N-мерную группу с топологией произведения групп. В этом случае база топологии состоит из произведений сдвигов $G_{\mathbf{j}} \oplus \mathbf{h} = (G_{j_1} \oplus h^{(1)}) \times ... \times (G_{j_N} \oplus h^{(N)})$, где $h^{(l)} = a_{j_l-1}^{(l)} g_{j_l-1} \oplus a_{j_l-2}^{(l)} g_{j_l-2} \oplus ... \oplus a_0^{(l)} g_0, l = \overline{1, N}$. Так как $G_{\mathbf{j}} \oplus \mathbf{h}$ есть объединение дизъюнктных кубов вида

$$(G_j \oplus h^{(1)}) \times ... \times (G_j \oplus h^{(N)}) (j = max(j_1, ..., j_N)),$$

то совокупность таких кубов также образует базу топологии в G^N.

Положим по определению $\chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{z}) = \chi_{n_1}(z_1)...\chi_{n_N}(z_N), \mathbf{z} \in \mathfrak{G}, \mathbf{n} = (n_1, ..., n_N)$. Если $\mathbf{m_j} = (m_j, ..., m_j)$ - вектор длины N с одинаковыми компонентами, то $\chi_{\mathbf{m_j}}(\mathbf{z}) = r_{\mathbf{j}}(\mathbf{z}) = const$ на $\mathfrak{G}_{j+1} \oplus \mathfrak{g}\mathcal{A}$.

Рассмотрим кратный ряд

$$\sum_{\mathbf{n}=0}^{\infty} c_{\mathbf{n}}\chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{z}) = \sum_{n_1=0}^{\infty} ... \sum_{n_N=0}^{\infty} c_{n_1...n_N}\chi_{n_1}(z_1)...\chi_{n_N}(z_N).$$

Теорема 1. *Существуют непустые совершенные множества единственности в $\mathfrak{G} = G^N$ в смысле сходимости по кубам.*

Литература

1. Lukomskii S. F. On a U-set for multiple Walsh series / S.F. Lukomskii // Analysis Mathematica. — 1992. — №. 18. — pp. 127-–138.

2. Lukomskii S. F. Multiresolution analysis on product of zero-dimensional Abelian groups / S.F. Lukomskii // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 2012. — Vol. 385. — iss 2. — pp. 1162—1178.

3. Plotnikov M. G. On multiple Walsh series convergent over cubes / M.G. Plotnikov // Izvestiya : Mathematics. — 2007. — Vol. 71. — iss 1. — pp. 57–73.

4. Юрченко И. С. О множествах единственности кратных рядов по системе характеров нуль-мерной группы в смысле сходимости по кубам / И.С. Юрченко // Известия Саратовского университета. Новая серия. Сер. : Математика. Механика. Информатика. — 2013. — Т. 13. — № 2-1. — С. 35–43.

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНОСТИ ФУНКЦИОНАЛОВ, ЗАВИСЯЩИХ ОТ РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

А.И. Эгамов (Нижний Новгород, ННГУ)
albert810@yandex.ru

Рассматривается вторая начально-краевая задача для гиперболического уравнения 2-го порядка. На начальные функции накладываются условия, при которых решение задачи можно представить в виде ряда Фурье по системе косинусов, аналогичное разложение имеет и функция, входящая в уравнение. Цель исследования — найти дополнительные условия на них, при которых заданный функционал от решения начально-краевой задачи будет положительным

© Эгамов А.И., 2025

для допустимого временного отрезка. Существенный вклад в данное исследование вносят вторые краевые условия.

Рассмотрим решение гиперболического уравнения 2-го порядка

$$z''_{tt}(x,t) = a^2 z''_{xx}(x,t) + b(x)z(x,t), \tag{1}$$

в области $(x,t) \in (0,l) \times (0,T]$, с краевыми и начальными условиями

$$z'_x(0,t) = z'_x(l,t) = 0, \tag{2}$$

$$z(x,0) = \varphi(x),\ z'_t(x,0) = \psi(x) \equiv 0. \tag{3}$$

Здесь a – положительная константа, функция $b(x) \in C^2[0,l]$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция на отрезке $[0,l]$, $b'_x(0) = b'_x(l) = 0$. Функция $\varphi(x) \in C^3[0,l]$, для неё выполняется условие связи: $\varphi'_x(0) = \varphi'_x(l) = 0$. Решение задачи (1)—(3) существует, единственно и представимо в виде ряда Фурье по системе косинусов [1, 2].

Исследование состоит в том, чтобы найти условия, при которых априори можно гарантировать, что функционалы

$$P(t) = \int\limits_0^l z(x,t)dx, \quad P(0) = 1, \tag{4}$$

$$P_1(t) = \int\limits_0^l b(x)z(x,t)dx, \quad P_1(0) = 1, \tag{5}$$

были бы положительны при $t \in [0,T]$, то есть нужно получить достаточные условия на функции $b(x)$, $\varphi(x)$ отдельно для каждого функционала, чтобы они были положительны при $t \in [0,T]$. Пусть $\max\limits_{x\in[0,l]} |b(x)| = \beta$, $\max\limits_{x\in[0,l]} |a^2 b''_{xx}(x) + b^2(x)| = \beta_1$, $\max\limits_{x\in[0,l]} |\varphi(x)| = \Phi$, где β, β_1 и Φ –положительные константы. Верно неравенство

$$\beta T^2 < 2. \tag{6}$$

Справедливы следующие теоремы, которые дают достаточные условия для функционалов (4) и (5):

Теорема 1. *Функционал (4) положителен на отрезке $t \in [0,T]$ при выполнении неравенства (6) и неравенства*

$$\frac{\beta T^2}{2 - \beta T^2} l\Phi < 1.$$

Теорема 2. *Функционал (5) положителен на отрезке $t \in [0,T]$ при выполнении неравенства (6) и неравенства*

$$\frac{\beta_1 T^2}{2-\beta T^2} l\Phi < 1.$$

Положительность функционалов (4) и (5) на заданном временном отрезке играет важную роль во многих задачах. Например, она необходима для предложенного автором метода получения решения начально-краевой задачи для гиперболического уравнения 2-го порядка специального вида, доказательства его существования и единственности [3].

Литература

1. Владимиров В.С. Уравнения математической физики: Учебник для вузов. 2-ое издание. Стереотип. / В.С. Владимиров, В.В. Жаринов. — М. : Физматлит, 2004. — 400 с.

2. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики. / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. — М. : Наука, 1969. — 798 с.

3. Бураго, П.Н. О связи решений начально-краевых задач для некоторого класса интегро-дифференциальных уравнений с частными производными и линейного гиперболического уравнения / П.Н. Бураго, А.И. Эгамов // Журнал Средневолжского математического общества. – 2019. — Т. 21, № 4. — С. 413-429.

NODAL SOLUTIONS OF SOME NONLINEAR PROBLEM FOR THE STURM-LIOUVILLE OPERATOR WITH A PARAMETER IN THE EQUATION AND IN THE BOUNDARY CONDITION

Z.S. Aliyev, K.R. Rahimova (Baku, Baku State University)
rkr_kama@rambler.ru

Let f and g are real-valued continuous functions on $\mathbb{R}$ that satisfy the following conditions: there exist a positive constant $M > 0$, a sufficiently small positive number τ_0 and sufficiently large positive number $\varkappa_0$ such that

$$\left|\frac{f(s)}{s}\right| \leqslant M \text{ for } 0 < |s| < \tau_0 \text{ and } |s| > \varkappa_0;$$

there exist constants $g_0 > 0$ and $g_\infty > 0$ such that

$$g_0 = \lim_{|s|\to 0} \frac{g(s)}{s} \text{ and } g_\infty = \lim_{|s|\to +\infty} \frac{g(s)}{s}.$$

© Aliyev Z.S., Rahimova K.R., 2025

We consider the following nonlinear boundary value problem

$$\ell(y) \equiv -(p(x)y'(x))' + q(x)y(x) = \varrho\, r(x)h(y(x)),\ x \in (0,1), \tag{1}$$

$$b_0 y(0) - d_0 p(0)y'(0) = 0, \tag{2}$$

$$(a_1\varrho g_0 + b_1)y(1) - (c_1\varrho g_0 + d_1)p(\pi)y'(\pi) = 0. \tag{3}$$

Here p is a positive continuously differentiable function on $[0,1]$, q is a continuous function on $[0,1]$, ϱ is a real parameter, $r(x)$ is a positive continuous function on $[0,1]$, the nonlinear term has the form $h = f + g$, and b_0, d_0, b_1, d_1 are real constants such that $|b_0| + |d_0| > 0$ and $a_1 d_1 - b_1 c_1 > 0$.

Let $(b.c.)_0$ be the set of functions that satisfy the boundary condition (2). By E denote be the Banach space $C^1[0,1] \cap (b.c.)_0$ equipped with the norm $||y||_1 = ||y||_\infty + ||y'||_\infty$, where $||y||_\infty = \max\limits_{x\in[0,\pi]} |y(x)|$, and by S denote the subset of E given as follows:

$$S = \{y \in E : |y(x)| + |y'(x)| > 0,\ x \in [0,1]\}.$$

Moreover, from on ν denote either $+$ or $-$; $-\nu$ will denote the opposite sign to ν.

In [1], for each $k \in \mathbb{N}$ and each ν, the authors constructed sets S_k^ν of functions in E which have the oscillatory properties of eigenfunctions of the linear Sturm-Liouville problem

$$\begin{cases} \ell(y)(x) = \lambda r(x)y(x),\ x \in (0,1), \\ b_0 y(0) - d_0 p(0)y'(0) = 0, \\ (a_1\lambda + b_1)y(1) - (c_1\lambda + d_1)p(\pi)y'(\pi) = 0, \end{cases}$$

the eigenvalues of which are real and simple, and form an infinitely increasing sequence $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ (see [2]). Note that the sets S_k^+, S_k^- and $S_k = S_k^+ \cup S_k^-$ are pairwise disjoint open subsets of E. Moreover, if $y \in \partial S_k^\nu$ (∂S_k), then y has at least one double zero in $[0,1]$ (see [3]).

The following theorem is the main result of this note.

Теорема 1. *Let the conditions $g_0 > M$ and $g_\infty > M$ be satisfied and for some $k \in \mathbb{N}$ the following condition hold:*

$$\lambda_k > 0 \ \textit{and}\ \frac{\lambda_k}{g_0 - M} < s < \frac{\lambda_k}{g_\infty + M},\ \textit{or}$$

$$\lambda_k > 0 \ \textit{and}\ \frac{\lambda_k}{g_\infty - M} < s < \frac{\lambda_k}{g_0 + M},\ \textit{or}$$

$$\lambda_k < 0 \ \ and \ \ \frac{\lambda_k}{g_0 + M} < s < \frac{\lambda_k}{g_\infty - M}, \ \ or$$

$$\lambda_k < 0 \ \ and \ \ \frac{\lambda_k}{g_\infty + M} < s < \frac{\lambda_k}{g_0 - M}.$$

Then problem (1)-(3) has a solutions y_k^+ and y_k^- such that $y_k^+ \in S_k^+$ and $y_k^- \in S_k^-$, respectively.

References

1. Aliyev Z.S. Global bifurcation from zero in nonlinear SturmLiouville equation with a spectral parameter in the boundary condition / Z.S. Aliyev, N.A. Ismayilova // Quaest. Math. — 2023. — V. 46, No. 11. — P. 2233-2241.
2. Binding P.A. Sturm-Liouville problems with eigenparameter dependent boundary conditions / P.A. Binding, P.J. Browne, K. Seddighi // Proc. Edinburgh Math. Soc. — 1994. — V. 37, No. 1. — P. 57–72.
3. Ma. R. Global bifurcation and nodal solutions for a Sturm–Liouville problem with a nonsmooth nonlinearity / R. Ma, G. Dai // J. Funct. Anal. — 2013. — V. 265, No. 8. — P. 1443-1459.

GLOBAL BIFURCATION FROM ZERO AND INFINITY IN SOME NONLINEAR DIRAC PROBLEMS WITH EIGENVALUE PARAMETER IN THE BOUNDARY CONDITIONS

N.S. Aliyeva (Baku, Institute of Mathematics and Mechanics of Ministry of Sciences and Education)

nigaraliyeva1205@gmail.com

We consider the following nonlinear Dirac problem

$$Bw'(x) - P(x)w(x) = \lambda w(x) + h(w(x)), \ 0 < x < \pi, \tag{1}$$

$$(\lambda \cos\alpha + a_0, \lambda \sin\alpha + b_0)w(0) = 0, \tag{2}$$

$$(\lambda \cos\beta + a_1, \lambda \sin\beta + b_1)w(\pi) = 0, \tag{3}$$

where

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \ P(x) = \begin{pmatrix} p(x) & 0 \\ 0 & r(x) \end{pmatrix}, \ w(x) = \begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \end{pmatrix},$$

© Aliyeva N.S., 2025

$\lambda \in \mathbb{R}$ is an eigenvalue parameter, p, $r \in C([0,\pi];\mathbb{R})$, α, β, a_0, b_0, a_1 and b_1 are real constants such that $0 \leqslant \alpha$, $\beta < \pi$, $\sigma_0 = a_0 \sin\alpha - b_0 \cos\alpha < 0$ and $\sigma_1 = a_1 \sin\beta - b_1 \cos\beta > 0$. The function h has the form $f+g$, where $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$, f, $g \in C\left(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2\right)$ and satisfy the following conditions:

(H_1) there are positive constants K and L such that $|f_1(w)| \leqslant K|w|$, $|f_2(w)| \leqslant L|w|$ for $w \in \mathbb{R}^2$;

(H_2) $g(w) = o(|w|)$ as $|w| \to 0$; (H_3) $g(w) = o(|w|)$ as $|w| \to \infty$.

Let E be the real Banach space $C([0,\pi];\mathbb{R}^2)$ with the norm

$$||w|| = \max_{x\in[0,\pi]} |u(x)| + \max_{x\in[0,\pi]} |\vartheta(x)|,$$

and let $S_k^\nu \subset E$, $k \in \mathbb{Z}$, $\nu \in \{+,-\}$, be the set of functions having oscillatory properties of eigenvector-functions of the linear Dirac problem (1)-(3) with $h \equiv 0$. Note that the eigenvalues λ_k, $k \in \mathbb{Z}$, of this linear problem are real, simple and can be numbered in ascending order on the real axis (see [1] and [2]).

As norm in $\mathbb{R} \times E$, we take $||(\lambda, w)|| = \left\{\lambda^2 + ||w||^2\right\}^{\frac{1}{2}}$. We add the points $\{(\lambda, \infty) : \lambda \in \mathbb{R}\}$ to our space $\mathbb{R} \times E$ and define an appropriate topology on the resulting set.

By D we denote the set of nontrivial solutions of problem (1)-(3).

The following theorem strengthens the results of [3].

Theorem 1. *Let conditions* (H_1)–(H_3) *hold. Then for each* $k \in \mathbb{Z}$ *and each* $\nu \in \{+,-\}$ *there exists subset* D_k^ν *of* D *such that (i)* $D_k^\nu \cup (J_k \times \{\tilde{0}\}) \cup (J_k \times \{\infty\})$ *is closed and connected; (ii)* $D_k^\nu \subset \mathbb{R} \times S_k^\nu$, *where* $\tilde{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $J_k = [\lambda_k - M_k, \lambda_k + M_k]$, $M_k = K + L + 2 + c_k$, $c_k = O\left(\frac{1}{k}\right)$.

References

1. Aliyev Z.S. On a spectral problem for the Dirac system with boundary conditions depending on the spectral parameter / Z.S. Aliyev, N.S. Aliyeva // Modern problems of mathematics and mechanics : materials of the International Conference dedicated to the 100th anniver sary of the National Leader of the Azerbaijani people Heydar Aliyev. — Baku : «Printing Polygraphy Limited Liability Company», 2023. —P. 80-82.

2. Aliyeva N.S. Global bifurcation from infinity in nonlinear Dirac problems with eigenvalue parameter in the boundary conditions /N.S. Al

iyeva // Caspian J. Appl. Math. Ecol. Econ. —2023. — V. 11, No. 2. — P. 22-32.

3. Aliyeva, N.S. Some global results for nonlinearizable one dimensio nal Dirac systems / N.S. Aliyeva // Modern problems of mathematics and mechanics : materials of the 11th International Conference dedicated to the genius Azerbaijani scientist and thinker Nasireddin Tusi. — Baku : «Printing Polygraphy Limited Liability Company», 2024. — P. 88-90.

ON SOLUTIONS WITH FIXED OSCILLATION COUNT OF SOME NONLINEAR BOUNDARY VALUE PROBLEM DEPENDING ON THE PARAMETER

Y.N. Aliyeva (Baku, Institute of Mathematics and Mechanics of Ministry of Sciences and Education)
aliyevayaqut3@gmail.com

In this note, we consider the following nonlinear boundary value problem for ordinary differential equations of fourth order

$$(p(x)y''(x))'' - (q(x)y'(x))' = \tau r(x)f(y(x)),\ x \in (0,l), \tag{1}$$

with the boundary conditions

$$y'(0)\cos\alpha - (py'')(0)\sin\alpha = 0, \tag{2}$$

$$y(0)\cos\beta + Ty(0)\sin\beta = 0, \tag{3}$$

$$y'(l)\cos\gamma + (py'')(l)\sin\gamma = 0, \tag{4}$$

$$(a\tau + b)y(l) - (c\tau + d)Ty(l) = 0, \tag{5}$$

where $Ty \equiv (py'')' - qy'$, $p \in C^2([0,1];(0,+\infty))$, $q \in C^1([0,1];[0,+\infty))$, τ is a real parameter, $r(x) \in C([0,1];(0,+\infty))$, α, β, γ, a, b, c, d are real constants such that α, β, $\gamma \in [0,\pi/2]$ and $\sigma = bc - ad > 0$. Moreover, $f \in C(\mathbb{R};\mathbb{R})$ and $\underline{f}_0$, $\overline{f}_0$, $\underline{f}_\infty$, $\overline{f}_\infty \in \mathbb{R}$ with $\underline{f}_0 \neq \overline{f}_0$, $\underline{f}_\infty \neq \overline{f}_\infty$, where

$$\underline{f}_0 = \liminf_{|y|\to 0} \frac{f(y)}{y}\ ,\ \overline{f}_0 = \limsup_{|y|\to 0} \frac{f(y)}{y},$$

$$\underline{f}_\infty = \liminf_{|y|\to +\infty} \frac{f(y)}{y}\ ,\ \overline{f}_\infty = \limsup_{|y|\to +\infty} \frac{f(y)}{y}\ .$$

The subject of this paper is to determine the interval of τ, in which there are solutions to problem (1)-(3) with fixed oscillation count.

© Aliyeva Y.N., 2025

It is known (see [1]) that the eigenvalues of the linear problem (1)–(5) with $f(y) = y$, $y \in \mathbb{R}$, are real and simple and forms an infinitely increasing sequence $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$; moreover, the corresponding eigenfunctions $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ have the following oscillation properties: (i) if $c = 0$, then $y_k(x)$, $k \in \mathbb{N}$, has exactly $k - 1$ simple nodal zeros in $(0, l)$; (ii) if $c \neq 0$, then there is a natural number k_0 such that $y_k(x)$ for $k \leqslant k_0$ has exactly $k-1$ simple nodal zeros, for $k > k_0$ has exactly $k - 2$ simple nodal zeros in $(0, l)$.

Note that problem (1)–(5) was considered in [2] in the case when the function f satisfies also the condition $sf(s) > 0$ for $s \in \mathbb{R}$, $s \neq 0$. In [2] is determine the interval of τ, in which there are nodal solutions to problem (1)–(5).

The following theorem is main result of this note where we also refined the results from [2].

Theorem. If either $\underline{f_0} > \overline{f_\infty} > 0$ or $\overline{f_\infty} < \underline{f_0} < 0$ or $\underline{f_\infty} > \overline{f_0} > 0$ or $\overline{f_0} < \underline{f_\infty} < 0$ and for some $k \in \mathbb{N}$ either

$$\lambda_k > 0 \ \ and \ \ \frac{\lambda_k}{\underline{f_0}} < \tau < \frac{\lambda_k}{\overline{f_\infty}} \ \ or \ \ \lambda_k < 0 \ \ and \ \ \frac{\lambda_k}{\overline{f_\infty}} < \tau < \frac{\lambda_k}{\underline{f_0}} \ \ or$$

$$\lambda_k > 0 \ \ and \ \ \frac{\lambda_k}{\underline{f_\infty}} < \tau < \frac{\lambda_k}{\overline{f_0}} \ \ or \ \ \lambda_k < 0 \ \ and \ \ \frac{\lambda_k}{\overline{f_0}} < \tau < \frac{\lambda_k}{\underline{f_\infty}},$$

then there exist solutions y_k^+, y_k^- of problem (1)–(5) such that y_k^+ has exactly $k - 1$ simple nodal zeros and is positive near $x = 0$, y_k^- has exactly $k - 1$ simple nodal zeros in $(0, l)$ and is negative near $x = 0$ in the case of $c = 0$, y_k^+ has exactly $k - 1$ simple nodal zeros for $k \leqslant k_0$ and has exactly $k - 2$ simple nodal zeros for $k > k_0$ and is positive near $x = 0$, y_k^- has exactly $k-1$ simple nodal zeros for $k \leqslant k_0$ and has exactly $k - 2$ simple nodal zeros in $(0, l)$ for $k > k_0$ and is negative near $x = 0$ in the case of $c \neq 0$.

References

1. Kerimov N.B. On the basis property of the system of eigenfunctions of a spectral problem with spectral parameter in the boundary condition /N.B. Kerimov, Z.S. Aliev // Differ. Equ. — 2007. — V. 43, No. 7. — P. 905-915.

2. Aliyeva Y.N. Nodal solutions of some nonlinear fourth-order boun dary value problems / Y.N. Aliyeva // Proc. Ins. Math. Mech. Nat. Acad. Sci. Azerb. — 2024. —- V. 50, No. 1. — P. 104-114.

OSCILLATION THEOREM FOR SOME FOURTH-ORDER DIFFERENTIAL OPERATOR WITH A SPECTRAL PARAMETER IN ALL BOUNDARY CONDITIONS

A.E. Fleydanli (Sumgait, Sumgait State University)
aynafleydanli@gmail.com

We study the following spectral problem

$$y^{(4)}(x) - (q(x)y'(x))' = \lambda y(x),\ x \in (0,1), \tag{1}$$

$$y''(0) - a\lambda y'(0) = 0,\ Ty(0) - b\lambda y(0) = 0, \tag{2}$$

$$y''(1) - c\lambda y'(1) = 0,\ Ty(1) - d\lambda y(1) = 0, \tag{3}$$

where $\lambda \in \mathbb{C}$ is an eigenvalue parameter, $Ty \equiv y''' - qy'$, q is a positive absolutely continuous function on $[0,1]$, a, b, c and d are real constants such that $a < 0$, $b > 0$, $c > 0$ and $d > 0$.

Spectral properties, including oscillatory properties of the eigenfunc tions of problem (1)-(3) are studied in detail in [1].

The spectral properties of problem (1)–(5) in the case of $a < 0$, $b > 0$, $c > 0$ and $d < 0$ was considered in [1]. There, problem (1)–(3) was considered as a spectral problem for a self-adjoint operator in the Hilbert space $H = L_2(0,1) \oplus \mathbb{C}^4$, and consequently, the eigenvalues of this problem are simple. In our case this problem can be treated as a spectral problem for a self-adjoint operator in a Pontryagin space $\Pi_1 = L_2(0,1) \oplus \mathbb{C}^4$ with corresponding inner product; in this case, problem (1)–(3) can have a real multiple eigenvalue or non-real eigenvalues [2].

Theorem 1. *The eigenvalues of problem (1)-(5) are real and simple, except for the case $d > 1$ and $b = d - 1$ in which $\lambda = 0$ is an algebraically double eigenvalue, and form an unbounded non-decreasing sequence $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ such that*

$$\lambda_1 < 0 = \lambda_2 < \lambda_3 < \ \ldots\ < \lambda_k < \ \ldots \text{ if } d \leqslant 1 \text{ or } d > 1 \text{ and } b > d - 1,$$

$$\lambda_1 < 0 = \lambda_2 < \lambda_3 < \ \ldots\ < \lambda_k < \ \ldots\ \text{ if } \ d > 1 \text{ and } b > d - 1,$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0 < \lambda_3 < \ \ldots\ < \lambda_k < \ \ldots\ \text{ if } \ d > 1 \text{ and } b = d - 1.$$

Moreover, the eigenfunctions y_k, $k \in \mathbb{N}$, corresponding to the eigenvalues λ_k, $k \in \mathbb{N}$, of problem (1)–(5) and their derivatives have the following oscillatory properties:

© Fleydanli A.E., 2025

(i) the function $y_k(x)$ for $k \geqslant 3$ has exactly $k-3$ simple zeros, the function $y_2(x)$ has no zeros for $d \leqslant 1$ and for $d > 1$, $b \neq d-1$, $y_1(x)$ has arbitrary zeros for $d \leqslant 1$ and for $d > 1$, $b > d-1$, has no zeros in the interval $(0,1)$ for $d > 1$, $b \leqslant d-1$;

(ii) the function $y'_k(x)$ for $k \geqslant 4$ has either $k-4$ or $k-3$ simple zeros, the function $y'_3(x)$ has no zeros, for $d \leqslant 1$ and for $d > 1$, $b \neq d-1$, $y_1(x)$ has arbitrary zeros for $d \leqslant 1$ and for $d > 1$, $b > d-1$, has no zeros in the interval $(0,1)$ for $d > 1$, $b \leqslant d-1$;

References

1. Aliyev Z.S. Properties of eigenfunctions of a boundary value problem for ordinary differential equations of fourth-order with boundary conditions depending on the spectral parameter / Z.S. Aliyev, A.E. Fley danli // J. Differential Equations. — 2024. — V. 407. — P. 57–83

2. Azizov T.Ya. Linear operators in Hilbert spaces with G-metric / T.Ya. Azizov, I.S. Iokhvidov // Russian Math. Surv. — 1971. — V. 26, No. 4. — P. 45-97.

ON A FEEDBACK CONTROL SYSTEM WITH DELAY AND A SWEEPING PROCESS[1]

M.I. Kamenskii, V.V. Obukhovskii, G.G. Petrosyan (Voronezh, VSU, VSPU)
garikpetrosyan@yandex.ru

Let E be a Banach space and H be a Hilbert space. We consider controllability problem for a system governed by the following differential inclusion and the sweeping process

$$x'(t) \in Ax(t) + F(t, x_t, x(t), y(t)) + Bu(t),\ t \in [0,T], \tag{1}$$

$$x(s) = \vartheta(s),\ s \in [-h, 0], \tag{2}$$

$$-y'(t) \in N_{C(t)}(y(t)) + g(t, x(t), y(t)) + \rho y(t),\ t \in [0,T], \tag{3}$$

$$y(0) = y_0 \in C(0), \tag{4}$$

$$x(T) = x_1, \tag{5}$$

where $A : D(A) \subset E \to E$ is a linear closed operator generating a C_0–semigroup $\{e^{At}, t \geqslant 0\}$ in the space E, $F\colon [0,T] \times C([-h,0];E) \times E \times H \multimap E$ is a multivalued nonlinearity and the function x_t describes

[1] The work was supported by the Russian Science Foundation (project no. 22-71-10008).

© Kamenskii M.I., Obukhovskii V.V., Petrosyan G.G., 2025

the prehistory of the solution at the moment $t \in [0,T]$, i.e., $x_t(s) = x(t+s), s \in [-h,0], 0 < h < T$. A control function $u(\cdot)$ belongs to the space $L^2([0,T];U)$, where U is a Banach space of controls, $B : U \to E$ is a bounded linear operator. Here ρ is a positive number, $C : [0,T] \multimap H$ is a multimap with closed convex values, $N_{C(t)}(y)$ denotes the normal cone defined for a closed convex set $C(t) \subset H$ as

$$N_{C(t)}(y) = \begin{cases} \{\xi \in H : \langle \xi, c - y \rangle \leqslant 0 \text{ for all } c \in C(t)\}, & \text{if } y \in C(t), \\ \varnothing, & \text{if } y \notin C(t), \end{cases}$$

and function $g : [0,T] \times E \times H \to H$ is a nonlinear map, and $\vartheta \in C([-h,0];E)$, $x_1 \in E, y_0 \in H$.

The controllability problem which we study in this paper may be formulated in the following way: for a given ϑ, x_1 we will consider a solution $x \in C([-h,T];E), y \in C([0,T];H)$ of the above system (1)-(5) and a control $u \in L^2([0,T];U)$ such that conditions (2) and (4) are satisfied.

References

1. Afanasova M.S. A Controllability Problem for Causal Functional Inclusions with an Infinite Delay and Impulse Conditions / M.S. Afanasova, V.V. Obukhovskii, G.G. Petrosyan // Advances in Systems Science and Applications. - 2021. - Vol. 21, пїS 3. - P. 40-62.

2. Kamenskii M.I. A Continuous Dependence of a Solution Set for Fractional Differential Inclusions of an Order $q \in (1,2)$ on Parameters and Initial Data / M.I. Kamenskii, V.V. Obukhoskii, G.G. Petrosyan // Lobachevskii Journal of Mathematics. - 2023. - V. 44, пїS. 8. - P. 3331-пїS3342.

3. Kamenskii M.I. On a controllability problem for a feedback control system governed by a semilinear differential equation and a sweeping process / M.I. Kamenskii, G.G. Petrosyan // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. - 2024. - Vol. 132, 107889.

4. Kamenskii M. On a periodic boundary value problem for fractional quasilinear differential equations with a self-adjoint positive operator in Hilbert spaces / M. Kamenskii, G. Petrosyan, P. Raynaud de Fitte, J.-C. Yao // Mathematics. - 2022. - Vol. 10, Is. 2. - P. 219–231.

5. Obukhovskii V. On semilinear fractional differential inclusions with a nonconvex-valued right-hand side in Banach spaces / V. Obukhovskii, G. Petrosyan, C.F. Wen, V. Bocharov // Journal of Nonlinear and Variational Analysis. пїS 2022. пїS Vol. 6, пїS 3. пїS P. 185–197

6. Obukhovskii V. On a boundary value problem for Hale type fractional functional-differential inclusions with causal multioperators in a Banach space / V. Obukhovskii, G. Petrosyan, M. Soroka, C.F. Wen // Journal of Nonlinear and Variational Analysis. пїЅ 2023. пїЅ Vol. 7, пїЅ 6. пїЅ P. 957–970.

7. Obukhovskii V. On topological properties of solution sets of semilinear fractional differential inclusions with non-convex right-hand side / V. Obukhovskii, G. Petrosyan, M. Soroka, J.C. Yao // Journal of Nonlinear and Variational Analysis. пїЅ 2024. пїЅ Vol. 8, пїЅ 1. пїЅ P. 95–108.

8. Obukhovskii V. On impulsive fractional differential inclusions with a nonconvex-valued multimap in Banach spaces / V. Obukhovskii, G. Petrosyan, M. Soroka // Lobachevskii Journal of Mathematics. пїЅ 2024. пїЅ Vol. 45, пїЅ 4. пїЅ P. 1729–1740.

CLASSICAL SOLUTION OF A MIXED PROBLEM WITH THE ZAREMBA BOUNDARY CONDITION AND CONJUGATION CONDITIONS FOR A MILDLY QUASILINEAR WAVE EQUATION

V.I. Korzyuk, J.V. Rudzko (Minsk, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus)
korzyuk@bsu.by, janycz@yahoo.com

In this report, we consider the following mixed problem:

$$\begin{cases} \square_a u(t,x) = f(t,x,u(t,x),\partial_t u(t,x),\partial_x u(t,x)), \quad (t,x) \in Q, \\ u(0,x) = \varphi(x), \quad \partial_t u(0,x) = \psi(x), \quad x \in [0,\infty), \\ u(t,0) = \mu_1(t), \quad t \in [0,t_*), \\ \alpha(t)u(t,0) + \partial_x u(t,0) = \mu_2(t), \quad t \in [t_*,\infty), \end{cases} \tag{1}$$

where $Q = (0,\infty) \times (0,\infty)$, $\square_a = \partial_t^2 - a^2\partial_x^2$ is the d'Alembert operator ($a > 0$ for definiteness), t_* is a positive real number, f is a function given on the set $\overline{Q} \times \mathbb{R}^3, \varphi$ and ψ are functions given on the half-line $[0,\infty)$, μ_1 is a function given on the segment $[0,t_*)$, and μ_2 and α are functions given on the half-line $[t_*,\infty)$.

We present the main results of this report in the following theorems.

Theorem 1. *Let the conditions $f \in C^2(\overline{Q} \times \mathbb{R})$, $\varphi \in C^2([0,\infty))$, $\psi \in C^1([0,\infty))$, $\mu_1 \in C^2([0,t_*])$, $\mu_2 \in C^1([t_*,\infty))$, and $\alpha \in C^1([t_*,\infty))$*

© Korzyuk V.I., Rudzko J.V., 2025

be satisfied, and let the function f satisfy the Lipschitz condition

$$|f(t,x,u,u_t,u_x) - f(t,x,z,z_t,z_x)| \leqslant \\ \leqslant L(t,x)(|u-z| + |u_t - z_t| + |u_x - z_x|) \quad (2)$$

with a continuous function $L\colon \overline{Q} \mapsto [0,\infty)$. The mixed problem (1) – (4) *has a unique solution u in the class $C^2(\overline{Q})$ if and only if conditions*

$$\mu_1(0) = \varphi(0), \quad \mu_1'(0) = \psi(0),$$
$$\mu_1''(0) = f(0,0,\varphi(0),\psi(0),\varphi'(0)) + a^2\varphi''(0),$$
$$\mu_2(t_*) = \alpha(t_*)\mu_1(t_*) + \partial_x u^{(2)}(t-0,0), \quad \mu_2'(t_*) =$$
$$= \alpha'(t_*)\mu_1(t_*) + \alpha(t_*)\partial_t u^{(2)}(t_*-0,0) + \partial_t\partial_x u^{(2)}(t_*-0,0).$$

are satisfied. This solution depends continuously on the functions φ, ψ, μ_1, μ_2, α, and γ.

Theorem 2. *Let the conditions $f \in C^1(\overline{Q}\times\mathbb{R})$, $\varphi \in C^2([0,\infty))$, $\psi \in C^1([0,\infty))$, $\mu_1 \in C^2([0,t_*])$, $\mu_2 \in C^1([t_*,\infty))$, and $\alpha \in C^1([t_*,\infty))$ be fulfilled, and let the function f satisfy the Lipschitz condition* (2) *with a continuous function $L : \overline{Q} \mapsto [0,\infty)$. The mixed problem* (1) *with conjugation conditions*

$$[(u)^+ - (u)^-](t, x = at) = \gamma(t;\varphi(0) - \mu_1(0)),$$
$$[(u)^+ - (u)^-](t, x = at - at_*) = 0,$$

where $\gamma\colon [0,\infty) \ni t \mapsto \gamma\,(t;\varphi(0)-\mu_1(0)) \in \mathbb{R}$ is a function with one parameter $\varphi(0)-\mu_1(0)$ that satisfies the natural comparability condition

$$\gamma(t;0) = 0, \quad t\in[0,\infty), \quad \gamma(0;s) = s, \quad s \in \mathbb{R},$$

has a unique solution u in the class $C^2(\widetilde{Q}) \cap C(\widetilde{Q}_0)$, where $\widetilde{Q} = \overline{Q}\setminus\{(t,x) : x - at = 0 \vee x - at = -at_*\}$ and $\widetilde{Q}_0 = \overline{Q}\setminus\{(t,x) : x - at = 0\}$. This solution depends continuously on the functions φ, ψ, μ_1, μ_2, α, and γ.

References

1. Korzyuk V.I. Classical Solution of the First Mixed Problem for Second-Order Hyperbolic Equation in Curvilinear Half-Strip with Variable Coefficients / V.I. Korzyuk, I.I. Stolyarchuk // Differ. Equ. — 2017. — V. 53. — P. 74–85.

2. Korzyuk V.I. Curvilinear Parallelogram Identity and Mean-Value Property for a Semilinear Hyperbolic Equation of the Second Order /

V.I. Korzyuk, J.V. Rudzko // Eurasian Math. J. — 2024. — V. 15, № 2. — P. 61–74.

3. Korzyuk V.I. Classical and Mild Solutions of the Cauchy Problem for a Mildly Quasilinear Wave Equation with Discontinuous and Distributional Initial Conditions / V.I. Korzyuk, J.V. Rudzko // J. Math. Sci. — 2024. — V. 286, № 4. — P. 535–559.

4. Korzyuk V.I. Classical Solution of the First Mixed Problem for the Telegraph Equation with a Nonlinear Potential / V.I. Korzyuk, J.V. Rudzko // Differ. Equ. — 2022. — V. 58, № 2. — P. 175–186.

5. Korzyuk V.I. Picard Problem on the Plane for a Quasilinear Hyperbolic Equation of the Second Order / V.I. Korzyuk, O.A. Kovnatskaya // Tr. Inst. Mat., Minsk. — 2023. — V. 31. — P. 70–80.

OBTAINING EXACT EXPRESSIONS FOR NATURAL FREQUENCIES WHEN MODELING VIBRATIONS OF MECHANICAL SYSTEMS WITH A MOVING BOUNDARY

V.L. Litvinov, K.V. Litvinova (Samara, Samara State Technical University, Moscow, Moscow State University)
vladlitvinov@rambler.ru

The article studies transverse vibrations of a rope moving in the longitudinal direction. The model takes into account the rope tension, bending rigidity and resistance of the external environment. The object of study pertains to a wide range of oscillating one-dimensional objects with moving boundaries and loads [1-22]. Such objects are widely used in technology. These are ropes of lifting equipment [2, 9, 13, 20], flexible transmission links [1, 8, 17], beams [3, 18], tape-driven mechanisms [14], conveyors [16], etc. The presence of moving boundaries makes classical methods of mathematical physics inapplicable to solving such boundary value problems, so they have not been sufficiently studied at present. At a constant speed of longitudinal motion, the rope oscillations are characterized by a set of eigen frequencies. In the absence of medium resistance, a discrete Fourier transform is used to solve the problem. As a result, an equation is obtained in the form of series, which makes it possible to find the exact values of the eigen frequencies. The problem in the presence of medium resistance was solved by the Kantorovich-Galerkin method. The equation obtained allows us to find approximate

© Litvinov V.L. Litvinova K.V. , 2025

values of the first two eigen frequencies. A comparison of the exact and approximate frequencies estimates the accuracy of the solution obtained by the Kantorovich-Galerkin method. The article analyzes how the speed of longitudinal rope motion affects the shape of natural oscillations. The solution is made in dimensionless variables, which allows us to use the obtained results to calculate the oscillations of a wide range of technical objects.

References

1. Samarin Yu. P. Forced transverse vibrations of the flexible link at dispersal / Yu. P. Samarin , V. N. Anisimov // Izv. Vuzov. Mashinostroenie — 1986.no. 12. — Pp. 17–21 (In Russian).

2. Goroshko O.A. Introductionin mechanics of one dimensional deformable bodies of variable length. / O.A. Goroshko , G. N. Savin // Kiev: Naukova Dumka — 1971. — 270 pp. (In Russian).

3. Lezhnyva A. A. Bending vibration of beam of variable length / A. A. Lezhnyva // Izv. Acad. Nauk USSR. Mechanic of solidstate — 1970.no. 1. — pp. 159-161 (In Russian).

4. Vesnitskii A. I. Vaves in systems with moving boundaries and loads.Moscow: Fizmatlit — 2001. — pp. 320 (In Russian).

5. Anisimov V. N. Investigation of resonance characteristics of mechanical objects with moving borders by application of the Kantorovich-Galerkin method / V. N. Anisimov , V. L. Litvinov // Vestn. Samar.Gos.Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mt. Nauki — 2009.no. 1(18). — pp. 149–158 (In Russian).

6. Anisimov V. N. On a method of analytical soluthion of wave equation describing the oscillation system with moving boundaries / V. N. Anisimov , V. L. Litvinov , I. V. Korpen // Vestn. Samar.Gos. Tekhn.Univ. Ser. Fiz.-Mat.Nauki — 2012.no. 3(28). — pp. 145–151 (In Russian).

7. Ding Hu. Galerkin methods for natural frequencies of high-speed axially moving beams / Ding Hu, Chen Li-Qun. // J. Sound and Vibr. — 2010. no. 17. — pp. 3484–3494.

8. Zhu W. D. Exact response of a translating string with arbitrarily varying length under general excitation / W. D. Zhu , N. A. Zheng // Trans. ASME. J. Appl.Mech. — 2008 — vol. 75 no. 3

9. Zhu W. D. Theoretical and experimental investigation of elevator cable dynamic sand control / W. D. Zhu, Y. Chen // Trans. ASME. J. Vibr. And Acoust. — 2006. — no. 1. — Pp. 66–78.

10. Erofeev V.I. Excitation of waves by a load moving along a damaged flexible one-dimensional guide lying on an elastic base / V.I.

Erofeev, E.E. Lisenkova // Problems of Mechanical Engineering and Machine Reliability — 2016. — № 6 — Pp. 14–18.

11. Erofeev V.I. Generation of waves by a source moving along a deformable guide lying on an elastic-inertial base / V.I. Erofeev, D.A. Kolesov, E.E. Lisenkova // Mechanical engineering and engineering education — 2014 — № 2 (39) — Pp. 37–40.

12. Erofeev V.I. Investigation of wave processes in a one-dimensional system lying on an elastic-inertial base, with a moving load / V.I. Erofeev, D.A. Kolesov, E.E. Lisenkova // Bulletin of Scientific and Technical Development — №. 6 (70) — 2013 — Pp. 18–29.

13. P. Zhang. Analyses of longitudinal vibration and energetic on flexible hoisting systems with arbitrarily varying length/ P. Zhang, C. M. Zhu, L. J. Zhang. // Journal of Shanghai Jiao-Tong University — 2008 —42(3) —Pp. 481–488.

14. Ragulsky K.I. Questions of the Dynamics of Precision Tape-Driving Mechanisms / K.I. Ragulsky // In: The Dynamics of Machines. - Moscow: Nauka — 1971. — Pp. 169–177.

15. S.H. Chen. On internal resonance of nonlinearvibration of axially moving beams / S.H. Chen, J. L.Huang. // Acta Mechanica Sinica, — 2005 — vol.37 no. 1 — pp. 57–63 (Chinese).

16. Khosaev Kh. S. Mathematical description of the dynamic characteristics of the rope belt of a belt conveyor / Kh. S. Khosaev // Tr. North-Caucasus. State. Technol. University. — 2001. — №8. — Pp. 234–239.

17. Tikhonov V.S. Transverse Vibrations of a Flexible String with Tame-Varying Length in Flow / V.S. Tikhonov, A.A. Abramov // Vest. Mosk.Univ. Ser 1.Matematika, Mechanica — 1993 no.5 — pp. 45–48 (In Russian).

18. Anisimov V.N. Mathematical models of nonlinear longitudinal-cross oscillations of object with moving borders / V.N. Anisimov, V.L. Litvinov // Vestn. Samar.Gos.Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki — 2015 — Vol. 19 no.2 — pp. 382–397. (In Russian).

19. Kechedgiyan L.O. A problem of mathematical physics with moving boundary / L.O. Kechedgiyan, N.A. Pinchuk, A.M. Stolyar // Vest.Vuzov North-Kaukaz. Region.Natural Sciences — 2008 no 1. — pp. 22–27.(In Russian).

20. Litvinov V.L. Application of the Kantorovich-Galerkin method for solving boundary value problems with conditions on moving boundaries. / V.L. Litvinov , V.N. Anisimov // Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk. Mechanics of a rigid body — 2018 №2 — P. 70–77.

21. Litvinov V.L. Solving boundary value problems with moving boundaries using an approximate method for constructing solutions of integro-differential equations / V.L. Litvinov // Tr. IMM UrO RAN 26 — 2020 — P. 188–199.

22. Litvinov V.L. Approximate method for solving boundary value problems with moving boundaries by reduction to integro-differential equations / V.L. Litvinov, K.V. Litvinova // Zh. Vychisl. math. and mat. Phys., 62:6 — 2022 — P. 977–986.

ABOUT THE INDICATOR OF SUBHARMONIC FUNCTIONS ON THE UNBOUNDED HALF-RING[1]

K.G Malyutin, A.A. Naumova
(Russian Federation, Kursk, Kursk State University)
malyutinkg@gmail.com, aliona.filatowa2013@yandex.ru

We extend some results on the Phragmŕen–Lindelöf theory to the more general situation where the subharmonic functions are defined on the half-ring $D_+(R) = \{z||z| > R, \Im z > 0\}$. We consider subharmonic functions $v : D_+(R) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \setminus +\infty$ defined on the region $D_+(R)$. Let $SK(R)$ be the space of subharmonic functions v on $D_+(R)$ such that v prosses a positive harmonic majorant on each bounded subdomain of half-ring $D_+(R')$ for any $R' > R$. For a given proximate order $\rho(r)$, $\lim\limits_{r\to+\infty} \rho(r) = \varrho$, we will denote $r^{\rho(r)}$ as $V(r)$.

If for a subharmonic function $v \in SK(R)$ and the given proximate order ρ the limits

$$\sigma_\infty = \limsup_{r\to\infty} V^{-1}(r)v(re^{i\theta}) \neq 0, \infty,$$
$$\sigma_R = \limsup_{r\to R+0} V_R^{-1}((r-R)^{-1})v(re^{i\theta}) \neq 0, \infty$$

hold uniformly with respect θ, $\theta \in (0,\pi)$, then ρ is called an own proximate order of v .

Let ρ be own proximate order of $v(z) \in SK(R)$. The function defined in $(0,\pi) \times \{1,2\}$ by

$$h_v(\theta, j) = \begin{cases} h_{v,1}(\theta =) \limsup\limits_{r\to\infty} V^{-1}(r) v\left(\left(\left(\dfrac{1}{r} + R\right)\right) e^{i\theta}\right), & \theta \in (0,\pi), \\ h_{v,2}(\theta) = \limsup\limits_{r\to\infty} V^{-1}(r)v(re^{i\theta}), & \theta \in (0,\pi), \end{cases}$$

[1] The research is supported by Russian Science Foundation (project No. 24-21-00006, https://rscf.ru/project/24-21-00006/).

© Malyutin K.G, Naumova A.A., 2025

is called the indicator function v with respect to a proximate order ρ.

The most important result in the theory of subharmonic functions is the maximum principle. An important generalization of the maximum principle to the case of unbounded domains is the Phragmen-Lindelof theorem (see [1, Chapter 8]. We prove the analogue of Phragmen-Lindelof theorem for the most important domain for us for $D_+(R)$.

Теорема 1 (maximum modulus principle for subharmonic functions on $D_+(R)$**.** *Let on* $D_+(R)$ *a subharmonic function* v *is given for which the following conditions are satisfied*: 1) *there exists a number* M *such that for any point* ζ *on the boundary of* $D_+(R)\setminus L_R$ *the inequality holds* $\limsup\limits_{z\to\zeta, z\in D_+(R)} v(z) \leqslant M$; 2) *the function* v *is function of finite orders* ϱ_R *and* ϱ_∞ *at* L_R *and* ∞ *respectively. Then for any point* $z \in D_+(R)$ *the inequality holds* $v(z) \leqslant M$.

We prove for subharmonic functions on $D_+(R)$ the analogous results for entire functions in the plane, known as the trigonometric convexity property.

First, let us introduce the important concepts of ϱ-trigonometrically convex function.

Definition *A function* $h(\theta)$ *defined on an interval* $\langle\alpha,\beta\rangle$ *with values from the extended real line* $[-\infty,\infty]$ *is called* ϱ*-trigonometrically convex on this interval if for any* $\theta_1,\theta_2 \in \langle\alpha,\beta\rangle$, $0 < \theta_2-\theta_1 < \pi/\varrho$, *and for any* $\theta \in (\theta_1,\theta_2)$ *it follows the inequality*

$$h(\theta) \leqslant \frac{\sin\rho(\theta_2-\theta)}{\sin\rho(\theta_2-\theta_1)}h(\theta_1) + \frac{\sin\rho(\theta-\theta_1)}{\sin\rho(\theta_2-\theta_1)}h(\theta_2).$$

Here, the symbol $\langle a,b\rangle$ denotes either an interval, or a segment, or one of two kinds of half-intervals. ϱ-Trigonometrically convex functions first appeared in mathematics in the work of Phragmen and Lindelof [2] (see [1, Chapter 8]). We prove a similar theorem for subharmonic functions on $D_+(R)$.

Theorem 2 (ϱ-trigonometric convexity of indicator). *Let* v *be a subharmonic function on* $D_+(R)$, $v \in SK(R)$, *and let* $h_v(\theta,j)$, $j=1,2$, *be its growth indicators with respect to a proximate order* $\rho(r)$, $\lim\limits_{r\to\infty}\rho(r)=\varrho$. *Then* $h_v(\theta,j)$ *are* ϱ*-trigonometrically convex functions on the interval* $(0,\pi)$.

References

1. Malyutin K.G. Introduction to the Theory of Trigonometrically Convex Functions / K.G. Malyutin. Moscow. : FIZMATLIT, 2024. — 248 c. (in Russian)

2. Phragmen E., Lindelöf E. Sur une extension d'un principe classique de l'analyse monogenes dans le voisinage d'un point singulier / E. Phragmen , E. Lindelöf // Acta Math. — 1908. — Vol. 31. P. 381–406.

STRUCTURE OF GLOBAL CONTINUA OF SOLUTIONS TO SOME NONLINEAR STURM-LIOUVILLE PROBLEMS

G.M. Mamedova (Baku, Baku state University)
m.g.m.400@mail.ru

We consider the following nonlinear Sturm-Liouville problem

$$-\left(p(x)y'\right)' + q(x)y = \lambda r(x)y + h(x, y, y', \lambda),\ x \in (0, \pi), \tag{1}$$

$$b_0 y(0) = d_0 y'(0), \tag{2}$$

$$(a_1\lambda + b_1)y(\pi) = (c_1\lambda + d_1)y'(\pi), \tag{3}$$

where λ is a real parameter, p is a positive continuously differentiable function on $[0, \pi]$, q is a real-valued continuous function on $[0, \pi]$, r is a positive continuous function on $[0, \pi]$, b_0, d_0, a_1, b_1, c_1, d_1 are real numbers such that $|b_0| + |d_0| > 0$ and $a_1 d_1 - b_1 c_1 > 0$. The nonlinear term h has a representation $h = f + g$, where f and g are real-valued continuous functions on $[0, \pi] \times \mathbb{R}^3$ and satisfy the conditions: there exists a positive constant M such that

$$\left|\frac{f(x, y, v, \lambda)}{y}\right| \leqslant M,\ (x, y, v, \lambda) \in [0, \pi] \times \mathbb{R}^3; \tag{4}$$

$$g(x, y, v, \lambda) = o\left(\left(y^2 + v^2\right)^{1/2}\right) \text{ at } (y, v) = (0, 0), \tag{5}$$

and

$$g(x, y, v, \lambda) = o\left(\left(y^2 + v^2\right)^{1/2}\right) \text{ at } (y, v) = \infty, \tag{6}$$

uniformly in $x \in [0, \pi]$ and $\lambda \in \Lambda$, for any bounded interval $\Lambda \subset \mathbb{R}$.

If $h \equiv 0$, then it follows from [1] that the eigenvalues of problem (1)–(3) are real and simple and forms an infinitely increasing sequence $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$. Moreover, in the case of $c_1 = 0$ the eigenfunction $y_k(x)$

© Mamedova G.M., 2025

corresponding to the eigenvalue λ_k has exactly $k-1$ simple zeros, in the case of $c_1 \neq 0$, then there exists a positive integer κ_0 such that the eigenfunction $y_k(x)$ for $k \leqslant \kappa_0$ has exactly $k-1$, for $k > \kappa_0$ has exactly $k-2$ simple zeros in $(0, \pi)$.

Let E be the Banach space $C^1[0,\pi] \cap \{y \,:\, b_0 y(0) = d_0 y'(0)\}$ with the norm $||y||_1 = \max\limits_{x \in [0,\pi]} |y(x)| + \max\limits_{x \in [0,\pi]} |y'(x)|$. We denote by S_k^+ the set of functions $y \in E$ that satisfy the conditions: the zeros of the function y contained in $[0,\pi]$ are simple; the function y has $k-1$ such zeros in $(0,\pi)$; the function y is positive near $x = 0$. Moreover, let $S_k^- = -S_k^+$ and $S_k = S_k^+ \cup S_k^-$.

Now let $T_k^\nu = S_k^\nu$ for $c_1 = 0$ and $c_1 \neq 0$, $k \leqslant \kappa_0$, $T_k^\nu = S_{k-1}^\nu$ for $c_1 \neq 0$, $k > \kappa_0$.

We introduce the notations:

$$J_k = [\lambda_k - M/r_0, \lambda_k + M/r_0], \; r_0 = \min_{x \in [0,\pi]} r(x),$$

$$I_k = \begin{cases} J_k \text{ for } k < \kappa_0, \\ J_{\kappa_0} \cup J_{\kappa_0+1} \text{ for } k = \kappa_0, \\ J_{k+1} \text{ for } k > \kappa_0, \end{cases}$$

Let $D \subset \mathbb{R} \times E$ be the closure of the set of nontrivial solutions to problem (1)–(3).

Theorem 1. *Let conditions (4)-(6) hold. Then for each $k \in \mathbb{N}$ and each $\nu \in \{+, -\}$ there exists a connected component of the set D for which the following statements hold:*

(i) $I_k \times \{0\} \subset D_k^\nu$ and $I_k \times \{\infty\} \subset D_k^\nu$;

(ii) $D_k^\nu \backslash (I_k \times \{0\}) \cup (I_k \times \{\infty\}) \subset \mathbb{R} \times T_k^\nu$.

References

1. Binding P.A. Sturm-Liouville problems with eigenparameter depen dent boundary conditions / P.A. Binding, P.J. Browne, K. Seddighi // Proc. Edinburgh Math. Soc. — 1994. — V. 37, No. 1. — P. 57–72.

2. Aliyev Z.S. Some global results for nonlinear Sturm-Liouville problems with spectral parameter in the boundary condition / Z.S. Aliyev, G.M. Mamedova // Ann. Polon. Math. — 2015. — V. 115, No. 1. — P. 75–87.

EXISTENCE OF NODAL SOLUTIONS OF SOME NONLINEAR HALF-EIGENVALUE PROBLEMS

M.M. Mammadova (Baku, Baku State University)
memmedova.mesume@inbox.ru

We consider the following nonlinear half-eigenvalue problem

$$y^{(4)} - (q(x)y')' = \tau r(x)h(y(x)) + \varphi(x)y^+ + \psi(x)y^-, \, x \in (0,1), \qquad (1)$$

subject the boundary conditions

$$y'(0)\cos\alpha - y''(0)\sin\alpha = 0, \;\; y(0)\cos\beta + Ty(0)\sin\beta = 0, \qquad (2)$$

$$y'(1)\cos\gamma + y''(1)\sin\gamma = 0, \;\; y(1)\cos\delta - Ty(1)\sin\delta = 0, \qquad (3)$$

where $Ty \equiv y''' - qy'$, $q \in AC([0,1];(,0+\infty))$, $r \in C([0,1];(0,+\infty))$, $\varphi, \psi \in C([0,1];\mathbb{R})$, τ and $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ are real parameter such that $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in [0,\pi/2]$. The function h has the form $f+g$, where $f, g \in C([0,1];\mathbb{R})$ and satisfy the following conditions: there exists a positive constant M such that

$$\left|\frac{f(s)}{s}\right| \leqslant M, \;\; s \in \mathbb{R}, \, s \neq 0;$$

there exist positive numbers g_0 and g_∞ such that

$$g_0 = \lim_{|s|\to 0}\frac{g(s)}{s} \;\text{ and }\; g_\infty = \lim_{|s|\to +\infty}\frac{g(s)}{s}.$$

In this note clarifies the results presented in [1].

Let E be the Banach space $C^3[0,1] \cap (b.c.)$ with the usual norm $||y||_3 = \sum\limits_{i=0}^{3} ||y^{(i)}||_\infty$, where $(b.c.)$ is the set of functions satisfying the boundary conditions (2), (3), and $||u||_\infty = \max\limits_{x\in[0,\,l]} |u(x)|$. Moreover, let S_k^ν, $k \in \mathbb{N}$, $\nu \in \{+,-\}$, be the set of functions satisfying oscillatory properties of eigenfunctions (and their derivatives) of the spectral problem obtained from (1)-(3) by setting $h, \varphi, \psi \equiv 0$, which constructed in [2]. Note that the function $y \in S_k^\nu$ has exactly $k-1$ simple nodal zeros in $(0,1)$ and the function νy is positive near $x=0$.

By [3, Theorem 3.3] the half-linear eigenvalue problem (1)-(3) with $h(y) \equiv y$ has two sequences $\{\lambda_k^+\}_{k=1}^\infty$ and $\{\lambda_k^-\}_{k=1}^\infty$ of real and simple

© Mammadova M.M., 2025

half-eigenvalues such that $\lambda_1^\nu < \lambda_2^\nu < \ldots < \lambda_k^\nu < \ldots$ for each $\nu \in \{+, -\}$. Moreover, for each $k \in \mathbb{N}$ and each $\nu \in \{+, -\}$ the eigenfunc tion y_k^ν corresponding to λ_k^ν lies in S_k^ν.

Let $r_0 = \min\limits_{x\in[0,1]} r(x)$ and $r_1 = \max\limits_{x\in[0,1]} r(x)$.

Theorem 1. *Let $g_0 > M\frac{r_1}{r_0}$ and $g_\infty > M\frac{r_1}{r_0}$, and let for some $k \in \mathbb{N}$ and $\nu \in \{+, -\}$ the conditions hold:*

$$\lambda_k^\nu > 0 \;\; \textit{and} \;\; \frac{\lambda_k^\nu}{g_0 - Mr_1/r_0} < \tau < \frac{\lambda_k^\nu}{g_\infty + Mr_1/r_0}, \;\; \textit{or}$$

$$\lambda_k^\nu > 0 \;\; \textit{and} \;\; \frac{\lambda_k^\nu}{g_\infty - Mr_1/r_0} < \tau < \frac{\lambda_k^\nu}{g_0 + Mr_1/r_0}, \;\; \textit{or}$$

$$\lambda_k^\nu < 0 \;\; \textit{and} \;\; \frac{\lambda_k^\nu}{g_0 + Mr_1/r_0} < \tau < \frac{\lambda_k^\nu}{g_\infty - Mr_1/r_0}, \;\; \textit{or}$$

$$\lambda_k^\nu < 0 \;\; \textit{and} \;\; \frac{\lambda_k^\nu}{g_\infty + Mr_1/r_0} < \tau < \frac{\lambda_k^\nu}{g_0 - Mr_1/r_0}.$$

Then there exists a solutions v_k^ν of problem (1)-(3) such that $v_k^\nu \in S_k^\nu$ (i.e. v_k^ν has exactly $k-1$ simple nodal zeros in $(0,1)$).

References

1. Mammadova M.M. Nodal solutions of some fourth-order nonlinear half-eigenvalue problems / M.M. Mammadova // Modern problems of mathematics, mechanics and information technologies : materials of the Republican Scientific Conference, dedicated to the 101st anniversary of the birth of the national leader of the Azerbaijani people Heydar Aliyev. — Baku : «Publishing House of Baku State University», 2024. — P. 119–121.

2. Aliyev Z.S. Global bifurcation of solutions of certain nonlinear eigenvalue problems for ordinary differential equations of fourth order /Z.S. Aliyev // Sb. Math. — 2016. — V. 207, No. 12. — P. 1625–1649.

3. Rynne B.P. Half-eigenvalues of self-adjoint, $2m$th-order differential operators and semilinear problems with jumping nonlinearities / B.P. Ry nne// Differential Integral Equations. — 2001. — V. 14, No. 9. — P. 1129–1152.

UNIFORM CONVERGENCE OF A FOURIER SERIES EXPANSIONS IN THE SUBSYSTEMS OF ROOT FUNCTIONS OF SOME FOURTH-ORDER EIGENVALUE PROBLEM

V.A. Mehrabov (Baku, Baku State University)
mvuqar-1969@mail.ru

We consider the following eigenvalue problem

$$y^{(4)}(x) - (q(x)y'(x))' = \lambda y(x), \; x \in (0,1), \tag{1}$$

$$y''(0) = Ty(0) - a\lambda y(0) = 0, \tag{2}$$

$$y''(1) - b\lambda y'(1) = Ty(1) - c\lambda y(1) = 0, \tag{3}$$

where $\lambda \in \mathbb{C}$ is a spectral parameter, $Ty \equiv y''' - qy'$, q is a positive absolutely continuous function on $[0,1]$, a, b, c are real constants such that $a > 0$, $b > 0$ and $c > 0$. In this case problem (1)-(3) was considered in [1], where it was shown that the eigenvalues of this problem are real, simple, with except, for the case $c > 1$ and $a = c-1$, when the eigenvalue 0 which has algebraic multiplicity 2, and form an unboundedly sequence $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ such that $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots < \lambda_k < \ldots$, and $\lambda_1 < 0 = \lambda_2$ for $c \leqslant 1$ and $c > 1$, $a > c-1$, $\lambda_1 = 0 = \lambda_2$ for $c > 1$ and $a = c-1$, $\lambda_1 = 0 < \lambda_2$ for $c > 1$ and $a < c-1$.

Along with problem (1)-(3), we consider the following spectral problem

$$\begin{array}{c} y^{(4)}(x) = \lambda y(x), \; x \in (0,1), \\ y''(0) = y(0) = y'(1) = y(1) = 0, \end{array} \tag{4}$$

the eigenvalues of which are positive and simple and form an unboundedly increasing sequence $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ [2].

By $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ we denote the system of root functions corresponding to the system $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ of eigenvalues of problem (1)-(3).

Let i, j, l (i, j, $l \geqslant 3$) be arbitrary different fixed positive integers,

$$\tilde{\Delta}_{i,j,l} = \begin{vmatrix} y_i(0) & y_j(0) & y_l(0) \\ y_i'(1) & y_j'(1) & y_l'(1) \\ y_i(1) & y_j(1) & y_l(1) \end{vmatrix},$$

and $\Delta_{i,j,l} = -\delta_i^{-1}\delta_j^{-1}\delta_l^{-1}abc\tilde{\Delta}_{i,j,l}$, where $\delta_k = ||y_k||_2^2 + ay_k^2(0) + b{y_k'}^2(1) - cy_k^2(1)$ for $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$.

© Mehrabov V.A., 2025

It follows from [3, Theorem 3] that if $\Delta_{i,\,j,\,l} \neq 0$, then the system $\{y_k\}_{k=1,\,k\neq i,j,\,l}^{\infty}$ forms a basis in $L_p(0,1)$, $1 < p < \infty$, which is an unconditional basis for $p = 2$. In this case each element of the system $\{u_k\}_{k=1,\,k\neq i,j,\,l}^{\infty}$ conjugate to the system $\{y_k\}_{k=1,\,k\neq i,j,\,l}^{\infty}$ is determined as follows: $u_k = v_k - \frac{1}{\Delta_{i,j,\,l}}\{v_i\Delta_{k,j,\,l} - v_j\Delta_{k,i,l} + v_l\Delta_{k,i,j}\}$, where $v_k = \delta_k^{-1}y_k$.

For any function $f \in L_2(0,1)$ let

$$\Delta_{i,j,\,l}(f) = \begin{vmatrix} (f, y_i) & (f, y_j) & (f, y_l) \\ y_i'(1) & y_j'(1) & y_l'(1) \\ y_i(1) & y_j(1) & y_l(1) \end{vmatrix},$$

where $(\cdot\,,\,\cdot)$ is a scalar product in $L_2(0,1)$.

Theorem 1. *Let $i,\ j,\ l$ $(i,\ j,\ l \geqslant 3)$ be arbitrary different fixed positive integers such that $\tilde{\Delta}_{i,\,j,\,l} \neq 0$, and let the Fourier series expansion of a function $f(x) \in C[0,1]$ in the system $\{\vartheta_k\}_{k=1}^{\infty}$ of eigenfunctions corresponding to the system $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ of eigenvalues of problem (4) uniformly converges on the interval $[0,1]$. If $\Delta_{i,j,\,l}(f) \neq 0$, then the Fourier series*

$$f(x) = \sum_{k=1,\,k\neq i,\,j,\,l}^{\infty} (f, u_k)y_k(x),$$

of the function f in the system $\{y_k\}_{k=1,\,k\neq i,j,\,l}^{\infty}$ uniformly converges on the interval $[0,\tau]$ for each $\tau \in (0,1)$, and if $\Delta_{i,j,\,l}(f) = 0$, then this series uniformly converges on the interval $[0,1]$.

References

1. Mehrabov V.A. Basis properties of root functions of the eigenvalue problem for the equation of a vibrating beam with a spectral parameter in the boundary conditions /V.A. Mehrabov // BSU J. Math. Comput. Sci. —2024. — V. 1, No. 2. — P. 1-11.

2. Banks D.O. A Prüfer transformation for the equation of a vibrating beam subject to axial forces / D.O. Banks, G.J. Kurowski // J. Differential Equations. — 1977. — V. 24, No. 1. — P. 57-74.

3. Aliyev Z.S. On the defect basicity of the system of root functions of differential operators with spectral parameter in the boundary conditions / Z.S. Aliyev// Proc. Inst. Math. Mech. Natl. Acad. Sci. Azerbaijan. — 2008. — V. 28, No. 2. — P. 3-14.

ON A BEST APPROXIMATION OF POWER FUNCTIONS

V.R. Misiuk (Grodno, GrSU)
misiuk@grsu.by

Let $\mathcal{P}_n$ denote the set of algebraic polynomials of degree not exceeding n. For a function f in the Hardy space H_p, $0 < p \leqslant \infty$, defined in the disk $D = \{z \ : \ |z| < 1\}$, we introduce the best approximation as

$$E_n(f)_p = \inf_{P_n \in \mathcal{P}_n} \|f - P_n\|_{H_p}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

where $\|\cdot\|_{H_p}$ is the norm in H_p.

In polynomial approximation theory, the following implication is well known and referred to as a Jackson-type theorem:

$$f^{(s)} \in H_p \quad \Longrightarrow \quad E_n(f)_p \leqslant \frac{c}{n^s} \left\| f^{(s)} \right\|_{H_p} \qquad \text{at} \qquad n \geqslant s\,,$$

where $c > 0$ depends only on p and s, and $f^{(s)}$ is the s-th derivative of f $(s \in \mathbb{N})$.

For $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$, consider the function $f_\alpha(z) = (1 - z)^\alpha$, where the principal branch of the power function is taken in the domain $\mathbb{C}\backslash[1, \infty)$. Based on the above implication, it can be shown that as $n \to \infty$, the following weak equivalence holds:

$$E_n(f_\alpha)_p \asymp n^{-\alpha - \frac{1}{p}}\,, \qquad \alpha \in \left(-\frac{1}{p}\,, \infty\right) \backslash \mathbb{Z}\,.$$

Let $A_p = A_p(D)$, $0 < p \leqslant \infty$, denote the Bergman space of analytic functions f in D, endowed with the quasi-norm $\|f\|_{A_p} = \|f\|_{L_p(D)}$ (a norm when $1 \leqslant p \leqslant \infty$) relative to flat Lebesgue measure.

$$\|f\|_{A_p} = \|f\|_{L_p(D)} := \left(\int_D |f(\xi)|^p \, dm_2(\xi) \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \qquad \text{at} \ \ 0 < p < \infty,$$

$$\|f\|_{A_\infty} = \|f\|_{L_\infty(D)} := \sup_{\xi \in D} |f(\xi)| < \infty \qquad \text{at} \ \ p = \infty.$$

For $f \in A_p(D)$, we define the best approximation in A_p as:

$$E_n(f)_{A_p} = \inf_{P_n \in \mathcal{P}_n} \|f - P_n\|_{A_p(D)}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

© Misiuk V.R., 2025

where $\|\cdot\|_{A_p(D)}$ is the A_p quasi-norm. The following result [1] can be regarded as an analogue of the Jackson-type theorem in the Bergman space $A_p(D)$: if $s \in \mathbb{N}$ and $f^{(s)} \in A_p(D)$, $0 < p < \infty$, then:

$$E_n(f)_{A_p} \leqslant \frac{c}{n^s} \left\| f^{(s)} \right\|_{A_p}, \qquad n = s,\, s+1,\, \ldots\,,$$

where $c > 0$ is independent of f and n.

From this, it follows that as $n \to \infty$, the corresponding weak equivalence holds:

$$E_n(f_\alpha)_p \asymp n^{-\alpha-\frac{2}{p}}, \qquad \alpha \in \left(-\frac{2}{p}, \infty\right) \setminus \mathbb{Z}.$$

It should be noted that various aspects of these relations and their applications were previously studied by the author in [2].

References

1. Misiuk V.R. Theorems for the Best Polynomial Approximations in the Bergman Space / V.R. Misiuk // Vesnik of Yanka Kupala State University of Grodno. — 2006. — № 1. — P. 58–62.

2. Misiuk V.R. On the inverse theorem of the theory of rational approximations for Bergman spaces / V.R. Misiuk // Problems of physics, mathematics and technics. — 2010. — №.1(2). — P. 34–37.

GLOBAL BIFURCATION FROM INFINITY IN SOME FOURTH-ORDER NONLINEAR STURM—LIOUVILLE PROBLEMS

F.M. Namazov (Baku, Baku State University)
faig-namazov@mail.ru

We consider the fourth-order nonlinear Sturm-Liouville equation

$$y^{(4)} - (qy')' = \lambda y + h(x, y, y', y'', y''', \lambda),\ x \in (0,1), \tag{1}$$

subject the boundary conditions

$$\begin{array}{l} y''(0) = 0,\ Ty(0) - b\lambda y(0) = 0, \\ y''(1) = 0,\ Ty(1) - d\lambda y(1) = 0, \end{array} \tag{2}$$

where $\lambda \in \mathbb{R}$ is a spectral parameter, $Ty \equiv y''' - qy'$, $q(x)$ is a positive absolutely continuous function on $[0,1]$, b, d are real constants such that

© Namazov F.M., 2025

$b > 0$, $d < 0$. The nonlinear term h has the form $h = f + g$, where the real-valued functions f and g are continuous on $[0,1] \times \mathbb{R}^5$ and have the following properties: there exist a positive constant M and a sufficiently large constant χ such that

$$\left| \frac{f(x,y,s,v,w,\lambda)}{y} \right| \leqslant M, \ (x,y,s,v,w,\lambda) \in [0,1] \times \mathbb{R}^5, \ y \neq 0, \quad |y| + |s| + |v| + |w| > \chi; \tag{3}$$

for any bounded interval $\Lambda \subset \mathbb{R}$,

$$g(x,y,s,v,w,\lambda) = o\,(|y|+|s|+|v|+|w|) \ \text{ as } \ |y|+|s|+|v|+|w| \to \infty, \tag{4}$$

uniformly in $x \in [0,l]$ and in $\lambda \in \Lambda$.

Linear problem obtained from (1), (2) by setting $h \equiv 0$ was considered in [1], where it was shown that the eigenvalues of this problem are nonnegative and simple, and form an infinitely increasing sequence $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$; for each $k \in \mathbb{N}$ the eigenfunctions $y_k(x)$ corresponding to the eigenvalue λ_k has $k-1$ simple zeros in the interval $(0,1)$.

Let $E = C^3[0,l] \cap \{y''(0) = y''(1) = 0\}$ be a Banach space equipped with the norm $||y||_3 = \sum\limits_{i=0}^{3} ||\, y^{(i)}||_\infty$, where $||y||_\infty = \max\limits_{x \in [\,0,1]} |y\,(x)|$. For each $k \in \mathbb{N}$ and each $\nu \in \{+\,,\,-\}$, we denote by $S_k^\nu \subset E$ the set of functions $y \in E$ constructed in the paper [2] that have oscillatory properties of eigenfunctions of the linear problem (1), (2) with $h \equiv 0$ and their derivatives. Note that in [2] the global bifurcation of nontrivial solutions from zero of the problem (1), (2) was studied.The existence of two families of unbounded components of nontrivial solutions emanating from intervals of the line of trivial solutions and contained in classes S_k^ν, $k \in \mathbb{N}$, $\nu \in \{+\,,\,-\}$, with fixed oscillation count was proved.

For each $k \in \mathbb{N}$ and each $\nu \in \{+\,,\,-\}$, we denote by S_k^ν the set of functions $y \in E$ constructed in [2, pp. 91–93], which have the oscillatory properties of eigenfunctions of the linear problem (1), (2) with $h \equiv 0$ and their derivatives.

Lemma 1. *Let conditions (3) and (4) hold. Then the set of bifurcati on points of problem (1), (2) with respect to the set $\mathbb{R} \times S_k^\nu$ is nonempty and is contained in $I_k \times \{\infty\}$, where $I_k = [\lambda_k - M, \lambda_k + M]$.*

For each $k \in \mathbb{N}$ and each ν, let D_k^ν be the union of all components of the set of nontrivial solutions of problem (1), (2) which meets the interval $I_k \times \{\infty\}$ with respect to the set $\mathbb{R} \times \mathcal{S}_k^\nu$.

Theorem 1. *Let conditions (3) and (4) hold. Then for each $k \in \mathbb{N}$ and each ν the set D_k^ν is nonempty and one of the following statements hold:*

(i) the set D_k^ν meets the interval $I_{k'} \times \{\infty\}$ with respect to the set $\mathbb{R} \times \mathcal{S}_{k'}^{\nu'}$ for some $(k', \nu') \neq (k, \nu)$;

(ii) the set D_k^ν meets the line $\mathcal{R} = \{(\lambda, 0) : \lambda \in \mathbb{R}\}$ for some λ;

(iii) the projection $P_{\mathcal{R}}(D_k^\nu)$ of the set D_k^ν onto $\mathcal{R}$ is unbounded.

References

1. Aliyev Z.S. Spectral properties of a fourth-order eigenvalue prob lem with spectral parameter in the boundary conditions / Z.S. Aliyev, F.M. Namazov // Elect.J. Differ. Equ. — 2017. — V. 2017, No. 307. — P. 1-11.

2. Namazov F.M. Global bifurcation of solutions of some fourth-order nonlinear eigenvalue problems with spectral parameter in boundary conditions / F.M. Namazov // BSU J. Math. Comput. Sci. — 2024. — V. 1, No. 1. — P. 89-98.

SOME ESTIMATIONS FOR THE WEIGHTED HARDY-TYPE OPERATOR FOR $0 < P < 1$.

A. Senouci (Algeria, University of Tiaret)

kamer295@yahoo.fr

It is well known that for L_p-spaces with $0 < p < 1$ the Hardy inequality is not satisfied for arbitrary non-negative measurable functions, but it is satisfied for non-negative non-increasing functions (for more details see [2]).

In [3] the Hardy-type inequality for $0 < p < 1$ was proved under weaker assumptions on f but still of monotonicity type. The result was proved for the n-dimensional variant of the Hardy operator, namely for the operator H defined for all functions $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ by

$$(Hf)(t) = \frac{1}{v_n t^n} \int_{B_t} f dy, 0 < t < \infty,$$

where B_t is the ball centered at the origin of radius r and v_n is the volume of the unit ball in $\mathbb{R}^n$.

Theorem 1. *Let $0 < p < 1$, $\alpha < n - \frac{1}{p}$ and $M > 0$. Moreover, let f be a function non-negative measurable on $\mathbb{R}^n$ such that $\|f(x)|x|^{\frac{n}{p'}}\|_{L_p(Br)} < \infty$ and*

$$\|f(x)\|_{L_1(B_r)} \leqslant M \left\| f(x)|x|^{\frac{n}{p'}} \right\|_{L_p(B_r)} \tag{1}$$

for all $r > 0$, where $p' = \frac{p}{p-1}$. Then

$$\|(Hf)(t)\|_{L_p(0,\infty)} \leqslant N \left\| f(x)|x|^{\alpha - \frac{n-1}{p}} \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}, \tag{2}$$

© Senouci A., 2025

where
$$N = v_n^{-1}((n-\alpha)p-1)^{-\frac{1}{p}} M. \tag{3}$$

The weighted Hardy operator $(H_w f)(t)$ is defined as follows

$$(H_w f)(t) = \frac{1}{W(t)} \int_0^t f(x)w(x)dx,$$

where $0 < W(t) := \int_0^t w(x)dx < \infty$ for all $r > 0$, and $w(x)$ is the weigth function. Note that for $w(x) = 1$, the operator H_w is the usual Hardy operator $(Hf)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$.

Later the results of [3], were extended to the weighted Hardy operator (for more details see [1]).

The objective of this work is to extend the results of [1] to other Hardy-type operator by introducing a new parameter $\beta \geqslant 0$.

We consider the weighted Hardy-type operator $H_{w,\beta}$ given by

$$\left(H_{w,\beta} f\right)(x) = \frac{1}{W_\beta(x)} \int_0^x t^{-\beta} f(t)w(t)dt,$$

where $0 < W_\beta(x) := \int_0^x t^{-\beta} w(t)dt < \infty$ for all $x > 0$.

$$\text{Let } x^{-\beta} w(x) \leqslant C_1 y^{-\beta} w(y), \text{ for } \beta \geqslant 0,\ 0 < y < x < \infty. \tag{4}$$

Lemma 1. *Let* $0 < p < 1$, $C_1 > 0$, $C_2 > 0$, *w be a weight function on* $(0, \infty)$, *satisfying condition (4). If f is a non-negative Lebesgue measurable function on* $(0, \infty)$, *such that for almost* $0 < x < \infty$,

$$f(x) \leqslant \frac{C_2}{x^{-\beta}} \left(\int_0^x y^{-\beta} w(y) y^{p-1} dy \right)^{-\frac{1}{p}} \left(\int_0^x \left(y^{-\beta} f(y)\right)^p w(y) y^{p-1} dy \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{5}$$

then, for all $r > 0$

$$\left(H_{w,\beta} f\right)(r) \leqslant A \left(\int_0^r \left(y^{-\beta} f(y)\right)^p w(y) y^{p-1} dy \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{6}$$

where $A = C_2^{1-p} \frac{C_1^{\frac{2}{p}-1} p^{\frac{1}{p}}}{r^{1-\frac{\beta}{p}} w^{\frac{1}{p}}(r)}$.

$$\text{Let } y^{-\beta} w(y) \leqslant C_3 x^{-\beta} w(x), \text{ for } \beta \geqslant 0,\ 0 < y < x < \infty. \tag{7}$$

Remark 1. If w satisfies (7) where f is a non-negative Lebesgue measurable function on $(0, \infty)$ and (5) holds in the reversed direction (with constant C_3), then also (6) holds in the same direction.

Theorem 2. *Let $0 < p < 1,\ C_1 > 0,\ C_2 > 0,\ w$ be a weight function on $(0, \infty)$, satisfying condition (4) and $\alpha < 1 - \frac{\beta+1}{p}$. If f is a non-negative Lebesgue measurable function on $(0, \infty)$, satisfying (5), then for all $r > 0$*

$$\|r^{\alpha}\left(H_{w,\beta}f\right)(r)\|_{L_{p,w}(0,\infty)} \leqslant$$
$$\leqslant C_2^{1-p} C_1^{\frac{2}{p}-1}\left(1-\alpha-\frac{\beta+1}{p}\right)^{-\frac{1}{p}}\left\|y^{\alpha-\frac{\beta}{p'}} f(y)\right\|_{L_{p,w}(0,\infty)}. \quad (8)$$

If w and f satisfies (7) and (5) holds in the reversed direction respectively, then also (8) holds in the same direction.

Remark 2. By putting $\beta = 0$ in (8), we get Theorem 2.1 of [1].

References

1. Azzouz N. An inequality for the weighted Hardy operator for $0 < p < 1$ / N. Azzouz, B. Halim, A. Senouci // Eurasian Math. j., 2013. — V. 4, n. 3. — 127-131.

1. Burenkov V.I. On the exact constant in the Hardy inequality with $0 < p < 1$ for monotone functions / V.I. Burenkov // Trudy Matem. Inst. Steklov, 1992. — V. 194. — 58-62 (in Russian); English translation in proc. Steklov Inst. Math., 1993. — V. 194, no. 4. — 59-63.

3. Senouci A. Hardy-type inequality for $0 < p < 1$ / A. Senouci, T. Tararykova // Evraziiskii Matematicheskii Zhurnal, 2007. — V. 2. — 112-116.

GLOBAL BIFURCATION OF NONTRIVIAL SOLUTIONS FROM ZERO IN SOME NONLINEARIZABLE EIGENVALUE PROBLEMS WITH INDEFINITE WEIGHT FUNCTION

R.B. Seyidzade (Baku, Baku State University)
rakhshandaseyidzade@gmail.com

Consider the following nonlinearizable eigenvalue problem

$$y^{(4)} - (q(x)y')' = \lambda r(x)y + h(x, y, y', y'', y''', \lambda),\ x \in (0, 1), \quad (1)$$

$$y'(0)\cos\alpha - y''(0)\sin\alpha = 0, \quad (2)$$

$$y(0)\cos\beta + Ty(0)\sin\beta = 0, \quad (3)$$

$$y'(1)\cos\gamma + y''(1)\sin\gamma = 0, \quad (4)$$

© Seyidzade R.B., 2025

$$y(1)\cos\delta - Ty(1)\sin\delta = 0, \tag{5}$$

where $\lambda \in \mathbb{R}$ is an eigenvalue parameter, q is a positive absolutely continuous function on $[0,1]$, r is a real-valued indefinite weight function which is continuous on $[0,1]$, α,β,γ and δ are real constants such that $\alpha,\beta,\gamma,\delta \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, the nonlinear term h has the form $h = f+g$, where f and g are real-valued continuous functions on $[0,1]\times\mathbb{R}^5$ that satisfy the following conditions:

$$yf(x,y,s,v,w,\lambda) \leqslant 0 \ \text{ and } \ yg(x,y,s,v,w,\lambda) \leqslant 0$$
$$\text{for any } \ (x,y,s,v,w,\lambda) \in [0,1]\times\mathbb{R}^5;$$

there exist a positive constant M and small positive constant $\varkappa_0$ such that

$$\left|\frac{f(x,y,s,\vartheta,w,\lambda)}{y}\right| \leqslant M \text{ for any } \ (x,y,s,v,w,\lambda) \in [0,1]\times\mathbb{R}^5, \ y \neq 0,$$

$$|y|+|s|+|\vartheta|+|w| \leqslant \varkappa_0;$$

for any bounded interval $\Lambda \subset \mathbb{R}$,

$$g(x,y,s,v,w,\lambda) = o(|y|+|s|+|v|+|w|) \text{ as } |y|+|s|+|\vartheta|+|w| \to 0,$$

uniformly in $(x,\lambda) \in [0,1]\times\Lambda$.

In view of [1, Theorem 1], the linear eigenvalue problem with obtained from (1)–(5) by setting $h \equiv 0$ has two sequences real, simple eigenvalues $\{\lambda_k^+\}_{k=1}^\infty$ and $\{\lambda_k^-\}_{k=1}^\infty$ such that

$$0 < \lambda_1^+ < \lambda_2^+ < \ldots < \lambda_k^+ < \ldots \text{ and } 0 > \lambda_1^- > \lambda_2^- > \ldots > \lambda_k^- > \ldots,$$

and no other eigenvalues; for each $k \in \mathbb{N}$ and each $\sigma \in \{+,-\}$ the eigenfunction $y_{k,\sigma}$ corresponding to the eigenvalue λ_k^σ has exactly $k-1$ simple nodal zeros in $(0,1)$ and $\sigma\int\limits_0^1 r(x)y_{k,\sigma}^2(x)dx > 0$.

Let $B.C.$ be the set of functions which satisfy the boundary conditions (2)–(5) and let E be the Banach space $C^3[0,1]\cap B.C.$ with the usual norm. By S_k^ν, $k \in \mathbb{N}$, $\nu \in \{+,-\}$, we denote the set of functions $y \in E$ which constructed in [2, p. 1634-1636] and by $S_{k,\sigma}^\nu$ we denote the set of functions $y \in S_k^\nu$ such that $\sigma\int\limits_0^1 r(x)y^2(x)dx > 0$.

Theorem 1. *For each $k \in \mathbb{N}$, each $\sigma \in \{+,-\}$ and each $\nu \in \{+,-\}$ there exists a connected component $D_{k,\sigma}^\nu$ of nontrivial solutions* *of problem (1)–(5) which meets* $I_k^\sigma \times \{0\}$*, contained in* $\mathbb{R}^\sigma \times S_k^\nu$ *and is unbounded in* $\mathbb{R} \times E$*, where*

$$I_k^+ = [\lambda_k^+, \lambda_k^+ + c_k],\ I_k^- = [\lambda_k^- - c_k, \lambda_k^-],\ \mathbb{R}^+ = (0, +\infty),\ \mathbb{R}^- = (-\infty, 0),$$

c_k *is the positive constant depending on* M*.*

References

1. Aliyev Z.S. On a fourth-order spectral problem with indefinite weight / Z.S. Aliyev// Modern problems of mathematics and mechanics : materials of the 11th International Conference dedicated to the genius Azerbaijani scientist and thinker Nasireddin Tusi. — Baku : «Printing Polygraphy Limited Liability Company», 2024. — P. 86-88.

2. Aliyev Z.S. Global bifurcation of solutions of certain nonlinear eigenvalue problems for ordinary differential equations of fourth order / Z.S. Aliyev // Sb. Math. — 2016. — V. 207, No. 12. — P.1625–1649.

STRUCTURE OF ESSENTIAL SPECTRA AND DISCRETE SPECTRUM OF THE ENERGY OPERATOR OF THREE-MAGNON SYSTEMS IN THE HEISENBERG MODEL

S.M. Tashpulatov (Tashkent, INP)

sadullatashpulatov@yandex.ru, toshpul@mail.ru

We consider the energy operator of three-magnon systems in the Heisenberg model and investigated the structure of essential spectra and discrete spectrum of the system. Hamiltonian of the system has the form

$$H = J \sum_{m,\tau} (\overrightarrow{S}_m \overrightarrow{S}_{m+\tau}), \tag{1}$$

where $J < 0$ is the parameter of the bilinear exchange interaction between atoms, $\overrightarrow{S}_m = (S_m^x, S_m^y, S_m^z)$ is the operator of the atomic spin $\frac{1}{2}$ at the site m, and summation over τ ranges the nearest neighbors.

Hamiltonian H acts in a symmetric complex Fock space $(\mathcal{H}, (\cdot,\cdot)_{\mathcal{H}})$. We let φ_0 denote the vector, called the vacuum, uniquely defined by the conditions $S_m^+\varphi_0 = 0$ and $S_m^z\varphi_0 = \frac{1}{2}\varphi_0$, where $||\varphi_0|| = 1$. We set $S_m^\pm = S_m^x \pm iS_m^y$, where S_m^- and S_m^+ are the magnon creation and annihilation operators at the site m. The vector $S_p^- S_q^- S_r^- \varphi_0$ describes the state of the system of three magnons at the sites p, q and r with the spin $s = \frac{1}{2}$. The vectors $\psi = \frac{1}{6}\sum_{p,q,r} f(p,q,r)[S_p^- S_q^- S_r^- \varphi_0 +$

© Tashpulatov S.M., 2025

$S_p^- S_r^- S_q^- \varphi_0 + S_q^- S_p^- S_r^- \varphi_0 + S_q^- S_r^- S_q^- \varphi_0 + S_r^- S_p^- S_q^- \varphi_0 + S_r^- S_q^- S_p^- \varphi_0]$ constitute an orthonormal system. We let $\mathcal{H}_3$ denote the closure of this space of three-magnon states of the operator H.

Theorem 1. *The space $\mathcal{H}_3$ is invariant with respect to the operator H. The operator H_3 is a bounded self-adjoint operator. It generates bounded self-adjoint operator $\overline{H}_3$, acting in the space $l_2((Z^\nu)^3)$ according to the formula*

$$(\overline{H}_3 f)(p,q,r) = J\sum_\tau [\{\delta_{p,q+\tau}+\delta_{p+\tau,q}+\delta_{p,r+\tau}+\delta_{p+\tau,r}+\delta_{q,r+\tau}+\delta_{q+\tau,r}-$$

$$-3\}f(p,q,r) - \frac{1}{2}\delta_{p-\tau,q}f(p-\tau,q,r) - \frac{1}{2}\delta_{p-\tau,r}f(p-\tau,q,r) - \frac{1}{2}\delta_{q-\tau,r}\times$$

$$\times f(p,q-\tau,r) - \frac{1}{2}\delta_{q,r-\tau}f(p,q,r-\tau) - \frac{1}{2}\delta_{p,q-\tau}f(p,q-\tau,r) - \frac{1}{2}\delta_{p,r-\tau}\times$$

$$\times f(p,q,r-\tau)+\frac{1}{2}f(p-\tau,q,r)+\frac{1}{2}f(p,q-\tau,r)+\frac{1}{2}f(p,q,r-\tau)-\frac{1}{2}\delta_{p+\tau,q}\times$$

$$\times f(p+\tau,q,r) - \frac{1}{2}\delta_{p+\tau,r}f(p+\tau,q,r) - \frac{1}{2}\delta_{q+\tau,r}f(p,q+\tau,r) - \frac{1}{2}\delta_{q,r+\tau}\times$$

$$\times f(p,q,r+\tau)-\frac{1}{2}\delta_{p,q+\tau}f(p,q+\tau,r)-\frac{1}{2}\delta_{p,r+\tau}f(p,q,r+\tau)+\frac{1}{2}f(p+\tau,q,r)+$$

$$+\frac{1}{2}f(p,q+\tau,r) + \frac{1}{2}f(p,q,r+\tau)], \qquad (2)$$

where $\delta_{k,j}$ is the Kronecker symbol. The operator H_3 acts on the vector $\psi \in \mathcal{H}_3$ according to the formula

$$H_3\psi = \sum_{p,q,r} (\overline{H}_3 f)(p,q,r) S_p^- S_q^- S_r^- \varphi_0. \qquad (3)$$

We let $\mathcal{F}$ denote the Fourier transform: $\mathcal{F} : l_2((Z^\nu)^3) \to L_2((T^\nu)^3) \equiv \widetilde{\mathcal{H}}_3$, where T^ν is the $\nu-$ dimensional torus with the normalized Lebesgue measure $d\lambda : \lambda(T^\nu) = 1$. We set $\widetilde{H}_3 = \mathcal{F}\overline{H}_3\mathcal{F}^{-1}$.

Theorem 2. *The Fourier transformation transforms the operator $\overline{H}_3$ into the bounded self-adjoint operator $\widetilde{H}_3$ acting in the space $\widetilde{\mathcal{H}}_3$.*

$\nu = 1$. Then A). If $\varepsilon_2 = -B$ and $\varepsilon_1 < -2B$ (respectively, $\varepsilon_2 = -B$ and $\varepsilon_1 > 2B$), then the essential spectrum of the operator ${}^3\widetilde{H}_t^1$ is consists of the union of eight segments: $\sigma_{ess}({}^3\widetilde{H}_t^1) = [4A-8B, 4A+8B] \cup [3A-6B+z, 3A+6B+z] \cup [2A-4B+2z, 2A+4B+2z] \cup [A-2B+3z, A+2B+3z] \cup [2A-4B+z_3, 2A+4B+z_3] \cup [A-2B+z+z_3, A+2B+z+$

$z_3] \cup [2A-4B+z_4, 2A+4B+z_4] \cup [A-2B+z+z_4, A+2B+z+z_4]$, and discrete spectrum of the operator ${}^3\widetilde{H}_t^1$ is consists of a three point: $\sigma_{disc}({}^3\widetilde{H}_t^1) = \{4z, 2z+z_3, 2z+z_4\}$, where $z = A+\varepsilon_1$, and z_3 and z_4 are same concrete real numbers, lying the below (above) of the essential spectrum of operator ${}^3\widetilde{H}_t^1$.

B). If $\varepsilon_2 = -2B$ or $\varepsilon_2 = 0$ and $\varepsilon_1 < 0$ (respectively, $\varepsilon_2 = -2B$ or $\varepsilon_2 = 0$ and $\varepsilon_1 > 0$), then the essential spectrum of the operator ${}^3\widetilde{H}_t^1$ is consists of the union of eight segments: $\sigma_{ess}({}^3\widetilde{H}_t^1) = [4A-8B, 4A+8B] \cup [3A-6B+z, 3A+6B+z] \cup [2A-4B+2z, 2A+4B+2z] \cup [A-2B+3z, A+2B+3z] \cup [2A-4B+z_3, 2A+4B+z_3] \cup [A-2B+z+z_3, A+2B+z+z_3] \cup [2A-4B+z_4, 2A+4B+z_4] \cup [A-2B+z+z_4, A+2B+z+z_4]$, and discrete spectrum of the operator ${}^3\widetilde{H}_t^1$ is consists of a three points: $\sigma_{disc}({}^3\widetilde{H}_t^1) = \{4z, 2z+z_3, 2z+z_4\}$, where $z = A-\sqrt{4B^2+\varepsilon_1^2}$ (respectively, $z = A+\sqrt{4B^2+\varepsilon_1^2}$).

C). If $\varepsilon_1 = 0$ and $\varepsilon_2 > 0$ or $\varepsilon_1 = 0$ and $\varepsilon_2 < -2B$, then the essential spectrum of the operator ${}^3\widetilde{H}_t^1$ is consists of the union of sixteen segments: $\sigma_{ess}({}^3\widetilde{H}_t^1) = [4A-8B, 4A+8B] \cup [3A-6B+z_1, 3A+6B+z_1] \cup [3A-6B+z_2, 3A+6B+z_2] \cup [2A-4B+2z_1, 2A+4B+2z_1] \cup [2A-4B+z_1+z_2, 2A+4B+z_1+z_2] \cup [2A-4B+2z_2, 2A+4B+2z_2] \cup [A-2B+3z_1, A+2B+3z_1] \cup [A-2B+2z_1+z_2, A+2B+2z_1+z_2] \cup [A-2B+z_1+2z_2, A+2B+z_1+2z_2] \cup [A-2B+3z_2, A+2B+3z_2] \cup [2A-4B+z_3, 2A+4B+z_3] \cup [A-2B+z_1+z_3, A+2B+z_1+z_3] \cup [A-2B+z_2+z_3, A+2B+z_2+z_3] \cup [2A-4B+z_4, 2A+4B+z_4] \cup [A-2B+z_1+z_4, A+2B+z_1+z_4] \cup [A-2B+z_2+z_4, A+2B+z_2+z_4]$, and discrete spectrum of the operator ${}^3\widetilde{H}_t^1$ is consists of a eleven points: $\sigma_{disc}({}^3\widetilde{H}_t^1) = \{4z_1, 2z_1+2z_2, 4z_2, z_1+3z_2, 3z_1+z_2, z_1+z_2+z_3, z_1+z_2+z_4, 2z_1+z_3, 2z_2+z_3, 2z_1+z_4, 2z_2+z_4\}$, where $z_1 = A-\frac{2BE}{\sqrt{E^2-1}}$, and $z_2 = A+\frac{2BE}{\sqrt{E^2-1}}$, and $E = \frac{(B+\varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2}$.

References

1. Hubbard J. Electron correlations in narrow energy bands. // Proc. Roy. Soc. A. — 1963. — V. 276. — P. 238–257.

Именной указатель

Ю

Научное издание

**СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ
ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ
И СМЕЖНЫЕ ПРОБЛЕМЫ**

**Материалы
международной конференции
Воронежская зимняя математическая школа**

(30 января – 4 февраля 2025 г.)

Издано в авторской редакции

Верстка и подготовка оригинал-макета
Д. Э. Кондаурова

Подписано в печать 15.03.2025. Формат 60×84/16.
Усл. п. л. 25,3. Уч. изд. л. 21,8. Тираж 25 экз. Заказ 104

Издательский дом ВГУ
394018 Воронеж, пл. Ленина, 10
Отпечатано с готового оригинал-макета в типографии
Издательского дома ВГУ
394018 Воронеж, ул. Пушкинская, 3